Y según la ley general, tenemos:

1º Que el producto se compone de tantos términos como factores se multiplican más uno. Porque es claro que al disminuir el exponente en cada término una unidad, en el último término estará elevado á cero.

2º La ecuación resultante es de cuarto grado porque son cuatro los binomios y por consiguiente cuatro las raíces que la han originado.

3º Que el exponente de x en el primer término es igual al número de factores y que va disminuyendo una unidad en cada término consecutivo.

4º La potencia más elevada de x tiene 1 por coeficiente, la inmediata menor tiene por coeficiente la suma de las raíces, la del tercer término la suma de las combinaciones binarias de las raíces, la del cuarto la suma de las ternarias, y en fin, el último término es el producto de las raíces.

5º Los coeficientes de segundo, cuarto, ..., en general los coeficientes de orden par, tienen signo contrario á las sumas que representan por estar el signo $-$ fuera del paréntesis que encierra dichas sumas.

356. Lo que acaba de establecerse para las ecuaciones del grado m aplicado á las ecuaciones de segundo grado cuya forma general es: $x^2+px+q=0$, daría para el valor de p la suma de las raíces con signo cambiado, y para q el producto de dichas raíces.

En efecto, resolviendo la ecuación general $x^2+px+q=0$, tenemos:

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},\quad x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

y se tendrá:

$$x'+x''=-p,\quad x'+x''=q$$

como ya se había establecido en Álgebra Elemental (Contreras, Álgebra).

357. Supongamos, dados los tres binomios: $(x-5)$, $(x+4)$, $(x+3)$; si formamos su producto, éste será divisible por ellos por contenerlos como factores; al ser divisible por $x-5$, $x+4$ y $x+3$, deduciremos que 5, -4 y -3 serán las raíces de la ecuación resultante.

Así pues:

$$(x-5)(x+4)(x+3)=x^3+2x^2-23x-60=0$$

La suma de las raíces $5-4-3=-2$ coeficiente de x^2 con signo cambiado.

La suma de los productos binarios de las raíces es:

$$5.-4+5.-3+(-4).-3=-20-15+12=-23$$

coeficiente de x.

La suma de las combinaciones ternarias, que en este caso es el producto de las raíces, es: $5.-4.-3=+60$, término independiente con signo contrario.

358. Cuando la suma de las raíces positivas es igual á la de las negativas, la ecuación que se obtiene puede carecer de algún término; por ejemplo, sean:

$$(x-2)(x-3)(x+5)=x^3-19x-30=0$$

La ecuación carece de segundo término, y es porque la suma de las raíces produce:

$$+2+3-5=0$$

como lo habíamos anunciado.

359. Considerando una ecuación como producto de varios factores, el número de dichos factores hemos visto que no debe sobrepasar al grado de la ecuación; pero si com-

binamos estos factores de dos en dos, formaremos productos binarios que también serán factores de la ecuación propuesta y cuyo número será indicado por $\frac{n(n-1)}{1.2}$ (1)

Combinando de tres en tres los factores simples, se formarán productos cuyo número en una ecuación de grado n será:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3},\ \text{etc.}$$

360. Sea la ecuación:

$$X=x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+......+Tx+U$$

cualquiera que sea la cantidad a podemos escribir la anterior ecuación bajo la forma:

$$X=\left\{\begin{array}{c}(x^m-a^m)+P(x^{m-1}-a^{m-1})+Q(x^{m-2}-a^{m-2})+......+T(x-a)\\ +(a^m+Pa^{m-1}+Qa^{m-2}+......+Ta+U)\end{array}\right\}\quad(588)$$

dividiéndola entre $x-a$ resulta:

$$\frac{X}{x-a}=\begin{array}{r|r|r|l}x^{m-1}+a & x^{m-2}+a^2 & x^{m-3}+a^3 & x^{m-4}+...+a^{m-1}\\ +P & +aP & +a^2P & \qquad\quad +a^{m-2}P\\ & +Q & +aQ & \qquad\quad +a^{m-3}Q\\ & & +R & \qquad\quad +a^{m-4}R\\ & & & \qquad\quad ....\\ & & & \qquad\quad +T\end{array}+\frac{a^m+Pa^{m-1}+...+Ta+U}{x-a}\quad(589)$$

Deduciremos:

1º Que el valor de la resta no es otro sino el resultado de sustituir a en lugar de x en el polinomio X como ya habíamos establecido en el párrafo 352.

