Así pues, quedará:

$$Ta^{n+p}+Ta^n b^p=Ta^n\times Ta^p$$

de donde:

$$Ta^n b^p=Ta^n.Ta^p-Ta^{n+p} \tag{615}$$

ó según la otra notación:

$$S_{n,p}=S_n.S_p-S_{n+p} \tag{616}$$

Conociendo $Ta^n$, $Ta^p$ y $Ta^{n+p}$, la fórmula (615) sirve para calcular las funciones simétricas de dos letras.

391. Si se supone $n=p$, el segundo miembro se cambia en:

$$(Ta^n)^2-Ta^{2n} \text{ ó bien: } (S_n)^2-S_{2n}$$

En cuanto al primero, observaremos que como se tiene:

$$\begin{aligned}Ta^n b^p=a^n b^p+a^n c^p+a^n d^p+\ldots\ldots\\ b^n a^p+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ c^n a^p+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

para $n=p$, habrá términos iguales dos á dos; así por ejemplo:

$$a^n b^n=b^n a^n,\quad a^n c^n=c^n a^n, \text{ etc.}$$

luego $Ta^n b^p$ se cambia en:

$$2\,Ta^n b^n \quad \text{ó} \quad 2\,S_{n.n}$$

Sustituyendo en (615) ó (616), tendremos:

$$2\,Ta^n b^n=(Ta^n)^2-Ta^{2n}$$

que produce:

$$Ta^n b^n=\frac{(Ta^n)^2-Ta^{2n}}{2} \tag{617}$$

ó bien:

$$S_{n.n}=\frac{(S_n)^2-S_{2n}}{2} \tag{618}$$

392. Valuemos ahora la función:

$$Ta^n.b^p c^q$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned}Ta^n b^p&=a^n b^p+a^n c^p+a^n d^p+\ldots\ldots+b^n a^p+\ldots\ldots+c^n a^p+\ldots\ldots\\ Ta^q&=a^q+b^q+c^q+\ldots\ldots\end{aligned}$$

El producto de los primeros miembros es:

$$Ta^n b^p.Ta^q$$

En cuanto al de los segundos, deben existir tres especies de funciones simétricas, pues hay productos de tres clases:

$$Ta^{n+q}b^p,\quad Ta^n b^{p+q},\quad Ta^n b^p c^q$$

luego:

$$Ta^n b^p.Ta^q=Ta^{n+q}b^p+Ta^n b^{p+q}+Ta^n b^p c^q$$

de donde:

$$Ta^n.b^p c^q=Ta^n b^p.Ta^q-Ta^{n+q}b^p-Ta^n b^{p+q} \tag{619}$$



Vamos á poner esta fórmula simétrica múltipla en función de otras simples.

Para ello comenzaremos por averiguar el valor del primer término del segundo miembro en función de *funciones simétricas simples.*

Comparando $Ta^n b^p$ con la fórmula (615), tenemos:

$$Ta^n b^p=Ta^n.Ta^p-Ta^{n+p} \quad \text{luego:} \quad Ta^n b^p.Ta^q=(Ta^n.Ta^p-Ta^{n+p})\,Ta^q$$

Del mismo modo, comparando con la fórmula (615) el término $Ta^{n+q}b^p$, tenemos:

$$Ta^{n+q}b^p=Ta^{n+q}Ta^p-Ta^{n+q+p}$$

Análogamente:

$$Ta^n b^{p+q}=Ta^n.Ta^{p+q}-Ta^{n+q+p}$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la fórmula (619), tenemos:

$$Ta^n b^p c^q=(Ta^n.Ta^p-Ta^{n+p})\,Ta^q-(Ta^{n+q}.Ta^p-Ta^{n+p+q})-(Ta^n.Ta^{p+q}-Ta^{n+p+q})$$

que desarrollada produce:

$$\begin{aligned}Ta^n b^p c^q&=Ta^n.Ta^p.Ta^q-Ta^{n+p}.Ta^q-Ta^{n+q}.Ta^p+Ta^{n+p+q}-Ta^n.Ta^{p+q}+Ta^{n+p+q}\\ &=Ta^n.Ta^p.Ta^q-Ta^{n+p}.Ta^q-Ta^{n+q}.Ta^p-Ta^n.Ta^{p+q}+2\,Ta^{n+p+q}\end{aligned} \tag{620}$$

