El cuadro siguiente resume las operaciones:

$$\begin{array}{l|l|l}
X=X_1.X_2^2.X_3^3.X_4^4.X_5^5\ldots\ldots & \dfrac{X}{D}=X_1.X_2.X_3.X_4.X_5\ldots\ldots & \dfrac{XD'}{D^2}=X_1 \\
D=X_2.X_3^2.X_4^3.X_5^4\ldots\ldots & \dfrac{D}{D'}=X_2.X_3.X_4.X_5\ldots\ldots & \dfrac{D.D''}{D'^2}=X_2 \\
D'=X_3.X_4^2.X_5^3\ldots\ldots & \dfrac{D'}{D''}=X_3.X_4.X_5\ldots\ldots & \text{etc.} \\
D''=X_4.X_5^2\ldots\ldots & \text{etc.} & \\
D'''=X_5\ldots\ldots & &
\end{array} \qquad (643)$$

Vemos, pues, que la resolución de $X=0$ estriba en la resolución de las ecuaciones de menor grado:

$$X_1=0,\ X_2=0,\ X_3=0,\ \ldots\ldots$$

que contienen las raíces de cada orden de multiplicidad, pero tomadas una sola vez.

Si una de estas cantidades es numérica, evidentemente la ecuación $X=0$ carecerá de las raíces cuyo grado de multiplicidad expresa dicha cantidad numérica.

Las ecuaciones cuya resolución se obtiene como en este caso por medio de otras de menor grado, es decir, *rebajando* el grado de la ecuación, se llaman ecuaciones susceptibles de *rebajamiento*.

EJEMPLOS.

406. I. Sea

$$X=x^4-4x^3+16x-16=0$$

según el párrafo 405 tendremos:

Derivada de X:

$$Y=4x^3-12x^2+16$$

M. C. D. entre X é Y:

$$D=x^2-4x+4$$

Derivada de D:

$$2x-4=2(x-2),\ \text{etc.}$$

Formaremos, pues, el cuadro:

$$\begin{array}{l|l|l}
X=x^4-4x^3+16x-16 & \dfrac{X}{D}=x^2-4 & \dfrac{XD'}{D^2}=x+2=X_1 \\
D=x^2-4x+4 & \dfrac{D}{D'}=x-2 & \dfrac{D.D''}{D'^2}=1=X^2 \\
D'=x-2 & \dfrac{D'}{D''}=x-2 & \dfrac{D'.D'''}{D''^2}=x-2=X_3 \\
D''=1 & &
\end{array}$$

Así pues, atendiendo al párrafo (405):

$$X=X_1X_2^2X_3^3=(x+2)(x-2)^3$$

Obtenida la raíz 2, podíamos aplicar lo expuesto en el párrafo (404) dividiendo el polinomio entre el correspondiente binomio y obtendríamos, aplicando las reglas ya co-

nocidas (párrafo 404) y repitiendo tres veces la operación, que el resultado era $x+2$ que es el otro binomio de la ecuación; el cuadro de la operación sería:

$$\begin{array}{r|l}
 & x^4-4x^3+16x-16 \\
 & x^3-2x^2-4x+8+\underline{0} \\
2 & x^2+0x-4+\underline{0} \\
 & x+2+\underline{0}
\end{array}$$

el cociente y la resta de la tercera operación son $x+2$ y 0; luego el cuarto binomio es $x+2$.

II. Sea

$$X=x^7-x^6-4x^5+4x^4+5x^3-5x^2-2x+2$$
$$Y=7x^6-6x^5-20x^4+16x^3+15x^2-10x-2$$
$$D=x^3-x^2-x+1$$

Derivada de D:

$$3x^2-2x-1$$
$$D'=x-1$$

Derivada de D′: 1.

