APLICACIONES.

369. I. Dividir el polinomio:

$$4x^5-6x^4+3x^3-2x^2+5x+5$$

entre el binomio: $x-3$ según lo expuesto en el párrafo 361.
Debe hallarse:

$$\text{cociente}=4x^4+6x^3+21x^2+61x+188, \quad \text{resta}=569$$

II. Averiguar si 2 es raíz de la ecuación:

$$4x^5-10x^4+6x^3-7x^2+9x-11=0$$

Aplicando los conceptos del párrafo 361, debe hallarse:

$$\text{cociente}=4x^4-2x^3+2x^2-3x+3, \quad \text{resta}=-5$$

luego 2 no es raíz.
III. Averiguar si $1+2i$, es decir, $1+2\sqrt{-1}$ es raíz de la ecuación:

$$x^3-2(1+\sqrt{-1})x^2-(1-2\sqrt{-1})x+2(1+2\sqrt{-1})=0$$

Aplicando la regla del párrafo 361, resulta:

$$\text{cociente}=x^2-x-2, \quad \text{resta}=0$$

luego $1+2\sqrt{-1}$ es raíz.
IV. Averiguar si la ecuación:

$$x^4-6x^3+26x^2-46x-65=0$$

admite las raíces: $1+2i$, $1-2i$, $2-3i$, $2+3i$.
Efectuando las operaciones conocidas resulta que admite las cuatro raíces, y como es de cuarto grado, no puede admitir ni una más; de consiguiente:

$$x^4-6x^3+26x^2-46x+65=(x-1-2i)(x-1+2i)(x-2+3i)(x-2-3i)$$

ó bien llamando X el primer miembro:

$$X=[(x-1)^2+4][(x-2)^2+9]$$

comprobación de los teoremas de los párrafos 365, 366 y 367.
V. Comprobar si se verifican las condiciones expresadas por el párrafo 355 respecto á las relaciones entre las raíces y los coeficientes de una ecuación con las cuatro raíces y la ecuación del ejemplo anterior.
VI. Con las cantidades: 2, -6, $2+5\sqrt{-1}$, $2-5\sqrt{-1}$, reconstruir la ecuación que las admite por raíces, de cuantos modos se pueda.
VII. Con las cantidades $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$, $4+3i$, $4-3i$, 4 y -3, reconstruir la ecuación que las admite como raíces, de cuantos modos se pueda, comprobar los coeficientes que resulten, expresar la ecuación en factores de primero, de segundo y de tercer grado calculando previamente el número de factores que deben resultar y comprobar las raíces por la división conocida.

CAPÍTULO II.

PROPIEDADES Y TRANSFORMACIONES DE LAS ECUACIONES.

*FUNCIONES SIMÉTRICAS.

370. Sucede frecuentemente que para resolver con facilidad una ecuación se necesita obtener otra cuyas raíces estén en cierta relación con las de la primera. Esta segunda ecuación se llama *transformada*.
Si la función es $f(x)=0$, se trata de buscar una nueva ecuación $f(y)=0$ tal, que y sea una función de x (función de suma, resta, producto, etc.), cuya función puede representarse por: $y=f_1(x)$.
Así pues, los problemas á que dan lugar estas transformaciones son muy variados.
Examinaremos los siguientes:
371. I. *Transformar una ecuación:*

$$x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}+\ldots\ldots+Tx+U=0 \qquad (589')$$

en otra cuyas raíces sean iguales á las de la primera, pero de signos contrarios.
Si x representa una raíz de la ecuación (589′) y x' la de su transformada, deben guardar la relación:

$$x=-x' \quad \text{ó bien} \quad x'=-x$$

Basta de consiguiente cambiar x en $-x'$, en la ecuación (589′) para obtener la transformada que tendrá la forma:

$$\pm x'^m \mp Px'^{m-1} \pm Qx'^{m-2} \mp \ldots\ldots - Tx'+U=0 \qquad (590)$$

Es claro que si la ecuación (589′) es de grado par, se tomarán los signos superiores y quedará:

$$x'^m-Px'^{m-1}+Qx'^{m-2}-\ldots\ldots-Tx'+U=0 \qquad (591)$$

y si el grado es impar se tomarán los inferiores, luego resultará:

$$-x'^m+Px'^{m-1}-Qx'^{m-2}+\ldots\ldots-Tx'+U=0 \qquad (592)$$

Cambiando signos en esta ecuación, se transforma en:

$$x'^m - Px'^{m-1} + Qx'^{m-2} - \ldots\ldots + Tx' - U = 0 \qquad (593)$$

Comparando las ecuaciones (591) y (593), la forma general de la transformada será:

$$x'^m - Px'^{m-1} + Qx'^{m-2} - \ldots\ldots \mp Tx' \pm U = 0 \qquad (594)$$

que á consecuencia de la igualdad intrínseca de x' y x puede escribirse así:

$$x^m - Px^{m-1} + Qx^{m-2} - \ldots\ldots \mp Tx \pm U = 0 \qquad (595)$$

ecuación que difiere de la (589′) por el cambio de signo de los términos de orden par.