2º Que si a fuese raíz de la ecuación:

$$X=x^m+Px^{m-1}+......+Tx+U$$

al sustituir a en lugar de x se tendría:

$$a^m+Pa^{m-1}+......+Ta+U=0$$

de consiguiente en la (fórmula 588) el último término desaparecería y X sería divisible entre $x-a$ por serlo las diferencias encerradas entre paréntesis.

3º Que en la formación del cociente hay que observar que el primer término tiene el mismo coeficiente que el x^m del dividendo, que el coeficiente del segundo término se forma multiplicando el primero, que en este caso es 1, por la cantidad a y añadiendo el segundo P del dividendo; que el tercer coeficiente se forma del anterior multiplicado por a más el coeficiente Q del tercer término del dividendo, etc.

361. Así pues, esto nos conduce á poder dividir un polinomio entre un binomio de una manera fácil y expedita sabiendo formar los coeficientes del cociente y atendiendo á que los exponentes de las literales son una unidad menores que en el dividendo.

Sea

$$\frac{4x^5-10x^4+6x^3-7x^2+9x-11}{x-2}$$

(1) Véase el Capítulo IV de la Primera Parte.

La operación se dispone así:

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
2 & 4x^5 & -10x^4 & +6x^3 & -7x^2 & +9x & -11 \\
 & 4 & -2 & +2 & -3 & +3 & -5
\end{array}
$$

Ponemos á la izquierda de la raya vertical, 2, positivo, por ser negativo en el binomio $x-2$ y necesitar cambiarle el signo para hacer la resta.

Según lo antes dicho, pondremos en el primer término del cociente el coeficiente del primer término del dividendo que en nuestro ejemplo es 4.

Después, conforme á la regla citada, formaremos el resultado:

$$Ka+P\,(^1)=4\times 2-10=-2$$

que colocaremos debajo de su correspondiente término. Sumaremos después:

$$Ka^2+aP+Q=a(Ka+P)+Q=2.(-2)+6=2$$

Del mismo modo seguiremos obteniendo -3, $+3$ y -5; finalmente el cociente que produce la división:

$$4x^5-10x^4+6x^3-7x^2+9x-11\div(x-2)=4x^4-2x^3+2x^2-3x+3 \text{ y la resta } -5$$

El resto -5 ó $a^m+Pa^{m-1}+\ldots\ldots$ debe ser el resultado de la sustitución de 2 ó a en el polinomio:

$$4x^5-10x^4+6x^3-7x^2+9x-11 \text{ ó } x^m+Px^{m-1}+\ldots\ldots$$

En efecto:

$$4x^5-10x^4+6x^3-7x^2+9x-11$$

al poner 2 en lugar de x se cambia en:

$$128-160+48-28+18-11=-5$$

que es el resto.

362. Si tuviéramos que dividir el mismo polinomio por $x+2$, tendríamos:

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
-2 & 4x^5 & -10x^4 & +\ 6x^3 & -\ 7x^2 & +\ \ 9x & -\ 11 \\
 & 4 & -18 & +42 & -91 & +191 & -393
\end{array}
$$

363. Hay ocasiones en que la ecuación dada, que llamaremos x, tiene la forma:

$$x=(x-a)^p(x-b)^r(x-c)^d$$

es decir, es producida por: p binomios iguales á $x-a$, d iguales á $x-c$ y r iguales á $x-b$; entonces la ecuación parece que tiene menos raíces que las que debe tener, esto depende de que las raíces son iguales, pero aunque se repiten, no por esto desaparecen.

