Sustituyendo en Σ_1, Σ_2, Σ_3, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma_1 = -\underline{6\,B},\ \ \Sigma_2 = 6\,B^2 + 12\,B^2 = \underline{18\,B^2}, \\ \Sigma_3 = -6\,B^3 + 9\,C^2 - 60\,B^3 - 90\,C^2 = -\underline{66\,B^3 - 81\,C^2} \end{array}\right\} \quad (e)$$

Sustituyendo estos valores en (c) obtendremos:

$$-6\,B + P' = 0$$
$$18\,B^2 - 6\,P'B + 2\,Q' = 0$$
$$-66\,B^3 - 81\,C^2 + 18\,P'B^2 - 6\,Q'B + 3\,R' = 0$$

que producen:

$$P' = 6\,B$$
$$Q' = -9\,B^2 + 18\,B^2 = 9\,B^2$$
$$R' = 22\,B^3 + 27\,C^2 - 36\,B^3 + 18\,B^3 = 4\,B^3 + 27\,C^2$$

y el problema está completamente resuelto.

Así pues, poniendo en la ecuación de la transformada los valores de los coeficientes P', Q', R', resulta:

$$x^3 + 6\,Bx^2 + 9\,B^2x + (4\,B^3 + 27\,C^2) = 0$$

forma general de la *ecuación de los cuadrados de las diferencias* de una ecuación de tercer grado sin segundo término, de la forma general:

$$x^3 + Bx + C = 0$$

Considerando la ecuación particular:

$$x^3 - 9\,x + 10 = 0$$

Como:

$$B = -9,\ \ C = 10$$

su transformada será:

$$x^3 - 54\,x^2 + 729\,x - 216 = 0$$

Este problema se resuelve también por las teorías de la eliminación que explicaremos adelante.

CAPÍTULO III.

Teoría de las raíces iguales.—Ecuaciones susceptibles de resolverse por otras de menor grado ó susceptibles de *rebajamiento*.—Aplicaciones.—Método de *Ostrogradski*.

399. Se sabe que una ecuación del grado m puede ponerse siempre bajo la forma:

$$X = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-k)$$

siendo el número de factores binomios igual al grado de la ecuación (párrafo 354).

Si son iguales entre sí algunos de estos factores lineales, se dice que la ecuación tiene *raíces iguales*. En este caso la ecuación propuesta puede descomponerse en otras de menor grado, más fáciles de resolver que la propuesta.

Cuando una ecuación admite p raíces iguales á a, es divisible entre el binomio:

$$(x-a)^p$$

Tenemos, pues, que tocar dos puntos capitales:

1º Cómo se conoce que una ecuación tiene raíces iguales.

2º Cómo se determinan estas raíces cuando las hay, con el objeto de excluirlas de la ecuación.

1º Para conocer si una ecuación tiene raíces iguales, consideremos la ecuación:

$$X = x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots\ldots + Tx + U = 0$$

y supongamos que a es una raíz de esta ecuación.

Dividiendo dicha ecuación entre $x-a$, se obtiene un cociente (párrafo 353) que es:

$$x^{m-1} + (a+P)\,x^{m-2} + (a^2 + aP + Q)\,x^{m-3} + \ldots\ldots + (a^{m-1} + Pa^{m-2} + \ldots\ldots + T) = 0 \quad (633)$$

Si a es raíz doble, X será divisible por $(x-a)^2$, ó bien el anterior cociente será divisible entre $x-a$, y si suponemos $x=a$, debe nulificarse.

Suponiendo en (633) $x=a$, resulta después de reducir:

$$m\,a^{m-1} + (m-1)\,Pa^{m-2} + (m-2)\,Pa^{m-3} + \ldots\ldots + T = 0$$

Resultado igual al que se obtendría sustituyendo a por x en el polinomio derivado de $X=0$; por consiguiente, si a es raíz doble de $X=0$, esta ecuación y su primera derivada admiten un divisor común $x-a$.

2º Para conocer en general el número de raíces iguales que tiene la ecuación $X=0$, vamos á comparar el desarrollo de $f(x+h)$ dado por la fórmula de Taylor (Capítulo VII de la Primera Parte) con el desarrollo de la misma función deducido de la composición de las ecuaciones.