ó bien según la otra notación:

$$S_{n.p.q}=S_n.S_p.S_q-S_{n+p}S_q-S_{n+q}S_p-S_n.S_{p+q}+2\,S_{n+p+q} \tag{621}$$

393. Para $n=p$ tendremos por las razones antes dichas:

$$Ta^n.b^n c^q=\frac{(Ta^n)^2.Ta^q-Ta^{2n}.Ta^q-2\,Ta^{n+q}.Ta^n+2\,Ta^{2n+q}}{2} \tag{622}$$

ó bien:

$$S_{n.n.q}=\frac{(S_n)^2.S_q-S_{2n}.S_q-2\,S_{n+q}S_n+2\,S_{2n+q}}{2} \tag{623}$$

para $n=p=q$, como la expresión que forma el primer miembro se transforma en:

$$3\,Ta^n b^n c^n$$

resulta por razones análogas á las anteriores:

$$Ta^n b^n c^n=\frac{(Ta^n)^3-3\,Ta^{2n}.Ta^n+2\,Ta^{3n}}{2.3} \tag{624}$$

ó bien:

$$S_{n.n.n}=\frac{(S_n)^3-3\,S_{2n}.S_n+2\,S_{3n}}{2.3} \tag{625}$$

Tales son las fórmulas de *Waring* que hacen conocer la relación que existe entre las funciones simétricas de las raíces con índice compuesto y las funciones con índice simple (1).

394. V. Ya conociendo estos principios podemos resolver el problema citado en el párrafo (385).

Tenemos:

$$x^m+Px^{m-1}+\ldots\ldots+Tx+U=0$$

(1) *Cauchy* en sus "*Antiguos Ejercicios de Matemáticas*" ha propuesto un ingenioso método para encontrar directamente una función simétrica y entera cualquiera de las raíces de una ecuación.

Se cambia en:

$$x^m+Q'x^{m-1}+P'x^{m-2}+\ldots\ldots+T'x+U'=0$$

en la que:

$$\begin{aligned}P'&=-(a^n+b^n+c^n\ldots\ldots)=-S_n\\ Q'&=(a^nb^n+a^nc^n+\ldots\ldots)=S_{n.n}\\ R'&=-(a^nb^nc^n+a^nb^nd^n+\ldots\ldots)=-S_{n.n.n}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

luego la transformada es:

$$x^m-S_nx^{m-1}+S_{n.n}x^{m-2}-S_{n.n.n}x^{m-3}+\ldots\ldots=0 \qquad (626)$$

y habremos logrado nuestro objeto, pues conociendo los principios de las *funciones simétricas*, podremos determinar á:

$$S_n,\ S_{n.n},\ S_{n.n.n},\ \ldots\ldots$$

por medio de los coeficientes de la ecuación propuesta.

395. Ejemplo. Sea:

$$x^3-2x^2-x+2=0$$

según el párrafo (386), tenemos:

$$S_1=2,\ S_2=6,\ S_3=8,\ S_4=18,\ S_5=32,\ S_6=66$$

y según las fórmulas (618), (625), también tendremos los valores de $S_{n.n}$, $S_{n.n.n}$.

Si buscamos una transformada cuyas raíces sean los cuadrados de las de la ecuación, haremos $n=2$ y sustituyendo en (626) tendremos que buscar la transformada:

$$x^3-S_2x^2+S_{2.2}x-S_{2.2.2}=0$$

Las fórmulas (618) y (625) dan:

$$S_{2.2}=9,\ S_{2.2.2}=4$$

Sustituyendo en la transformada los valores correspondientes, resulta:

$$x^3-6x^2+9x-4=0$$

ecuación cuyas raíces son los cuadrados de las de la propuesta.