Así pues:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{X}{D}=x^4-3x^2+2 \\
\dfrac{D}{D'}=x^2-1 \\
\dfrac{D'}{D''}=x-1
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
X_1=x^2-2 \\
X_2=x+1 \\
X_3=x-1
\end{array}$$

Así pues:

$$X=(x^2-2)(x+1)^2(x-1)^3$$

y las siete raíces son:

$$+\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ -1,\ -1,\ +1,\ +1,\ +1$$

407. Cuando se da de antemano cierta relación entre las raíces de una ecuación, puede *rebajarse* su grado.

Para fijar las ideas, sea la ecuación propuesta:

$$x^m+Px^{m-1}+\ldots\ldots+Tx+U=0$$

Llamemos a y b dos de sus raíces y supongamos que la relación que las liga es:

$$b=ak+h$$

siendo k y h números conocidos *a priori*.

Puesto que (579) se ha de verificar con a y con $b=ak+h$, sustituyendo en lugar de x, $kx+h$, tendremos:

$$(kx+h)^m+P(kx+h)^{m-1}+\ldots\ldots+U=0 \qquad (644)$$

Las ecuaciones (579) y (644) deben ser satisfechas por un mismo valor de a y debe existir, de consiguiente, un M. C. D. entre ambas.

Aplicando, pues, el método para determinar este M. C. D. relativo é igualando á 0 el divisor obtenido, se tendrá el valor de a, que sustituído en $ka+h$, produce el de b.

Si el M. C. D. obtenido es de primer grado en x, se deduce que sólo dos raíces de la ecuación guardan la relación dada; si el M. C. D. es de segundo grado, hay dos pares de valores que gozan de esta propiedad, etc.; podremos entonces dividir el primer miembro de la ecuación propuesta por el producto de los binomios correspondientes á las raíces conocidas; la resolución de la ecuación-cociente que se obtenga hará conocer las demás raíces.

EJEMPLOS.

408. I. Sea la ecuación:

$$x^4-12x^3+48x^2-71x+30=0$$

suponiendo que:

$$b=2a+1$$

Sustituyendo en la ecuación $2x+1$ en lugar de x, se tiene:

$$8x^4-32x^3+36x^2-7x-2=0$$

Aplicando el método del M. C. D. resulta:

$$D=x-2 \text{ es decir: } x=2 \text{ ó bien: } a=2,\ b=5$$

La ecuación propuesta será divisible por: $(x-2)(x-5)=x^2-7x+10$ y efectuando la división resulta:

$$x^2-5x+3=0$$

cuyas raíces son:

$$x=\tfrac{5}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{13},\quad x=\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{13}$$

las cuatro raíces de la propuesta son de consiguiente:

$$5,\ 2,\ \tfrac{5}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ \tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

II. Resolver la ecuación:

$$x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$$

sabiendo que dos de sus raíces suman 5.

Con esta condición puede facilicitarse la resolución; pues se tendrá designando las dos raíces por x y x':

$$x+x'=5 \tag{a}$$

y si llamamos z su diferencia:

$$x-x'=z \tag{b}$$

las condiciones (a) y (b) producen si x es la cantidad mayor:

$$x=\tfrac{5}{2}+\tfrac{z}{2}$$

sustituyendo en la propuesta, desarrollando y ordenando, resulta:

$$z^4-10z^2+9=0$$

Y como es una ecuación bicuadrada produce:

$$z=\pm\sqrt{5\pm\sqrt{16}}$$

es decir:

$$z'=+3,\quad z''=+1,\quad z'''=-3,\quad z^{\text{IV}}=-1$$

Así pues:

$$x=\tfrac{5}{2}+\tfrac{3}{2}=4,\quad x'=\tfrac{5}{2}+\tfrac{1}{2}=3,\quad x''=\tfrac{5}{2}-\tfrac{3}{2}=1,\quad x'''=\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{2}=2$$

que son las cuatro raíces; en efecto:

$$3+2=5,\quad 4+1=5$$

409. Puede aplicarse el método de las raíces iguales para determinar la relación que debe existir entre los coeficientes de un polinomio de 1º, 2º, 3º, ..., grado en x, para que este polinomio sea un cuadrado, cubo, ..., perfecto.