364. Como una ecuación X puede admitir raíces reales ó imaginarias según el Álgebra Elemental ha hecho conocer refiriéndose á las ecuaciones de segundo grado, es conveniente establecer desde luego ciertas proposiciones fundamentales á que da lugar la hipótesis de la existencia de raíces imaginarias; este es el objeto de los párrafos siguientes.

(1) Antes supusimos $K=1$ y el valor $Ka+P$ era $a+P$.

365. *Toda ecuación algebraica de coeficientes reales* $X=0$ *que admita una raíz imaginaria* $\alpha+\beta i$, *debe admitir su conjugada* $\alpha-\beta i$.

En efecto, reemplazando en X, $\alpha+\beta i$ en lugar de x, se obtiene un resultado de la forma (párrafo 255, Primera Parte): $P+Qi$, y como $\alpha+\beta i$ es raíz por hipótesis:

$$P+Qi=0, \text{ de consiguiente: } P=0,\ Q=0$$

Si se sustituye por x, $\alpha-\beta i$, puesto que son reales los coeficientes de X, el resultado sólo diferirá del anterior en el signo de i y tendrá la forma: $P-Qi$.

Como antes se han hallado las condiciones $P=0$, $Q=0$, se tendrá: $P-Qi=0$; luego $\alpha-\beta i$ también será raíz.

N. B. Cuando no son reales todos los coeficientes de X, la proposición deja de subsistir según las observaciones del párrafo 255 de la Primera Parte.

366. *Toda ecuación de coeficientes reales entraña necesariamente un número par de raíces imaginarias*, puesto que según el párrafo anterior se corresponden por pares.

Si una raíz es $\alpha+\beta i$, la otra es $\alpha-\beta i$; las diferencias entre la incógnita y ambas raíces son:

$$(x-\alpha)-\beta i,\ (x-\alpha)+\beta i$$

es decir, son resultados conjugados. El producto de ambas diferencias es:

$$(x-\alpha)^2+\beta^2$$

es decir, es un factor real de segundo grado que precisamente tiene por valor el cuadrado del módulo común de las raíces supuestas.

Tomando en cuenta la proposición III, párrafo 354, se puede enunciar este notable teorema:

El primer miembro de toda ecuación algebraica de coeficientes reales es el producto de tantos factores reales de primer grado cuantas raíces reales admite, y de tantos factores reales de segundo grado, cuantos pares hay de raíces imaginarias.

Si el coeficiente del primer término de la ecuación no es la unidad, como por lo común hemos supuesto, habrá que agregar: *multiplicados los productos anteriores por el coeficiente del primer término de la ecuación.* Se comprende por esto que una ecuación de coeficientes reales pueda admitir raíces imaginarias.

367. Si pues una ecuación sólo admite raíces imaginarias, debe ser de grado par, puesto que al admitir las raíces imaginarias:

$$\alpha+\beta i,\ \alpha'+\beta' i,\ \alpha''+\beta'' i,\ \ldots\ldots$$

debe admitir las conjugadas:

$$\alpha-\beta i,\ \alpha'-\beta' i,\ \alpha''-\beta'' i,\ \ldots\ldots$$

Si una raíz $\alpha+\beta i$ entra un número n de veces, la conjugada $\alpha-\beta i$ debe tener el mismo orden de multiplicidad.

368. Por consideraciones análogas: *si una ecuación de coeficientes comensurables admite la raíz inconmensurable* $\alpha+\sqrt{\beta}$, *debe admitir la conjugada:* $\alpha-\sqrt{\beta}$.

Las diferencias respectivas á estas raíces son: $(x-\alpha)-\sqrt{\beta}$, $(x-\alpha)+\sqrt{\beta}$ y su producto es: $(x-\alpha)^2-\beta$ factor de segundo grado con coeficientes conmensurables. Se comprende por esto que una ecuación de coeficientes conmensurables pueda admitir raíces inconmensurables.

APLICACIONES.