396. Vemos, pues, comprobado el notabilísimo principio del análisis: Toda función simétrica racional y entera de las raíces de una ecuación, puede valuarse sin conocer dichas raíces por medio de los coeficientes de la ecuación.

N. B. Si la función simétrica racional es fraccionaria, se reducen sus términos á un común denominador y especulado con las cantidades enteras que forman los dos términos de la fracción, según lo antes explicado, se puede valuar la fracción propuesta.

397. VI. *Dada la ecuación:* $x^m+Px^{m-1}+\ldots\ldots$ *cuyas raíces son* a, b, c, d, ......, k, *transformarla en otra cuyas raíces sean los cuadrados de las diferencias entre las raíces de la propuesta.*

Las raíces de la transformada que se denomina de *Lagrange* son:

$$(a-b)^2,\ (a-c)^2,\ (a-c)^2,\ \ldots\ldots,\ (h-k)^2.$$

y su número será igual al de las combinaciones binarias de $m$ elementos [2], es decir:

$$C_2^m=\frac{m(m-1)}{1.2}=n$$

llamando $n$ el número que resulte.

[2] Véase el Capítulo IV de las Nociones Preliminares.



La transformada será de la forma:

$$x'^n+P'x'^{n-1}+Q'x'^{n-2}+\ldots\ldots+T'x'+U'=0$$

y vamos á determinar á P′.Q′.R′...... T′.U en función de P.Q.R...... T.U coeficientes que conocemos inmediatamente al proponérsenos la ecuación.

Sea $f(x)$ la suma de las potencias pares $2r$ de las $m$ diferencias:

$$(x-a),\ (x-b),\ (x-c),\ \ldots\ldots$$

Así pues:

$$f(x)=(x-a)^{2r}+(x-b)^{2r}+(x-c)^{2r}+\ldots\ldots+(x-k)^{2r}$$

y como se tiene:

$$\left.\begin{aligned}(x-a)^{2r}&=x^{2r}-2rx^{2r-1}a+\frac{2r(2r-1)x^{2r-2}}{1.2}a^2-\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\pm\frac{2r(2r-1)(2r-2)\ldots\ldots(r+1)}{1.2.3\ldots\ldots r}x^ra^r\mp\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots+\frac{2r(2r-1)}{1.2}x^2a^{2r-2}-2rxa^{2r-1}+a^{2r}\end{aligned}\right\} \qquad (627)$$

por consiguiente, mudando $a$ en $b, c, d,$ ......, hallaríamos el valor de $(x-b)^{2r}$, $(x-c)^{2r}$, ......

Sumando estas ecuaciones y sustituyendo en el valor de $f(x)$, como son $m$ términos, obtendremos la fórmula siguiente:

$$\left.\begin{aligned}f(x)&=mx^{2r}-2rx^{2r-1}S_1+\frac{2r(2r-1)x^{2r-2}}{1.2}S_2-\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\pm\frac{2r(2r-1)\ldots\ldots(r+1)}{1.2\ldots\ldots r}x^rS_r\mp\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots+\frac{2r(2r-1)}{1.2}x^2S_{2r-2}-2rxS_{2r-1}+S_{2r}\end{aligned}\right\} \qquad (628)$$