Se infiere de lo anterior: *que una ecuación se transforma en otra cuyas raíces sean iguales á las de la primera y de signos contrarios, cambiando los signos de los términos de orden par.*

372. 1º Como aplicación de la regla, consideremos la ecuación:

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \qquad (A)$$

cuyas raíces son: $x' = 3$, $x'' = -5$.

Si deseamos transformar la ecuación (A) en otra cuyas raíces sean iguales y de signos contrarios, cambiaremos el signo de $2x$ y la transformada será:

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \qquad (B)$$

cuyas raíces son: $x' = -3$, $x'' = 5$ iguales y de signos contrarios á las de (A).

2º La transformada de la ecuación:

$$x^5 - 6x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 2 = 0 \quad \text{es:} \quad x^5 + 6x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 2 = 0$$

3º La transformada de la ecuación:

$$x^7 + 2x^6 - x^5 + 3x^3 + x^2 + 2x + 2 = 0 \quad \text{es:} \quad x^7 - 2x^6 - x^5 + 3x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$$

373. II. *Transformar una ecuación propuesta en otra cuyas raíces sean iguales á las de la primera, disminuídas* a *unidades.*

Sea la ecuación:

$$f(x) = x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots\ldots + Fx^3 + Gx^2 + Tx + U = 0 \qquad (596)$$

la raíz x' de la transformada debe verificar la relación:

$$x' = x - a \quad \text{ó bien} \quad x = x' + a$$

Sustituyendo en (596) este valor, se obtiene:

$$(x'+a)^m + P(x'+a)^{m-1} + Q(x'+a)^{m-2} + \ldots\ldots + T(x'+a) + U = 0$$

Desarrollando esta expresión y ordenando, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l|l|l}
x'^m + ma & x'^{m-1} + \dfrac{m(m-1)a^2}{1.2} & x'^{m-2} + \ldots\ldots \\
+P & +P(m-1)a & \\
 & +Q & \\
\ldots\ldots + \dfrac{m(m-1)a^{m-2}}{1.2} & x'^2 + ma^{m-1} & x' + a^m \\
+\dfrac{P(m-1)(m-2)a^{m-3}}{2} & +P(m-1)a^{m-2} & +Pa^{m-1} \\
+\dfrac{Q(m-2)(m-3)a^{m-4}}{2} & +Q(m-2)a^{m-3} & +Qa^{m-2} \\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & +\ldots\ldots\ldots\ldots & +\ldots\ldots \\
+3Fa & +3Fa^2 & +Fa^3 \\
+G & +2Ga & +Ga^2 \\
 & +T & +Ta \\
 & & +U
\end{array}\right\} = 0 \qquad (597)$$

Designando por P′, Q′, ... los coeficientes de x'^{m-1}, x'^{m-2}, ..., tendremos:

$$x'^m + P'x'^{m-1} + Q'x'^{m-2} + \ldots\ldots + T'x' + U' = 0$$

ó bien:

$$x^m + P'x^{m-1} + Q'x^{m-2} + \ldots\ldots + T'x + U' = 0 \qquad (598)$$

que es la transformada de la ecuación (596). En cuanto á la formación de los coeficientes: P′, Q′, ..., T′, U′, basta fijarnos en la ecuación (597) para deducir que:

1º *El último término* U′ *de la ecuación* (597) *ó sea el coeficiente de* x^0, *es el primer miembro de la ecuación* (596) *en la que se ha cambiado* x *por* a.

2º *El penúltimo ó sea* T′ *se forma del último pasando en cada término el exponente á ser coeficiente y disminuyendo una unidad al exponente, dividido el resultado por la unidad.*

3º *El coeficiente antepenúltimo se forma análogamente cambiando los exponentes en coeficientes, disminuyendo una unidad á los exponentes y dividiendo el resultado por 1.2, etc.*

4º *En fin, el coeficiente del primer término se forma por las anteriores reglas dividiendo el resultado por* m *y obteniéndose idéntico al primer término de la ecuación.*

Regla atribuída á Budan (1).

Estos polinomios deducidos unos de otros, se han llamado *derivados* porque en virtud de una ley muy sencilla se derivan unos de otros, llamándolos: 1º, 2º, 3º, ..., mº polinomio derivado según su orden.

De aquí se deduce la siguiente regla:

Para formar la derivada de una expresión de la forma rx^n, *se convierten los exponentes en coeficientes disminuyendo una unidad á los exponentes* (2).