El valor de $f(x+h)$ es según la fórmula de Taylor:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\,h+f''(x)\,\frac{h^2}{1.2}+\ldots\ldots+f^n(x)\,\frac{h^n}{1.2.3\ldots\ldots n}+\ldots\ldots \qquad (634)$$

Por otra parte:

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-k)(x-l)$$

de consiguiente:

$$f(x+h)=(h+x-a)(h+x-b)(h+x-c)\ldots\ldots(h+x-k)(h+x-l)$$

Vemos bajo esta forma que $f(x+h)$ es el producto de m binomios cuyo primer término común es h y cuyos segundos términos son los factores lineales de $f(x)$.

Según las reglas relativas á la composición de las ecuaciones, se tiene (Capítulo I, Segunda Parte):

$$\left.\begin{array}{c} f(x+h)=h^m+h^{m-1}\Sigma(x-a)+h^{m-2}\Sigma(x-a)(x-b) \\ +h^{m-3}\Sigma(x-a)(x-b)(x-c)+\ldots\ldots+h\Sigma(x-a)(x-b)\ldots\ldots(x-k) \\ +(x-a)(x-b)\ldots\ldots(x-k)(x-l) \end{array}\right\} \qquad (635)$$

Comparando esta ecuación con la fórmula de Taylor, encontramos que los coeficientes de las mismas potencias de h deben ser iguales; luego:

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-l)$$
$$f'(x)=\Sigma(x-a)(x-b)(x-d)\ldots\ldots(x-k)$$

pero como cada uno de los términos del segundo miembro de esta última ecuación está constituído por $m-1$ de los m factores lineales de $f(x)$, resulta:

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-a}+\frac{f(x)}{x-b}+\frac{f(x)}{x-c}+\ldots\ldots+\frac{f(x)}{x-l} \qquad (636)$$

en número de m términos.

La expresión (636) puede escribirse:

$$f'(x)=\Sigma\,\frac{f(x)}{x-a}\ (^1) \qquad (637)$$

Admitido esto, supongamos que $X=0$ tenga n raíces iguales á a, n' iguales á b, n'' iguales á c, etc., y además las raíces desiguales $d, e, f, \ldots\ldots$

(1) Esta fórmula la demostramos al tratar de las funciones simétricas (párrafo 386), pero teniendo en cuenta que el estudio de estas funciones se suprime en los actuales programas de enseñanza, hemos tenido que repetir el razonamiento.

La forma de X será:

$$X=(x-a)^n(x-b)^{n'}(x-c)^{n''}\ldots\ldots(x-d)(x-e)\ldots\ldots \qquad (638)$$

El polinomio derivado de X es según la fórmula (637):

$$\left.\begin{array}{l} f'(X)=\dfrac{X}{x-a}+\dfrac{X}{x-a}+\dfrac{X}{x-a}+\ldots\ldots \\ \ldots\ldots+\dfrac{X}{x-b}+\dfrac{X}{x-b}+\dfrac{X}{x-b}+\ldots\ldots \\ \ldots\ldots+\dfrac{X}{x-c}+\dfrac{X}{x-c}+\dfrac{X}{x-c}+\ldots\ldots \\ \ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots+\dfrac{X}{x-d}+\dfrac{X}{x-e}+\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (639)$$

ó bien:

$$f'(x)=n\,\frac{X}{x-a}+n'\,\frac{X}{x-b}+n''\,\frac{X}{x-c}+\ldots\ldots+\frac{X}{x-d}+\frac{X}{x-e}+\ldots\ldots \qquad (640)$$

por último:

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=n(x-a)^{n-1}(x-b)^{n'}(x-c)^{n''}\ldots\ldots(x-d)(x-e)\ldots\ldots \\ \ldots\ldots+n'(x-b)^{n'-1}(x-a)^n(x-c)^{n''}\ldots\ldots(x-d)(x-e)\ldots\ldots \\ \ldots\ldots+n''(x-c)^{n''-1}(x-a)^n(x-b)^{n'}\ldots\ldots(x-d)(x-e)\ldots\ldots+\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (641)$$