Por otra parte, si en $f(x)=(x-a)^{2r}+(x-b)^{2r}+\ldots\ldots$ cambíamos $x$ en $a, b, c,$ ......, resulta:

$$\left.\begin{aligned}f(a)&=(a-b)^{2r}+(a-c)^{2r}+\ldots\ldots+(a-k)^{2r}\\ f(b)&=(b-a)^{2r}+(b-c)^{2r}+\ldots\ldots+(b-k)^{2r}\\ f(c)&=(c-a)^{2r}+(c-b)^{2r}+\ldots\ldots+(c-k)^{2r}\\ f(d)&=(d-a)^{2r}+(d-b)^{2r}+\ldots\ldots+(d-k)^{2r}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f(k)&=(k-a)^{2r}+(k-b)^{2r}+\ldots\ldots+(k-h)^{2r}\end{aligned}\right\} \qquad (629)$$

Sumándolas:

$$f(a)+f(b)+\ldots\ldots+f(k)=2[(a-b)^{2r}+(a-c)^{2r}+\ldots\ldots+(h-k)^{2r}]$$

pero el polinomio que está entre paréntesis es la suma de las potencias de grado $r$ de las raíces de la ecuación transformada:

$$x'^n+P'x'^{n-1}+\ldots\ldots+U'=0$$

Llamando dicha suma $\Sigma_r$ y despejándola:

$$\Sigma_r=\tfrac{1}{2}[f(a)+f(b)+\ldots\ldots+f(k)] \qquad (630)$$

Haciendo en (628):

$$x=a, \ =b, \ =c, \ \ldots\ldots, \ =k$$

tendremos:

$$f(a)=ma^{2r}-2ra^{2r-1}S_1+\ldots\ldots$$
$$f(b)=mb^{2r}-2rb^{2r-1}S_1+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(k)=mk^{2r}-2rk^{2r-1}S_1+\ldots\ldots$$

Sumando estas ecuaciones y sustituyendo su suma en (630), resulta:

$$\Sigma_r=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} mS_{2r}-2rS_{2r-1}S_1+\dfrac{2r(2r-1)}{1.2}S_{2r-2}S_2-\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\pm\dfrac{2r(2r-1)\ldots..(r+1)}{1.2.3\ldots\ldots r}(S_r)^2\mp\ldots\ldots \\ \ldots\ldots+\dfrac{2r(2r-1)}{1.2}S_2S_{2r-2}-2rS_1S_{2r-1}+mS_{2r} \end{array}\right\} \qquad (631)$$

que puede escribirse así:

$$\Sigma_r=mS_{2r}-2rS_{2r-1}S_1+\frac{2r(2r-1)}{1.2}S_{2r-2}S_2-\ldots\ldots\pm\frac{2r(2r-1)\ldots\ldots(r+1)}{1.2\ldots\ldots r}\cdot\frac{(S_r)^2}{2}$$
$$=mS_{2r}-\tbinom{2r}{1}S_{2r-1}S_1+\tbinom{2r}{2}S_{2r-2}S_2-\ldots\ldots\pm\tfrac{1}{2}\tbinom{2r}{r}S_rS_r \qquad (632)$$

Esta fórmula ([1]) hace conocer los coeficientes de la transformada, porque haciendo $r=1, =2, =3, \ldots\ldots$, se conocen:

$$\Sigma_1, \ \Sigma_2, \ \Sigma_3, \ \ldots\ldots$$

determinados por:

$$S_1, \ S_2, \ S_3, \ S_4, \ \ldots\ldots$$

que á su vez lo son por:

$$P, \ Q, \ R, \ S, \ \ldots\ldots$$

coeficientes de la propuesta.

Conocidas las sumas: $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots\ldots$ de las potencias semejantes de las raíces de la transformada, las ecuaciones: (609), (610), (611), (612) y (613) harán conocer á $P', Q', R', \ldots\ldots$ y finalmente se habrá determinado la ecuación transformada cuyas raíces son los cuadrados de las diferencias entre las raíces de la propuesta, transformada que se conoce sencillamente por el nombre característico de: *ecuación de los cuadrados de las diferencias.*

N. B.—Es claro que si se aumenta ó disminuye una cantidad á todas las raíces de la propuesta, no cambian sus diferencias y resultará la misma transformada.