374. Ejemplo. Sea

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = 0 \qquad (A)$$

y se trata de aumentar 1 á las raíces de esta ecuación.

(1) *Foglini* en su obra "*Matematica Elementare*" asienta que es una parte de la regla de Horner.
(2) Compare el lector con el Capítulo VII de la Primera Parte.

La forma general de la transformada es:

$$x'^4+P'x'^3+Q'x'^2+T'x'+U'=0 \qquad (B)$$

en la que: $x'=x+1$ ó bien $x=x'-1$, es decir: $a=-1$.

Según el teorema precedente tenemos:

$$\begin{array}{ll}
U'=a^4-2a^3+3a^2-4a+5=15 & \text{para } a=-1\\
T'=4a^3-6a^2+6a-4=-20 & \quad " \quad\quad "\\
Q'=6a^2-6a+3=15 & \quad " \quad\quad "\\
P'=4a-2=-6 & \quad " \quad\quad "
\end{array}$$

Sustituyendo en (B) los valores de los coeficientes, la transformada es:

$$x^4-6x^3+15x^2-20x+15=0$$

375. Nota. A la transformada de la ecuación (596) se le da la forma general:

$$f(a)+f'(a)x'+\tfrac{1}{2}f''(a)x'^2+\ldots\ldots=0 \qquad (599)$$

en que según la notación de Lagrange, $f'(a), f''(a), f'''(a)$, ... representan la 1ª, 2ª, ... derivada de la expresión, siendo x' la raíz de la transformada [1].

376. Puede seguirse otro procedimiento para determinar la transformada en las condiciones que menciona este caso.

Supongamos que dividiendo $f(x)$ entre $x-a$, produce T de cociente y t de resta, es decir:

$$\frac{f(x)}{x-a}=T+\frac{t}{(x-a)} \quad \text{luego: } f(x)=T(x-a)+t$$

Igualmente:

$$\begin{array}{l}
T=U(x-a)+u\\
U=V(x-a)+v\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

luego eliminando á T, U, V, ..., queda:

$$f(x)=t+u(x-a)+v(x-a)^2+\ldots\ldots+(x-a)^m$$

ó bien:

$$f(a+x')=t+ux'+vx'^2+\ldots\ldots+x'^m$$

supuesto que $x=a+x'$.

Comparando esta ecuación con la (599) tenemos:

$$t=f(a),\quad u=f'(a),\quad v=\frac{f''(a)}{1.2},\ \ldots\ldots \qquad (600)$$

De aquí se deduce la regla:

Divídase la ecuación y los cocientes que resulten por $x-a$, y las restas sucesivas serán los coeficientes de la transformada (teorema de Horner).

[1] Esta fórmula se deriva inmediatamente de la fórmula de Taylor que desarrolla las funciones de una variable (Capítulo VII de la Primera Parte).

EJEMPLOS.

377. I. Supongamos la ecuación:

$$4x^5-10x^4+6x^3-7x^2+9x-11=0$$

Para $x=x'+2$ ó bien $x'=x-2$, obtendremos la transformada así:

$$\begin{array}{r|llllll}
 & 4x^5 & -10x^4+ & 6x^3- & 7x^2+ & 9x- & 11\\
 & 4 & -\ 2 & +\ 2 & -\ \ 3 & +\ 3 & -\ \underline{5}\\
 & 4 & +\ 6 & +14 & +\ 25 & +\underline{53} & \\
+2 & 4 & +14 & +42 & +\underline{109} & & \\
 & 4 & +22 & +\underline{86} & & & \\
 & 4 & +\underline{30} & & & & \\
 & \underline{4} & & & & &
\end{array}$$

Así pues, la transformada es:

$$4x'^5+30x'^4+86x'^3+109x'^2+53x'-5=0$$

II. La ecuación:

$$x^4-2x^3+3x^2-4x+5=0$$

Para $x=x'-1$ ó $x'=x+1$, da la transformada:

$$x'^4-6x'^3+15x'^2-20x'+15=0$$

Aplicando el segundo método, resulta:

$$\begin{array}{r|lllll}
 & x^4- & 2x^3+ & 3x^2- & 4x+ & 5\\
 & 1 & 3 & +\ 6 & -10 & +\underline{15}\\
 & 1 & -4 & +10 & -\underline{20} & \\
-1 & 1 & -5 & +\underline{15} & & \\
 & 1 & -\underline{6} & & & \\
 & \underline{1} & & & &
\end{array}$$

es decir:

$$x'^4-6x'^3+15x'^2-20x'+15=0$$

que es la encontrada antes.