Basta formar la derivada del polinomio expresando después la condición necesaria para que este derivado sea divisor relativo del polinomio dado.

Sea por ejemplo el trinomio de segundo grado:

$$ax^2+bx+c \tag{a}$$

cuya derivada es:

$$2ax+b \tag{b}$$

Dividiendo (a) ÷ (b) resulta:

$$\text{cociente: } x+b,\quad \text{resta: } 4ac-b^2$$

para que $2ax+b$ sea M. C. D. entre (a) y (b), la resta debe ser nula, es decir:

$$4ac-b^2=0$$

En efecto (Contreras, Álgebra), sabemos que la condición necesaria y suficiente para que un trinomio sea cuadrado perfecto es que haya entre sus coeficientes la relación:

$$b^2-4ac=0$$

sustituyendo en el polinomio:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

410. Sea aún el polinomio:

$$ax^3+bx^2+cx+d \tag{a}$$

su derivado es:

$$3ax^2+2bx+c \tag{a'}$$

buscando el M. C. D. se halla por resta:

$$(6ac-2b^2)x-9ad-bc$$

que igualada á 0 produce:

$$6ac-2b^2=0,\quad 9ad-bc=0 \tag{a''}$$

La primera condición da:

$$c=\frac{b^2}{3a}$$

La segunda:

$$d=\frac{bc}{9a}=\frac{b^3}{27a^2}$$

Sustituyendo en el polinomio:

$$ax^3+bx^2+cx+d=a\left(x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{b^2}{3a^2}x+\frac{b^3}{27a^3}\right)=a\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3$$

N. B.—Las dos condiciones (a″), indican que el derivado (a′) debe ser cuadrado perfecto, porque si los dos factores de primer grado en x de que se compone fuesen desiguales, como según la teoría deberían estar elevados en el polinomio á la segunda potencia, sería este segundo cuando menos de cuarto grado, mientras que es de tercero.

En efecto, para que:

$$3ax^2+2bx+c=0$$

sea cuadrado perfecto, debe tenerse como hemos dicho:

$$(2b)^2-4.3\,a.c=b^2-3ac=0$$

condición que existe en la primera de las ecuaciones (a″).

411. De lo dicho en el párrafo 407 podemos deducir como caso particular la teoría de las raíces iguales.

Si en la condición:

$$b=ka+h \quad \text{se supone:} \quad h=0 \quad \text{queda:} \quad b=ka$$

y la ecuación *general:*

$$(kx+h)^m+P(kx+h)^{m-1}+\ldots\ldots+T(kx+h)+U=0$$

se reduce á:

$$k^m.x^m+Pk^{m-1}x^{m-1}+\ldots\ldots+Tkx+U=0 \tag{645}$$

pero como tenemos la ecuación (579), se puede sustituir á una de estas dos ecuaciones el resultado de su sustracción, lo que da:

$$(k^m-1)x^m+P(k^{m-1}-1)x^{m-1}+\ldots\ldots+T(k-1)x=0$$

dividiendo todos los términos por $(k-1)x$ resulta:

$$(k^{m-1}+k^{m-2}+\ldots\ldots+k+1)x^{m-1}+P(k^{m-2}+k^{m-3}+\ldots\ldots+k+1)x^{m-2}+\ldots\ldots+T=0$$

Ahora bien, si además de suponer: $h=0$ se supone: $k=1$ lo que da: $a=b$, es decir, las raíces son iguales, tendremos:

$$mx^{m-1}+P(m-1)x^{m-2}+\ldots\ldots+T=0 \tag{a}$$

ecuación cuyo primer miembro debe tener un divisor relativo común con la propuesta.