Sacando como factor común á:

$$(x-a)^{n-1}(x-b)^{n'-1}(x-c)^{n''-1}$$

resulta:

$$\begin{array}{c} f'(x)=(x-a)^{n-1}(x-b)^{n'-1} \\ (x-c)^{n''-1}\ldots\ldots \end{array}\left\{\begin{array}{l} n(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-d)(x-e)\ldots\ldots \\ \ldots\ldots+n'(x-a)(x-c)(x-d)\ldots\ldots \\ \ldots\ldots+n''(x-a)(x-b)(x-d)\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (641')$$

Llamando H el factor encerrado en el paréntesis:

$$f'(x)=(x-a)^{n-1}(x-b)^{n'-1}(x-c)^{n''-1}\ldots\ldots H \qquad (642)$$

Comparando $f(x)$ con su derivada (642), vemos que el factor:

$$D=(x-a)^{n-1}(x-b)^{n'-1}(x-c)^{n''-1}\ldots\ldots$$

es divisor común de ambas ecuaciones y no sólo es divisor común sino que es el *M. C. D.*

Luego: *para que una ecuación tenga raíces iguales es necesario y suficiente que ella y su polinomio derivado tengan un factor común. Si pues se busca el M. C. D., el número de raíces iguales se conoce por el exponente de cada factor lineal en este M. C. D. aumentado una unidad.*

En el caso general que examinamos, los exponentes de los factores:

$$x-a,\ x-b,\ x-c,\ \ldots\ldots \quad \text{son} \quad n-1,\ n'-1,\ n''-1,\ \ldots\ldots$$

luego: hay n raíces iguales con a, n' raíces iguales con b, n'' iguales con c, etc.

EJEMPLOS.

400. I. Sea

$$2x^4-12x^3+19x^2-6x+9=0$$

Su derivada es:

$$8x^3-36x^2+38x-6$$

y buscando el M. C. D. entre ellos, resulta:

$$D=x-3 \quad \text{es decir:} \quad x=3$$

luego la ecuación admite dos raíces iguales á 3.

Dividiéndola entre $(x-3)^2$ se excluyen las raíces iguales obteniéndose un cociente:

$$2x^2+1=0 \quad \text{que da:} \quad x=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-2}$$

Así pues, las cuatro raíces de la propuesta son:

$$3,\ 3,\ \tfrac{1}{2}\sqrt{-2} \quad \text{y} \quad -\tfrac{1}{2}\sqrt{-2}$$

II. Sea:

$$x^5-2x^4+3x^3-7x^2+8x-3=0$$

Derivada:

$$5x^4-8x^3+9x^2-14x+8$$

M. C. D.:

$$D=x^2-2x+1=(x-1)^2$$

La propuesta tiene, pues, *tres* raíces iguales á 1.

Dividiéndola entre $(x-1)^3$ resulta de cociente:

$$x^2+x+3=0 \quad \text{cuyas raíces son:} \quad -\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-11}$$

luego las cinco raíces de la propuesta son:

$$1,\ 1,\ 1,\ -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-11},\ -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-11} \ (^1)$$

III. Sea:

$$x^7+5x^6+6x^5-6x^4-15x^3-3x^2+8x+4=0 \qquad (a)$$

Derivada:

$$7x^6+30x^5+30x^4-24x^3-45x^2-6x+8 \qquad (b)$$

M. C. D.:

$$D=x^4+3x^3+x^2-3x-2 \qquad (c)$$

Como esta ecuación es algo complicada se le aplica á su vez el método, lo que da:

Ecuación:

$$x^4+3x^3+x^2-3x-2 \qquad (c)$$

Derivada:

$$4x^3+9x^2+2x-3 \qquad (d)$$

M. C. D.:

$$x+1 \qquad (e)$$

(1) Es conveniente que el alumno rectifique en cada caso las proposiciones ya demostradas; en el presente debe recordar lo dicho en los párrafos 365 y 366.

Luego $x+1$ entra elevado al cuadrado en la ecuación (c) y al cubo en la propuesta.

Dividiendo la ecuación (c) entre $(x+1)^2$, da un cociente:

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2) \quad \text{luego:} \quad x^4+3x^3+x^2-3x-2=(x+1)^2(x-1)(x+2)$$

y la propuesta es de la forma:

$$(x+1)^3(x-1)^2(x+2)^2$$

IV. Sea

$$x^3-x^2-5x-3=0$$

Derivada:

$$3x^2-2x-5$$

M. C. D.:

$$x+1$$

luego $x+1$ entra al cuadrado en la ecuación; dividiéndola entre $(x+1)^2$ se tiene el cociente $x-3$; luego la ecuación es de la forma: $(x+1)^2(x-3)$ y tiene por raíces:

$$-1,\ -1,\ +3$$

401. N. B. Dividiendo la ecuación $f(x)$ entre el producto de los binomios que forman las raíces iguales, vemos que se pueden conocer inmediamente las desiguales; siempre que el polinomio del que depende en rigor su determinación no sea de orden elevado, teniendo en cuenta los conocimientos hasta ahora adquiridos.