([1]) Como hay dos términos iguales á $mS_{2r}$ se tendrá:

$$2.mS_{2r}\times\tfrac{1}{2}=mS_{2r}$$

Análogamente se obtiene:

$$2rS_{2r-1}S_1, \text{ etc.}$$

Al haber un término de la forma:

$$\frac{2r(2r-1)\ldots\ldots(r+1)}{1.2\ldots\ldots r}(S_r)^2$$

multiplicado por $\frac{1}{2}$ resulta:

$$\frac{2(2r-1)\ldots\ldots(r+1)}{1.2\ldots\ldots r}\cdot\frac{(S_r)^2}{2}, \text{ etc.}$$

Finalmente:

$$\binom{2r}{1}, \ \binom{2r}{2}, \ldots\ldots, \binom{2r}{r}$$

son los números de combinaciones de $2r$ cantidades 1 á 1, 2 á 2, ......, $r$ á $r$.
Basta fijarse en que los términos equidistantes de los extremos ó del medio son iguales.



Como para quitarle á la ecuación su segundo término se aumenta ó disminuye una cantidad (párrafo 378) á todas las raíces, se deduce que sin que cambie la transformada, se puede privar á la propuesta del segundo término, lo que simplificará los cálculos que determinan á $P', Q', R', \ldots\ldots$ coeficientes de la transformada.

398. Ejemplo. Sea:

$$x^3+Bx+C=0 \qquad (a)$$

y vamos á encontrar la *ecuación de los cuadrados de las diferencias* de sus raíces.

Si $a$, $b$, $c$ representan sus raíces, evidentemente las de la transformada serán:

$$(a-b)^2, \ (a-c)^2, \ (b-c)^2$$

de suerte que esta ecuación será también de tercer grado, lo que se comprueba por la fórmula:

$$C_2^m=\frac{m(m-1)}{1.2}=3$$

Así pues, la transformada que se busca tiene la forma:

$$x'^3+P'x'^2+Q'x'+R'=0 \qquad (b)$$

Para proceder al cálculo de los coeficientes $P', Q', R'$ en función de B, C nos fijaremos en que de la fórmula (609) del párrafo 386 deducimos las condiciones siguientes:

$$\Sigma_1+P'=0, \quad \Sigma_2+P'\Sigma_1+2Q'=0, \quad \Sigma_3+P'\Sigma_2+Q'\Sigma_1+3R'=0, \text{ etc.} \qquad (c)$$

busquemos á $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots\ldots$, sumas de las primeras, segundas, terceras, ......, potencias de las raíces de la ecuación transformada (b).

En la expresión general (632) hagamos:

$$r=1, \ =2, \ =3$$

y resultará:

$$\Sigma_1=3S_2-\frac{2(S_1)^2}{2}=3S_2-(S_1)^2$$
$$\Sigma_2=3S_4-4S_3S_1+\frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{(S_2)^2}{2}=3S_4-4S_3S_1+3(S_2)^2$$
$$\Sigma_3=3S_6-6S_5S_1+15S_4S_2-10(S_3)^2$$

Necesitamos, pues, determinar á:

$$S_1, \ S_2, \ S_3, \ S_4, \ S_5, \ S_6$$

sumas de las potencias semejantes de las raíces de la propuesta.

Para ello, fundados en las fórmulas (609, etc.) de la ecuación propuesta:

$$x^3+Bx+C=0$$

se deduce:

$$S_1=0 \ \text{ puesto que } \ P=0, \ S_2+2B=0, \ S_3+3C=0, \ S_4+BS_2=0,$$
$$S_5+BS_3+CS_2=0, \ S_6+BS_4+CS_3=0$$

es decir:

$$\left.\begin{array}{l} S_1=\underline{0}, \ S_2=-\underline{2B}, \ S_3=-\underline{3C}, \ S_4=-BS_2=+\underline{2B^2} \\ S_5=-BS_3-CS_2=\underline{5BC}, \ S_6=-\underline{2B^3+3C^2} \end{array}\right\} \qquad (d)$$

