El quebrado $\frac{\psi(x)}{x-a}$ tiene por límite $\psi'(\mathrm{a})$ cuando x tiende hacia a (§187, etc.); así pues, el límite del primer miembro de (r″) vale $\frac{\theta(a)}{\psi'(a)}$; comparando, de consiguiente, este límite con (q) resulta:

$$\frac{\theta(a)}{\psi'(a)}=n \qquad (\mathrm{r}''')$$

Así pues: *toda raíz de orden* n *de la ecuación* $\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$ *es raíz de la ecuación:*

$$\theta(x)-n\,\psi'(x)=0 \qquad (\mathrm{r}^{\mathrm{IV}})$$

Además, a es raíz de la ecuación:

$$\psi(x)=0 \qquad (\mathrm{r}^{\mathrm{V}})$$

Recíprocamente toda raíz común á las ecuaciones $(\mathrm{r}^{\mathrm{IV}})$ *y* $(\mathrm{r}^{\mathrm{V}})$ *es raíz de orden* n *de la ecuación:* $f(x)=0$.

Si a es raíz de $(\mathrm{r}^{\mathrm{IV}})$ y $(\mathrm{r}^{\mathrm{V}})$, la primera de las fórmulas (r′) hace ver que será raíz de $\mathrm{f}(x)$, si llamamos n' su orden de multiplicidad, se tendrá:

$$\theta(a)-n'\psi'(a)=0;\ \text{mas como por hipótesis:}\ \theta(a)-n\psi'(a)=0$$

como $\psi'(a)$ es diverso de cero por no admitir $\psi(x)=0$ sino raíces simples, debe tenerse forzosamente: $n'=n$. Resulta, pues, que el M. C. D. de los polinomios:

$$\theta(x)-n\psi'(x) \ \text{ y } \ \psi(x)$$

es justamente X_n (párrafo 405), es decir, la cantidad que denota las raíces cuyo grado de multiplicidad es n.

Ejemplo. Sea la ecuación:

$$f(x)=x^5-2x^4-8x^3+16x^2+16x-32=0$$

Se tiene:

$$f'(x)=5x^4-8x^3-24x^2+32x+16,\quad \mathrm{D}=x^3-2x^2-4x+8$$

$$\psi(x)=\frac{f(x)}{\mathrm{D}}=x^2-4,\quad \theta(x)=\frac{f'(x)}{\mathrm{D}}=5x+2,\quad \psi'(x)=2x$$

Para averiguar si admite la ecuación raíces simples ó *de orden* 1 *de multiplicidad* comparando las ecuaciones:

$$\psi(x)=x^2-4,\quad \theta(x)-\psi'(x)=3x+2$$

vemos que x^2-4 y $3x+2$ son primos entre sí; luego *no* hay raíces simples.

Para determinar las raíces dobles, tenemos:

$$\psi(x)=x^2-4,\quad \theta(x)-2\psi'(x)=x+2$$

Así pues el M. C. D. entre los segundos miembros que es precisamente X_2 vale $x+2$; luego hay *dos raíces iguales á* -2. Para determinar las triples se tiene:

$$\varphi(x)=x^2-4,\quad \theta(x)-3\psi'(x)=-x+2$$

Como el M. C. D. de los segundos miembros es $x-2$, se tiene $\mathrm{X}_3=x-2$ y habrá tres raíces iguales á 2; finalmente, la ecuación propuesta quedará descompuesta así:

$$f(x)=(x+2)^2(x-2)^3$$

N. B.—Dejamos al lector la tarea de aplicar este método á los ejercicios resueltos en el curso del Capítulo.

CAPÍTULO IV.

Raíces comunes á dos ecuaciones.—Divisores de las ecuaciones.—Divisores conmensurables de segundo grado de las ecuaciones de tercero y cuarto grado.

414. Supongamos dos ecuaciones $\mathrm{X}=0$, $\mathrm{X}'=0$; si estas ecuaciones tienen n raíces comunes iguales ó desiguales, los polinomios X y X′ tienen n factores primos iguales ó desiguales de la forma $x-a$, es decir, un M. C. D. algebraico de grado n. Determinando este M. C. D. é igualándolo á cero, la ecuación $\mathrm{D}=0$ tendrá por raíces las n raíces comunes de las ecuaciones propuestas.

Dividiendo $\mathrm{X}\div\mathrm{D}$ é igualando á cero el cociente Q, la ecuación $\mathrm{Q}=0$ dará las raíces de X *no comunes* con las de X′. Si finalmente X y X′ son primas entre sí, habrá carencia de raíces comunes.