402. Podemos, pues, sentar la regla:

Para conocer si una ecuación $f(x)=0$ *admite raíces iguales, fórmese su derivada* $f'(x)$, *búsquese el* M. C. D. *que llamaremos* D *entre* $f(x)$ *y* $f'(x)$, *si se encuentra, la ecuación admite raíces iguales.*

Se resolverá la ecuación $D=0$ *teniendo en cuenta que cada raíz de ella es raíz de un orden una unidad mayor en la propuesta.*

Finalmente, dividiendo la ecuación propuesta entre el producto de los binomios correspondientes á sus raíces iguales se obtendrá un polinomio cociente cuyas raíces serán las desiguales de la propuesta.

Ahora bien, cuando se conoce ya una raíz a de una ecuación puede averiguarse su grado de multiplicidad, entre otros, por dos procedimientos que pasamos á explicar en el párrafo siguiente.

403. **Primer procedimiento.** Apoyándonos en el teorema en que se ha basado el método para hallar las raíces iguales, podemos descubrir si una raíz conocida a de una ecuación $\varphi(x)=0$ es raíz múltiple de ella y de qué grado de multiplicidad, razonando como sigue y resolviendo la cuestión de un modo expedito.

Si la ecuación tiene n raíces iguales con a, el factor $(x-a)$ entrará elevado á las potencias: $(n-1)^{\text{esima}}, (n-2)^{\text{ésima}}, (n-3)^{\text{ésima}}, \ldots\ldots, 3, 2, 1, 0$ en las derivadas respectivas:

$$\varphi'(x),\ \varphi''(x),\ \ldots\ldots,\ \varphi^{n-3}(x),\ \varphi^{n-2}(x),\ \varphi^{n-1}(x),\ \varphi^{n}(x)$$

puesto que en la función $\varphi(x)$ entra elevado á la potencia n.

De consiguiente como todas ellas menos $\varphi^{n}(x)$ contienen á $(x-a)$ elevado á potencias que van gradualmente disminuyendo de una derivada á la siguiente; al suponer $x=a$, todas las derivadas menos $\varphi^{n}(x)$ quedarán nulificadas.

Luego: para hallar el grado de multiplicidad de la raíz a se formarán las derivadas sucesivas de $\varphi(x)=0$ y el índice de la primera derivada que no queda anulado haciendo $x=a$ será el exponente del grado de multiplicidad de dicha raíz.

Sea, por ejemplo, la ecuación:

$$\varphi(x)=x^5-6x^4+11x^3-2x^2-12x+8=0$$

y se pregunta ¿cuántas raíces iguales con 2 tiene?

Se tendrá:

$$\varphi'(x)=5x^4-24x^3+33x^2-4x-12 \qquad x=2 \text{ da } \varphi'(2)=0$$

$$\frac{\varphi''(x)}{1.2}=10x^3-36x^2+33x-2 \qquad x=2 \text{ da } \frac{\varphi''(2)}{1.2}=0$$

$$\frac{\varphi'''(x)}{1.2.3}=10x^2-24x+11 \qquad x=2 \text{ da } \frac{\varphi'''(2)}{1.2.3}=3$$

Hay, pues, tres raíces iguales á 2 en la ecuación propuesta y se tendrá:

$$\varphi(x)=x^5-6x^4+11x^3-2x^2-12x+8=(x-2)^3 f(x)$$

siendo $f(x)$ polinomio que contiene las otras dos raíces. El cociente de:

$$\varphi(x)\div(x-2)^3=f(x)=x^2-1$$

sus raíces son: $x=+1$, $x=-1$.

Finalmente, las cinco raíces de la ecuación son: 2, 2, 2, 1, -1.