Pero (a) es el polinomio derivado del primer miembro de la propuesta:

$$x^m+Px^{m-1}+\ldots\ldots+U=0$$

luego: *si esta ecuación admite raíces iguales, debe existir un factor común entre el primer miembro de la propuesta y su derivada.*

(Demostración de *Mr. Poinsot.*)

APLICACIONES.

412. I. Dada la ecuación:

$$X=x^7-7x^6+10x^5+22x^4-43x^3-35x^2+48x+36=0$$

averiguar si tiene raíces iguales.

Debe hallarse:

$$X=(x-2)^2(x-3)^2(x+1)^3$$

II. Dada la ecuación:

$$x^7-3x^6+9x^5-19x^4+27x^3-33x^2+27x-9=0$$

Debe hallarse:

$$(x-1)^3(x^2+3)^2$$

III. Dada la ecuación:

$$x^5+5x^4-45x^3-45x^2+108=0$$

Debe hallarse:

$$(x-2)^2(x+3)^3$$

413. **Método de Ostrogradski.** Llamando en el (párrafo 399), $\varphi(x)$ al producto de los factores independientes de la raíz a y llamando $f(x)$ á la ecuación, se tiene:

$$f(x)=(x-a)^n\varphi(x) \tag{m}$$

De consiguiente:

$$f'(x)=n(x-a)^{n-1}\varphi(x)+(x-a)^n\varphi'(x)=(x-a)^{n-1}[n\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)] \tag{n}$$

De las fórmulas (m) y (n) se deduce:

$$\frac{(x-a)f'(x)}{f(x)}=n+(x-a)\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \tag{p}$$

Así pues, cuando x tienda hacia el valor de la raíz a, como $\varphi(x)$ y $\varphi'(x)$ son independientes de a, resulta:

$$\lim\frac{(x-a)f'(x)}{f(x)}=n \tag{q}$$

Si llamamos D el M. C. D. entre $f(x)$ y $f'(x)$, tendremos:

$$f(x)=D.\psi(x),\quad f'(x)=D.\theta(x) \tag{r′}$$

y según la forma y condiciones de este M. C. D. (párrafos 399, etc.), a es raíz simple de $\psi(x)=0$ y *no* es raíz de $\theta(x)=0$.

Sustituyendo los valores (r′), se tiene:

$$\frac{(x-a)f'(x)}{f(x)}=\frac{\theta(x)}{\left(\frac{\psi(x)}{x-a}\right)} \tag{r″}$$

El quebrado $\frac{\psi(x)}{x-a}$ tiene por límite $\psi'(a)$ cuando x tiende hacia a (§187, etc.); así pues, el límite del primer miembro de (r'') vale $\frac{\theta(a)}{\psi'(a)}$; comparando, de consiguiente, este límite con (q) resulta:

$$\frac{\theta(a)}{\psi'(a)}=n \qquad (r''')$$

Así pues: *toda raíz de orden* n *de la ecuación* $f(x)=0$ *es raíz de la ecuación:*

$$\theta(x)-n\psi'(x)=0 \qquad (r^{IV})$$

Además, a es raíz de la ecuación:

$$\psi(x)=0 \qquad (r^{V})$$

Recíprocamente toda raíz común á las ecuaciones (r^{IV}) *y* (r^{V}) *es raíz de orden* n *de la ecuación:* $f(x)=0$.

Si a es raíz de (r^{IV}) y (r^{V}), la primera de las fórmulas (r') hace ver que será raíz de $f(x)$, si llamamos n' su orden de multiplicidad, se tendrá:

$$\theta(a)-n'\psi'(a)=0; \text{ mas como por hipótesis: } \theta(a)-n\psi'(a)=0$$

como $\psi'(a)$ es diverso de cero por no admitir $\psi(x)=0$ sino raíces simples, debe tenerse forzosamente: $n'=n$. Resulta, pues, que el M. C. D. de los polinomios:

$$\theta(x)-n\psi'(x) \text{ y } \psi(x)$$

es justamente X_n (párrafo 405), es decir, la cantidad que denota las raíces cuyo grado de multiplicidad es n.