415. Demostraremos una proposición que puede ser de utilidad:

Si A *y* A_1 *son dos funciones enteras en* x, *primas entre sí y sin ningún factor común constante, se pueden hallar otras dos funciones enteras de* x, X *y* X_1 *tales que se cumpla la relación:*

$$\mathrm{AX}-\mathrm{A}_1\mathrm{X}_1=1$$

Buscando el M. C. D. entre A y A_1 se tiene la serie de identidades:

$$\mathrm{A}=\mathrm{A}_1\mathrm{Q}_1+\mathrm{R}_1,\ \mathrm{A}_1=\mathrm{R}_1\mathrm{Q}_2+\mathrm{R}_2,\ \ldots\ldots,\ \mathrm{R}_{p-2}=\mathrm{R}_{p-1}\mathrm{Q}_p+\mathrm{R}_p \qquad (646)$$

en las que el último resto R_p será un número constante.

De la primera identidad se obtiene:

$$\mathrm{R}_1=\mathrm{A}-\mathrm{A}_1\mathrm{Q}_1$$

Sustituyendo en la segunda:

$$-\mathrm{R}_2=\mathrm{R}_1\mathrm{Q}_2-\mathrm{A}_1=\mathrm{AQ}_2-\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2=\mathrm{AQ}_2-\mathrm{A}_1(1+\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2)$$

Sustituyendo en la tercera los valores de R_1 y $-\mathrm{R}_2$, se tiene:

$$\mathrm{R}_3=\mathrm{R}_1-\mathrm{R}_2\mathrm{Q}_3=\mathrm{A}(1+\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_3)-\mathrm{A}_1(\mathrm{Q}_1+\mathrm{Q}_3+\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_3) \qquad (647)$$

y así sucesivamente, atendiendo á que los primeros miembros son sucesivamente $+\mathrm{R}_1$,

$-R_2$, $+R_3$, —......, y á la formación de los segundos se llegaría en último análisis á una identidad de la forma:

$$\pm R_p = AM - A_1 M_1$$

Como el primer miembro es divisible entre $\pm R_p$ el segundo debe serlo igualmente y como A y A_1 carecen de factor común constante llamando X y X_1 los cocientes:

$$\frac{M}{\pm R_p}, \quad \frac{M_1}{\pm R_p} \quad \text{resulta} \quad 1 = AX - A_1 X_1$$

APLICACIONES.

416. I. *Resolver la ecuación de cuarto grado* $f(x) = 0$ *conociendo la diferencia* d *que existe entre dos de sus raíces.*

Si una raíz es a, la otra será $a + d$; de consiguiente si buscamos la transformada en $x + d$ cuyas raíces son iguales á las de la ecuación disminuídas d unidades, una de las raíces de la transformada será $a + d - d = a$; luego la transformada y la propuesta tienen una raíz común. Buscando el M. C. D. entre ambos polinomios é igualándolo á cero, se conocerá la raíz a y de consiguiente las $a + d$. Finalmente, conociendo dos raíces de la ecuación propuesta, fácilmente se determinarán las otras dos.

Supongamos:

$$f(x) = x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 7x - 6 = 0$$

en el caso en que $d = 1$ y valiendo, por consiguiente, la transformada en $x + 1$:

$$f(x+1) = x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0$$

Buscando el M. C. D. entre ambos polinomios se halla por M. C. D. de primer grado $x - 2$ (¹). Igualándolo á cero se ve que la raíz común a tiene por valor 2 y la raíz $a + d$ vale 3. Para conocer las otras dos raíces se tendrá:

$$\frac{f(x)}{(x-2)(x-3)} = x^2 - 2x - 1$$

y las dos raíces $1 \pm \sqrt{2}$ de este cociente son las otras dos de la propuesta.

417. **Divisores de las ecuaciones.** Si siempre se pudiese, dada una ecuación, conocer un divisor de ella, la resolución de las ecuaciones sería completa, pues por divisiones sucesivas se iría rebajando la ecuación hasta llegar al primer grado.

Si $X = 0$ es la ecuación, Y un divisor conocido y Z el cociente $\frac{X}{Y}$, se tendrá $ZY = 0$ que conduce á las condiciones $Z = 0$, $Y = 0$, de menor grado que la propuesta. Ahora bien, la determinación de los divisores de las ecuaciones es tan complicada como la resolución de ellas, y haciendo punto omiso de circunstancias excepcionales, en general el método presentaría igual dificultad.