404. **Segundo procedimiento.** Este segundo procedimiento da lugar á operaciones bastante sencillas. Sea $\varphi(x)=0$ la ecuación propuesta y a la raíz conocida; si dividimos $\varphi(x)$ entre $x-a$, la resta debe ser nula y el cociente que lo llamaremos $\varphi_1(x)$ será de un grado una unidad menor que el de $\varphi(x)$.

Dividiremos nuevamente $\varphi_1(x)$ entre $x-a$; si la resta no es nula, esto nos indica que a es raíz simple de $\varphi(x)$; si la resta es nula, deduciremos que a es raíz *simple* de $\varphi_1(x)$ y raíz *doble* de $\varphi(x)$.

Operando análogamente podremos conocer el grado de multiplicidad dividiendo entre $x-a$ los sucesivos cocientes que se vayan obteniendo; el número de divisiones expresa el grado de multiplicidad.

Sea por ejemplo:

$$\varphi(x)=x^5-6x^4+11x^3-2x^2-12x+8$$

y supongamos que se sabe que 2 es raíz y quiere averiguarse cuál es su grado de multiplicidad.

Dispondremos la operación como sigue:

$$\begin{array}{r|l}
 & x^5-6x^4+11x^3-2x^2-12x+8 \\
 & x^4-4x^3+3x^2+4x-4 \quad +\underline{0} \\
2 & x^3-2x^2-x+2 \quad +\underline{0} \\
 & x^2+0x-1 \quad +\underline{0} \\
 & x+2 \quad +\underline{3}
\end{array}$$

Como se ve se han dividido la ecuación y los cocientes sucesivos entre el binomio $x-2$ de acuerdo con el párrafo 361 y como sólo tres divisiones son exactas, la raíz 2 entra tres veces en el polinomio y puede escribirse:

$$x^5-6x^4+11x^3-2x^2-12x+8=(x-2)^3\psi(x)$$

llamando $\psi(x)$ el cociente del polinomio dado entre $(x-2)^3$; este cociente es justamente el x^2-1 que se origina al efectuar la tercera división; luego determinando sus raíces que son $+1$ y -1, los cinco de la propuesta serán como vimos por el primer procedimiento: 1, -1, 2, 2, 2.

405. En el procedimiento indicado en el párrafo 399 se supone que el *M. C. D.* D está descompuesto en factores lineales, pero en la práctica (como hemos visto) se encuentra casi siempre el M. C. D. bajo la forma de una ecuación cuyo grado varía con el de la ecuación primitiva y para descomponer á la ecuación en sus factores lineales conviene seguir el procedimiento siguiente:

Sea $X=0$ la ecuación propuesta; supongamos que el producto de las raíces simples lo designamos por X_1, el de las dobles por X_2, el de las triples por X_3, etc.

El polinomio X será de la forma:

$$X=X_1.X_2^2.X_3^3.X_4^4\ldots\ldots$$

El M. C. D. será:

$$D=X_2.X_3^2.X_4^3\ldots\ldots$$

puesto que los factores iguales deben entrar en D elevados á una potencia una unidad menor que en $X=0$.

Se determina el *M. C. D.* D′ entre D y su derivada y se tiene:

$$D'=X_3.X_4^2.X_5^3\ldots\ldots$$

Por último:

$$D''=X_4.X_5^2\ldots\ldots$$

Dividiendo X por el *M. C. D.* D, se tiene:

$$\frac{X}{D}=X_1.X_2.X_3.X_4.X_5\ldots\ldots \qquad \text{(a)}$$

expresión que sólo contiene las raíces simples de $X=0$.

Dividiendo D entre D′, resulta:

$$\frac{D}{D'}=X_2.X_3.X_4.X_5\ldots\ldots \qquad \text{(b)}$$

expresión que carece de X_1.

Dividiendo (a) $\div$ (b) resulta:

$$\frac{XD'}{D^2}=X_1$$

que da el valor de la raíz X_1.

Dividiendo D′ $\div$ D″, se tiene:

$$\frac{D'}{D''}=X_3.X_4.X_5\ldots\ldots \qquad \text{(c)}$$

expresión que carece de X_1 y X_2.

Dividiendo (b) $\div$ (c) resulta:

$$\frac{D.D''}{D'^2}=X_2$$

expresión que da á conocer á X_2, etc.

Análogamente se conocerán X_3, X_4, X_5, ...