Sustituyendo en $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma_1 = -\underline{6\,B},\ \Sigma_2 = 6\,B^2 + 12\,B^2 = \underline{18\,B^2}, \\ \Sigma_3 = -6\,B^3 + 9\,C^2 - 60\,B^3 - 90\,C^2 = -\underline{66\,B^3 - 81\,C^2} \end{array}\right\} \qquad (e)$$

Sustituyendo estos valores en (c) obtendremos:

$$-6\,B + P' = 0$$
$$18\,B^2 - 6\,P'B + 2\,Q' = 0$$
$$-66\,B^3 - 81\,C^2 + 18\,P'B^2 - 6\,Q'B + 3\,R' = 0$$

que producen:

$$P' = 6\,B$$
$$Q' = -9\,B^2 + 18\,B^2 = 9\,B^2$$
$$R' = 22\,B^3 + 27\,C^2 - 36\,B^3 + 18\,B^3 = 4\,B^3 + 27\,C^2$$

y el problema está completamente resuelto.

Así pues, poniendo en la ecuación de la transformada los valores de los coeficientes P′, Q′, R′, resulta:

$$x^3 + 6\,Bx^2 + 9\,B^2x + (4\,B^3 + 27\,C^2) = 0$$

forma general de la *ecuación de los cuadrados de las diferencias* de una ecuación de tercer grado sin segundo término, de la forma general:

$$x^3 + Bx + C = 0$$

Considerando la ecuación particular:

$$x^3 - 9\,x + 10 = 0$$

Como:

$$B = -9,\quad C = 10$$

su transformada será:

$$x^3 - 54\,x^2 + 729\,x - 216 = 0$$

Este problema se resuelve también por las teorías de la eliminación que explicaremos adelante.

---

# CAPÍTULO III.

**Teoría de las raíces iguales.— Ecuaciones susceptibles de resolverse por otras de menor grado ó susceptibles de *rebajamiento*.— Aplicaciones.— Método de *Ostrogradski*.**

399. Se sabe que una ecuación del grado $m$ puede ponerse siempre bajo la forma:

$$X = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-k)$$

siendo el número de factores binomios igual al grado de la ecuación (párrafo 354).

Si son iguales entre sí algunos de estos factores lineales, se dice que la ecuación tiene *raíces iguales*. En este caso la ecuación propuesta puede descomponerse en otras de menor grado, más fáciles de resolver que la propuesta.

Cuando una ecuación admite $p$ raíces iguales á $a$, es divisible entre el binomio:

$$(x-a)^p$$

Tenemos, pues, que tocar dos puntos capitales:

1º Cómo se conoce que una ecuación tiene raíces iguales.

2º Cómo se determinan estas raíces cuando las hay, con el objeto de excluirlas de la ecuación.

1º Para conocer si una ecuación tiene raíces iguales, consideremos la ecuación:

$$X = x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots\ldots + Tx + U = 0$$

y supongamos que $a$ es una raíz de esta ecuación.

Dividiendo dicha ecuación entre $x-a$, se obtiene un cociente (párrafo 353) que es:

$$x^{m-1} + (a+P)\,x^{m-2} + (a^2 + aP + Q)\,x^{m-3} + \ldots\ldots + (a^{m-1} + Pa^{m-2} + \ldots\ldots + T) = 0 \quad (633)$$

Si $a$ es raíz doble, X será divisible por $(x-a)^2$, ó bien el anterior cociente será divisible entre $x-a$, y si suponemos $x=a$, debe nulificarse.

Suponiendo en (633) $x=a$, resulta después de reducir:

$$ma^{m-1} + (m-1)\,Pa^{m-2} + (m-2)\,Pa^{m-3} + \ldots\ldots + T = 0$$