Cuando se habla de los divisores de una ecuación $X = 0$ se comprende que ésta es de la forma:

$$x^m + Px^{m-1} + \ldots\ldots = 0$$

(¹) Para encontrar con más sencillez el M. C. D. entre $f(x) = 0$ y $f(x+1) = 0$, es conveniente y permitido tomar en lugar de una de estas dos ecuaciones la diferencia entre ellas $f(x) - f(x+1) = 0$ y entonces la operación se efectúa refiriéndose á los polinomios:

$$x^4 - 3x^3 + 6x - 4 \quad \text{y} \quad 4x^3 - 15x^2 + 13x + 2$$

así como los divisores; todo divisor de grado superior al primero es, pues, producto de alguno de los factores simples de la ecuación, porque de otro modo habría varias maneras de descomponerla en factores simples, lo que es imposible.

El número de divisores de 2º, 3º, 4º, ..., nº grado será pues (Capítulo IV, Primera Parte):

$$C_2^m, \; C_3^m, \; C_n^m, \; \ldots\ldots, \; C_n^m$$

y además habrá tantos divisores de grado n como de grado $m - n$ en virtud de la fórmula demostrada:

$$C_n^m = C_{m-n}^m$$

Si suponemos $n = 1$ ó $n = m - 1$, resulta:

$$C_1^m = C_{m-1}^m = m$$

y si suponemos $n = 2, 3, 4, \ldots\ldots$, los números $C_2^m = C_{m-2}^m$, $C_3^m = C_{m-3}^m$, ..., van creciendo hasta un máximo $C_{\frac{m-1}{2}}^m$ si m es par ó $C_{\frac{m}{2}}^m$ si m es impar (Capítulo IV, Primera Parte) para decrecer en seguida pasando por los mismos valores y en orden contrario á medida que n crece hasta $m - 1$.

Si por ejemplo suponemos $n = 2$ en este caso:

$$C_2^m = \frac{m(m-1)}{2}$$

para que este número sea mayor que m (grado de la ecuación propuesta) debe tenerse $m(m-1) > 2m$ ó $m > 3$.

Así pues basta que la ecuación sea de tercer grado para que la determinación de sus divisores de segundo grado sea tan difícil como la resolución de la ecuación misma. Si el grado pasa del tercero, la investigación de los divisores de segundo grado y por consiguiente de los de tercero, cuarto, etc., depende de ecuaciones más altas que la propuesta.

418. Dos métodos generales permiten determinar los divisores de cierto grado.

Primer método. Sea $f(x) = 0$ la ecuación propuesta de grado m y cuyo primer término es x^m y vamos á hallar sus divisores de n^{simo} grado. Llamemos $f_1(x)$ uno de estos divisores cuyo primer término es x^n y que contiene n *coeficientes indeterminados.* Efectuando la división $\frac{f(x)}{f_1(x)}$ se llegará á un resto de grado $n - 1$ y que deberá igualarse á cero para que $f_1(x)$ sea divisor. Para igualar á cero dicha resta bastará igualar cada uno de sus coeficientes, lo que originará n ecuaciones, entre los datos y los coeficientes incógnitos de $f_1(x)$. Eliminando $n - 1$ incógnitas entre estas n ecuaciones se encontrará finalmente una ecuación de grado C_n^m que dará á conocer la nª incógnita. Conocida esta incógnita, que es uno de los coeficientes, los demás se conocerán por medio de las ecuaciones de condición.

Segundo método. Si la función $f(x)$ es de grado m y el divisor de grado n, el cociente $\frac{f(x)}{f_1(x)} = f_2(x)$ será de grado $m - n$ de la forma de $f(x)$ y $f_1(x)$.

Dejando indeterminados los n coeficientes de $f_1(x)$ y los $m - n$ coeficientes de $f_2(x)$ y expresando que el producto de estos dos polinomios reproduce $f(x)$, se obtienen m ecuaciones condicionales entre los datos y los coeficientes incógnitos que son en número de $m - n + n$, es decir, en número de m. Eliminando $m - 1$ coeficientes entre estas m ecuaciones, se conocerá la mª incógnita ó coeficiente que hará conocer las demás.

419. **Divisores conmensurables de segundo grado de las ecuaciones de tercero y cuarto grado.** Tomando en cuenta los conceptos del párrafo anterior, solamente

aplicaremos los métodos expuestos á la determinación de los divisores conmensurables de segundo grado de las ecuaciones generales de tercero y cuarto grado.

Tercer grado. Sea la ecuación de tercer grado desprovista de segundo término:

$$f(x)=x^3+Qx+R=0 \tag{648}$$

á la que vamos á aplicar el primer método (párrafo 418) para determinar sus divisores conmensurables de segundo grado.