378. De lo anterior se deduce el modo de transformar una ecuación en otra que carezca de cierto término.

Por ejemplo, si deseamos que falte el segundo término en la transformada de la ecuación (589′) que es:

$$x^m+P'x^{m-1}+Q'x^{m-2}+\ldots\ldots+T'x+U'=0$$

es preciso que P′ ó su valor $ma+P$ sean nulos, lo que produce la condición:

$$ma+P=0 \quad \text{ó bien} \quad a=-\frac{P}{m}.$$

Luego es preciso sustituir en la ecuación por x el valor:

$$x = x' \mp \frac{\mathrm{P}}{m} \qquad (601)$$

tomando el primer signo si P es positivo y el segundo si es negativo.

Si deseamos que la transformada carezca de tercer término, es forzoso que Q′ ó su valor:

$$\frac{m(m-1)}{1.2}a^2 + \mathrm{P}(m-1)a + \mathrm{Q} = 0$$

lo que da:

$$a = -\frac{\mathrm{P}}{m} \pm \sqrt{\frac{\mathrm{P}^2}{m^2} - \frac{2\mathrm{Q}}{m(m-1)}} = -\frac{\mathrm{P}}{m} \pm \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{\mathrm{P}^2}{m} - \frac{2\mathrm{Q}}{m-1}\right)} \qquad (602)$$

hay, pues, dos valores de a que conducen á una transformada sin tercer término.

Si se deseara que faltasen á la vez el segundo y el tercero, *a fortiori:*

$$\mathrm{P}' = 0, \ \ \mathrm{Q}' = 0$$

Si se tratara de que faltase el cuarto, se resolvería una ecuación de tercer grado. En general si el término era de orden m, se resolvería una ecuación del grado $m-1$.

Finalmente, si se quiere hacer desaparecer hasta el último término de la ecuación, se tendrá que resolver otra semejante á la propuesta, de la forma:

$$a^m + \mathrm{P}a^{m-1} + \mathrm{Q}a^{m-2} + \ldots\ldots + \mathrm{T}a + \mathrm{U} = 0$$

Es semejante á la propuesta, porque igualar á cero el último término de la ecuación transformada es suponer que uno de los valores de la incógnita x' respecto á la que está ordenada es nulo, porque cuando esta ecuación no tiene último término se verifica para $x' = 0$; por consiguiente: $x = x' + a$ se reduce á: $x = a$; luego debe tomarse para a uno cualquiera de los valores de x.

Así pues, a debe determinarse por la misma ecuación que sirve para determinar á x.

EJEMPLOS.

379. I. Si tenemos por ejemplo:

$$x^2 + px = q \qquad (\mathrm{A})$$

supondremos:

$$x = x' - \frac{p}{2}$$

Sustituyendo en (A), desarrollando, ordenando respecto á x' y despejándola por la regla propia de las ecuaciones simples de segundo grado, resulta:

$$x' = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

pero como: $x = x' - \frac{p}{2}$, resulta:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

que son en efecto los valores de las raíces de una ecuación mixta de segundo grado.

Tomando un ejemplo particular:

$$x^2 + 6x = 9$$

en la que: $p = 6$, $q = 9$, resulta:

$$x' = \pm\sqrt{18}$$

por consiguiente:

$$x = -3 \pm \sqrt{18}$$

que produce las raíces:

$$x'' = 1'242\ldots\ldots, \ \ x''' = -7'242\ldots\ldots$$

Comprobación. Su suma da (Capítulo I):

$$x'' + x''' = -6$$

coeficiente de x con signo cambiado; su producto:

$$x'' \times x''' = -9$$

término independiente.

II. Sea

$$x^3 - 15x^2 + 56x - 60 = 0$$

ecuación que se desea transformar en:

$$x^3 + \mathrm{Q}'x + \mathrm{U}' = 0$$

sin segundo término. Haremos:

$$a = -\frac{\mathrm{P}}{m} = 5$$

lo que da:

$$\begin{aligned} \mathrm{U}' &= a^3 - 15a^2 + 56a - 60 = 90 \ \text{para } a = 5 \\ \mathrm{Q}' &= 3a^2 - 30a + 56 = -19 \quad \text{»} \quad \text{»} \\ \mathrm{P}' &= 3a - 15 = 0 \quad \text{»} \quad \text{»} \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$x^3 - 19x + 90 = 0$$

Por el procedimiento de Horner haremos:

$$x = x' + 5 \ \text{ ó bien } \ x' = x - 5$$

y aplicándolo se tendrá el cuadro de operaciones siguiente:

CUADRO DE OPERACIONES.

$$\begin{array}{r|l} & x^3 - 15x^2 + 56x + 60 \\ & 1 \ -10 \ \ +\ 6 \ \ +\underline{90} \\ +5 & 1 \ -\ 5 \ \ -\underline{19} \\ & 1 \ +\ \underline{0} \\ & \underline{1} \end{array}$$

La transformada es:

$$x'^3 - 19x' + 90 = 0$$

igual á la anterior.