369. I. Dividir el polinomio:

$$4x^5-6x^4+3x^3-2x^2+5x+5$$

entre el binomio: $x-3$ según lo expuesto en el párrafo 361.
Debe hallarse:

$$\text{cociente}=4x^4+6x^3+21x^2+61x+188,\quad \text{resta}=569$$

II. Averiguar si 2 es raíz de la ecuación:

$$4x^5-10x^4+6x^3-7x^2+9x-11=0$$

Aplicando los conceptos del párrafo 361, debe hallarse:

$$\text{cociente}=4x^4-2x^3+2x^2-3x+3,\quad \text{resta}=-5$$

luego 2 no es raíz.

III. Averiguar si $1+2i$, es decir, $1+2\sqrt{-1}$ es raíz de la ecuación:

$$x^3-2(1+\sqrt{-1})x^2-(1-2\sqrt{-1})x+2(1+2\sqrt{-1})=0$$

Aplicando la regla del párrafo 361, resulta:

$$\text{cociente}=x^2-x-2,\quad \text{resta}=0$$

luego $1+2\sqrt{-1}$ es raíz.

IV. Averiguar si la ecuación:

$$x^4-6x^3+26x^2-46x-65=0$$

admite las raíces: $1+2i$, $1-2i$, $2-3i$, $2+3i$.

Efectuando las operaciones conocidas resulta que admite las cuatro raíces, y como es de cuarto grado, no puede admitir ni una más; de consiguiente:

$$x^4-6x^3+26x^2-46x+65=(x-1-2i)(x-1+2i)(x-2+3i)(x-2-3i)$$

ó bien llamando X el primer miembro:

$$X=[(x-1)^2+4][(x-2)^2+9]$$

comprobación de los teoremas de los párrafos 365, 366 y 367.

V. Comprobar si se verifican las condiciones expresadas por el párrafo 355 respecto á las relaciones entre las raíces y los coeficientes de una ecuación con las cuatro raíces y la ecuación del ejemplo anterior.

VI. Con las cantidades: 2, -6, $2+5\sqrt{-1}$, $2-5\sqrt{-1}$, reconstruir la ecuación que las admite por raíces, de cuantos modos se pueda.

VII. Con las cantidades $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$, $4+3i$, $4-3i$, 4 y -3, reconstruir la ecuación que las admite como raíces, de cuantos modos se pueda, comprobar los coeficientes que resulten, expresar la ecuación en factores de primero, de segundo y de tercer grado calculando previamente el número de factores que deben resultar y comprobar las raíces por la división conocida.

CAPÍTULO II.

PROPIEDADES Y TRANSFORMACIONES DE LAS ECUACIONES.

*FUNCIONES SIMÉTRICAS.

370. Sucede frecuentemente que para resolver con facilidad una ecuación se necesita obtener otra cuyas raíces estén en cierta relación con las de la primera. Esta segunda ecuación se llama *transformada.*

Si la función es $f(x)=0$, se trata de buscar una nueva ecuación $f(y)=0$ tal, que y sea una función de x (función de suma, resta, producto, etc.), cuya función puede representarse por: $y=f_1(x)$.

Así pues, los problemas á que dan lugar estas transformaciones son muy variados.

Examinaremos los siguientes:

371. I. *Transformar una ecuación:*

$$x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}+\ldots\ldots+Tx+U=0 \qquad (589')$$

en otra cuyas raíces sean iguales á las de la primera, pero de signos contrarios.

Si x representa una raíz de la ecuación (589′) y x' la de su transformada, deben guardar la relación:

$$x=-x' \quad \text{ó bien} \quad x'=-x$$

Basta de consiguiente cambiar x en $-x'$, en la ecuación (589′) para obtener la transformada que tendrá la forma:

$$\pm x'^m \mp Px'^{m-1} \pm Qx'^{m-2} \mp \ldots\ldots - Tx'+U=0 \qquad (590)$$

Es claro que si la ecuación (589′) es de grado par, se tomarán los signos superiores y quedará:

$$x'^m-Px'^{m-1}+Qx'^{m-2}-\ldots\ldots-Tx'+U=0 \qquad (591)$$

y si el grado es impar se tomarán los inferiores, luego resultará:

$$-x'^m+Px'^{m-1}-Qx'^{m-2}+\ldots\ldots-Tx'+U=0 \qquad (592)$$