Representemos por $f_1(x)=x^2+px+q$ el divisor de segundo grado en el que p y q son desconocidos y efectuemos la división $\frac{f(x)}{f_1(x)}$ lo que nos dará:

$$\text{cociente}=x-p, \quad \text{resta}=x(p^2+Q-q)+(R+pq)$$

Como la resta debe ser nula es preciso tener:

$$p^2+Q-q=0, \quad R+pq=0 \tag{649}$$

Eliminando á q se obtiene la ecuación:

$$p^3+Qp+R=0$$

que da á conocer á p. No habrá sino sustituir en la segunda ecuación (649) este valor para obtener:

$$q=-\frac{R}{p}$$

Como se ve, la ecuación que determina á p es idéntica á la (648). Este resultado era de esperarse porque puesto que cada divisor de segundo grado es producto de dos de primero, el coeficiente del segundo término de dicho divisor es la suma de dos de las raíces de la propuesta tomadas con signo cambiado. Mas como la propuesta carece de segundo término, la suma de sus raíces es nula y de consiguiente una cualquiera de ellas es igual á la suma de las otras dos con signo cambiado. De consiguiente siendo a, b, c, las tres raíces, se tiene la condición $a+b+c=0$ y como además la suma de dos de entre estas con signos cambiados vale p, vemos que los valores de p son justamente las raíces de la propuesta.

Cuarto grado. Sea la ecuación de cuarto grado:

$$x^4+Qx^2+Rx+S=0 \tag{650}$$

á la que vamos á aplicar el segundo método (párrafo 418) para hallar sus divisores conmensurables de segundo grado.

Representando el divisor de segundo grado por x^2+px+q y el cociente que se obtendría dividiendo el primer miembro de (650) entre este divisor por $x^2+p'x+q'$ se tiene idénticamente:

$$x^4+Qx^2+Rx+S=(x^2+px+q)(x^2+p'x+q')=x^4+\begin{array}{c|c|c|c} p & x^3+q & x^2+qp' & x+qq' \\ +p' & +pp' & +pq' & \\ & +q' & & \end{array}$$

Las ecuaciones condicionales á que da lugar son:

$$p+p'=0, \quad q+pp'+q'=Q, \quad qp'+q'p=R, \quad qq'=S$$

De la primera se obtiene $p'=-p$ y por sustitución en las otras:

$$q-p^2+q'=Q, \quad p(q'-q)=R, \quad qq'=S \tag{651}$$

Entre éstas las dos primeras dan:

$$q'+q=Q+p^2, \quad q'-q=\frac{R}{p} \tag{652}$$

Como se conoce la suma y la diferencia entre q y q', resulta:

$$q'=\tfrac{1}{2}(Q+p^2)+\tfrac{1}{2}\frac{R}{p}=\frac{p^3+Qp-R}{2p}$$

$$q=\tfrac{1}{2}(p^2+Q)-\tfrac{1}{2}\frac{R}{p}=\frac{p^3+Qp-R}{2p}$$

y para la tercera de las ecuaciones (651) se tendrá finalmente:

$$\frac{(p^3+Qp+R)(p^3+Qp-R)}{4p^2}=S \tag{653}$$

y desarrollando:

$$p^6+2Qp^4+(Q^2-4S)p^2-R^2=0 \tag{654}$$

esta ecuación es del *sexto grado*, como era de esperar, puesto que $C_n^m=C_4^2=6$, pero como contiene tan sólo las potencias pares de p, puede rebajarse al tercer grado, pues tomando p^2 por incógnita, resulta:

$$(p^2)^3+2Q(p^2)^2+(Q^2-4S)p^2-R^2=0 \tag{655}$$

Resolviendo esta ecuación, se tienen tres valores para p^2 que los llamaremos v, v' y v'', y escribiremos:

$$p^2=v, \quad p^2=v', \quad p^2=v''$$

Así pues, los seis valores de p serán:

$$\pm a, \quad \pm b, \quad \pm c$$

llamando a, b y c las raíces cuadradas de v, v' y v''; como se ve, las seis raíces de (654) son iguales dos á dos y de signos contrarios.

Conociendo á p, el valor de q estará dado por la relación:

$$q=\frac{p^3+Qp-R}{2p}$$

Como vemos, sólo á causa del *rebajamiento* la investigación de los divisores es menos difícil que la de la ecuación.

Conocido un solo valor de p se pueden calcular los de q, p' y q' y la resolución de la propuesta se reduce á la de las dos ecuaciones de segundo grado:

$$x^2+px+q=0, \quad x^2+p'x+q'=0$$

Así ha logrado Descartes traer la resolución de la ecuación de cuarto grado á la del tercero, pero este método es deficiente para los grados superiores.