Ejemplo. Sea la ecuación:

$$f(x)=x^5-2x^4-8x^3+16x^2+16x-32=0$$

Se tiene:

$$f'(x)=5x^4-8x^3-24x^2+32x+16, \quad D=x^3-2x^2-4x+8$$
$$\psi(x)=\frac{f(x)}{D}=x^2-4, \quad \theta(x)=\frac{f'(x)}{D}=5x+2, \quad \psi'(x)=2x$$

Para averiguar si admite la ecuación raíces simples ó *de orden* 1 *de multiplicidad* comparando las ecuaciones:

$$\psi(x)=x^2-4, \quad \theta(x)-\psi'(x)=3x+2$$

vemos que x^2-4 y $3x+2$ son primos entre sí; luego *no* hay raíces simples.

Para determinar las raíces dobles, tenemos:

$$\psi(x)=x^2-4, \quad \theta(x)-2\psi'(x)=x+2$$

Así pues el M. C. D. entre los segundos miembros que es precisamente X_2 vale $x+2$; luego hay *dos raíces iguales á* -2. Para determinar las triples se tiene:

$$\varphi(x)=x^2-4, \quad \theta(x)-3\psi'(x)=-x+2$$

Como el M. C. D. de los segundos miembros es $x-2$, se tiene $X_3=x-2$ y habrá tres raíces iguales á 2; finalmente, la ecuación propuesta quedará descompuesta así:

$$f(x)=(x+2)^2(x-2)^3$$

N. B.—Dejamos al lector la tarea de aplicar este método á los ejercicios resueltos en el curso del Capítulo.

CAPÍTULO IV.

Raíces comunes á dos ecuaciones.—Divisores de las ecuaciones.—Divisores conmensurables de segundo grado de las ecuaciones de tercero y cuarto grado.

414. Supongamos dos ecuaciones $X=0$, $X'=0$; si estas ecuaciones tienen n raíces comunes iguales ó desiguales, los polinomios X y X' tienen n factores primos iguales ó desiguales de la forma $x-a$, es decir, un M. C. D. algebraico de grado n. Determinando este M. C. D. é igualándolo á cero, la ecuación $D=0$ tendrá por raíces las n raíces comunes de las ecuaciones propuestas.

Dividiendo $X\div D$ é igualando á cero el cociente Q, la ecuación $Q=0$ dará las raíces de X *no comunes* con las de X'. Si finalmente X y X' son primas entre sí, habrá carencia de raíces comunes.

415. Demostraremos una proposición que puede ser de utilidad:

Si A *y* A_1 *son dos funciones enteras en* x, *primas entre sí y sin ningún factor común constante, se pueden hallar otras dos funciones enteras de* x, X *y* X_1 *tales que se cumpla la relación:*

$$AX-A_1X_1=1$$

Buscando el M. C. D. entre A y A_1 se tiene la serie de identidades:

$$A=A_1Q_1+R_1, \quad A_1=R_1Q_2+R_2, \;\ldots\ldots, \; R_{p-2}=R_{p-1}Q_p+R_p \qquad (646)$$

en las que el último resto R_p será un número constante.

De la primera identidad se obtiene:

$$R_1=A-A_1Q_1$$

Sustituyendo en la segunda:

$$-R_2=R_1Q_2-A_1=AQ_2-A_1-A_1Q_1Q_2=AQ_2-A_1(1+Q_1Q_2)$$

Sustituyendo en la tercera los valores de R_1 y $-R_2$, se tiene:

$$R_3=R_1-R_2Q_3=A(1+Q_2Q_3)-A_1(Q_1+Q_3+Q_1Q_2Q_3) \qquad (647)$$

y así sucesivamente, atendiendo á que los primeros miembros son sucesivamente $+R_1$,