En cuanto al *rebajamiento* de la ecuación en p era de preverse; puesto que la propuesta carece de segundo término, sus raíces a, b, c, d satisfacen la relación:

$$a+b+c+d=0$$

y como además los valores de p deberán ser:

$$-a-b, \quad -a-c, \quad -a-d, \quad -b-c, \quad -b-d, \quad -c-d$$

vemos que los tres últimos son iguales y de signos contrarios á los tres primeros; así pues, en la ecuación en p sólo deberá haber potencias pares de p y podrá rebajarse.

420. Si se considera la ecuación completa de cuarto grado:

$$x^4+Px^3+Qx^2+Px+S$$

y x^2+px+q representa uno de sus divisores de segundo grado, la suma de las raíces de la ecuación propuesta es:

$$a+b+c+d=-P$$

no serán, pues, iguales dos á dos y de signos contrarios los seis valores de p, pero sucede entonces que si en la ecuación en p después de hallada *se hace desaparecer el segundo término, desaparecen con él las otras potencias impares.*

En efecto, los seis valores de p son evidentemente:

$$-a-b, \quad -a-c, \quad -a-d, \quad -b-c, \quad -b-d, \quad -c-d$$

la ecuación en p:

$$p^6+P'p^5+Q'p^4+R'p^3+S'p^2+T'p+U'=0$$

y el coeficiente P' de esta ecuación tiene por valor:

$$P'=3(a+b+c+d)=-3P$$

Para hacer desaparecer el segundo término de la ecuación en p es preciso tomar una nueva incógnita p_1 y suponer $p=p_1-\frac{1}{6}P'$ (párrafo 378), de donde se obtiene:

$$p_1=p+\tfrac{1}{6}P'$$

en la que sustituyendo por p cada uno de sus valores y por P' la suma $3(a+b+c+d)$, resulta:

$$\begin{aligned}
p_1&=-a-b+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-a-b+c+d)\\
p_1&=-a-c+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-a-c+b+d)\\
p_1&=-a-d+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-a-d+b+c)\\
p_1&=-b-c+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-b-c+a+d)\\
p_1&=-b-d+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-b-d+a+c)\\
p_1&=-c-d+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-c-d+a+b)
\end{aligned}$$

Como los tres últimos son iguales y de signos contrarios á los tres primeros, la ecuación en p_1 *sólo contendrá potencias pares* de p_1 y también cuando la propuesta sea completa podrá rebajarse.

CAPÍTULO V.

ECUACIONES RECÍPROCAS.—PROBLEMAS RESUELTOS POR EL REBAJAMIENTO.

421. Llámase *recíproca* la ecuación cuyas raíces son recíprocas unas de otras, es decir, son tales que las reproducimos á todas dividiendo la unidad por cada una de ellas.

Estas ecuaciones, susceptibles de rebajamiento, conducen á otras más sencillas, de cuya resolución dependen y dan más fácilmente los valores para las raíces.

422. Tenemos, ante todo, que averiguar las *condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación sea recíproca*, examinando desde luego el caso en que la propuesta sea de grado par.

Sea la ecuación general:

$$f(x)=x^{2m}+\dots\dots+P_nx^{2m-n}+\dots\dots+P_mx^m+\dots\dots+P_{2m-n}x^n+\dots\dots+P_{2m}=0 \quad (655')$$

Designaremos por P_n el coeficiente del término que tiene n términos antes que él y además de los dos términos extremos hemos escrito dos equidistantes de ellos y el término medio.

Si en esta ecuación cambiamos x por $\frac{1}{x}$, es claro que obtendremos todas las raíces de la transformada $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=0$, dividiendo la unidad por todas las raíces de $\varphi(x)$; de manera que si esta última *es recíproca*, sus raíces serán las de $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=0$ y de consiguiente los primeros miembros de estas ecuaciones serán idénticos cuando hayamos reducido la última á la forma ordinaria.

Recíprocamente, si las ecuaciones $\varphi(x)=0$ y $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=0$ son idénticas, la propuesta será recíproca, porque tendrán las mismas raíces, y así reproduciremos todas las raíces de $\varphi(x)=0$, dividiendo sucesivamente la unidad por cada una de ellas.

Luego *la condición necesaria y suficiente para que la propuesta* $\varphi(\mathrm{x})$ *sea recíproca, es que pueda ser idéntica con* $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

Cambiaremos, pues, á x en $\frac{1}{x}$, lo que producirá:

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^{2m}}+\dots\dots+\frac{P_n}{x^{2m-n}}+\dots\dots+\frac{P_m}{x^m}+\dots\dots+\frac{P_{2m-n}}{x^n}+\dots\dots+P_{2m}=0 \quad (656)$$