En cuanto al *rebajamiento* de la ecuación en p era de preverse; puesto que la propuesta carece de segundo término, sus raíces a, b, c, d satisfacen la relación:

$$a+b+c+d=0$$

y como además los valores de p deberán ser:

$$-a-b,\quad -a-c,\quad -a-d,\quad -b-c,\quad -b-d,\quad -c-d$$

vemos que los tres últimos son iguales y de signos contrarios á los tres primeros; así pues, en la ecuación en p sólo deberá haber potencias pares de p y podrá rebajarse.

420. Si se considera la ecuación completa de cuarto grado:

$$x^4+\mathrm{P}x^3+\mathrm{Q}x^2+\mathrm{P}x+\mathrm{S}$$

y x^2+px+q representa uno de sus divisores de segundo grado, la suma de las raíces de la ecuación propuesta es:

$$a+b+c+d=-\mathrm{P}$$

no serán, pues, iguales dos á dos y de signos contrarios los seis valores de p, pero sucede entonces que si en la ecuación en p después de hallada *se hace desaparecer el segundo término, desaparecen con él las otras potencias impares.*

En efecto, los seis valores de p son evidentemente:

$$-a-b,\quad -a-c,\quad -a-d,\quad -b-c,\quad -b-d,\quad -c-d$$

la ecuación en p:

$$p^6+\mathrm{P}'p^5+\mathrm{Q}'p^4+\mathrm{R}'p^3+\mathrm{S}'p^2+\mathrm{T}'p+\mathrm{U}'=0$$

y el coeficiente P' de esta ecuación tiene por valor:

$$\mathrm{P}'=3(a+b+c+d)=-3\,\mathrm{P}$$

Para hacer desaparecer el segundo término de la ecuación en p es preciso tomar una nueva incógnita p_1 y suponer $p=p_1-\frac{1}{6}\mathrm{P}'$ (párrafo 378), de donde se obtiene:

$$p_1=p+\tfrac{1}{6}\mathrm{P}'$$

en la que sustituyendo por p cada uno de sus valores y por P' la suma $3(a+b+c+d)$, resulta:

$$\begin{aligned}
p_1&=-a-b+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-a-b+c+d)\\
p_1&=-a-c+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-a-c+b+d)\\
p_1&=-a-d+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-a-d+b+c)\\
p_1&=-b-c+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-b-c+a+d)\\
p_1&=-b-d+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-b-d+a+c)\\
p_1&=-c-d+\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\tfrac{1}{2}(-c-d+a+b)
\end{aligned}$$

Como los tres últimos son iguales y de signos contrarios á los tres primeros, la ecuación en p_1 *sólo contendrá potencias pares* de p_1 y también cuando la propuesta sea completa podrá rebajarse.

CAPÍTULO V.

ECUACIONES RECÍPROCAS.—PROBLEMAS RESUELTOS POR EL REBAJAMIENTO.

421. Llámase *recíproca* la ecuación cuyas raíces son recíprocas unas de otras, es decir, son tales que las reproducimos á todas dividiendo la unidad por cada una de ellas.

Estas ecuaciones, susceptibles de rebajamiento, conducen á otras más sencillas, de cuya resolución dependen y dan más fácilmente los valores para las raíces.

422. Tenemos, ante todo, que averiguar las *condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación sea recíproca*, examinando desde luego el caso en que la propuesta sea de grado par.

Sea la ecuación general:

$$f(x)=x^{2m}+\ldots\ldots+\mathrm{P}_n x^{2m-n}+\ldots\ldots+\mathrm{P}_m x^m+\ldots\ldots+\mathrm{P}_{2m-n}x^n+\ldots\ldots+\mathrm{P}_{2m}=0 \quad (655')$$

Designaremos por P_n el coeficiente del término que tiene n términos antes que él y además de los dos términos extremos hemos escrito dos equidistantes de ellos y el término medio.

Si en esta ecuación cambiamos x por $\frac{1}{x}$, es claro que obtendremos todas las raíces de la transformada $\varphi(\frac{1}{x})=0$, dividiendo la unidad por todas las raíces de $\varphi(x)$; de manera que si esta última *es recíproca*, sus raíces serán las de $\varphi(\frac{1}{x})=0$ y de consiguiente los primeros miembros de estas ecuaciones serán idénticos cuando hayamos reducido la última á la forma ordinaria.

Recíprocamente, si las ecuaciones $\varphi(x)=0$ y $\varphi(\frac{1}{x})=0$ son idénticas, la propuesta será recíproca, porque tendrán las mismas raíces, y así reproduciremos todas las raíces de $\varphi(x)=0$, dividiendo sucesivamente la unidad por cada una de ellas.

Luego *la condición necesaria y suficiente para que la propuesta* $\varphi(\mathrm{x})$ *sea recíproca, es que pueda ser idéntica con* $\varphi(\frac{1}{x})=0$.

Cambiaremos, pues, á x en $\frac{1}{x}$, lo que producirá:

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^{2m}}+\cdots\cdots+\frac{\mathrm{P}_n}{x^{2m-n}}+\cdots\cdots+\frac{\mathrm{P}_m}{x^m}+\cdots\cdots+\frac{\mathrm{P}_{2m-n}}{x^n}+\cdots\cdots+\mathrm{P}_{2m}=0 \quad (656)$$

ó quitando denominadores, invirtiendo el orden de los términos y dividiendo por P_{2m}:

$$x^{2m}+\ldots\ldots+\frac{P_{2m-n}}{P_{2m}}x^{2m-n}+\ldots\ldots+\frac{P_m}{P_{2m}}x^m+\ldots\ldots+\frac{P_n}{P_{2m}}x^n+\ldots\ldots+\frac{1}{P_{2m}}=0 \quad (657)$$

Identificando esta ecuación con la propuesta, hallaremos:

$$\frac{P_{2m-n}}{P_{2m}}=P_n,\ \frac{P_m}{P_{2m}}=P_m,\ \frac{P_n}{P_{2m}}=P_{2m-n},\ \frac{1}{P_{2m}}=P_{2m}$$

La última ecuación produce:

$$P_{2m}^2=\pm 1$$

y entonces las demás serán:

$$P_n=\pm P_{2m-n},\ P_m=\pm P_m,\ P_{2m-n}=\pm P_n \quad (658)$$

Vemos que si tomamos los signos inferiores, la ecuación $P_m=-P_m$ exige que se tenga $P_m=0$. Así pues, *para que una ecuación de grado par sea recíproca es necesario y suficiente que ordenada la ecuación, los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos sean iguales y de los mismos signos ó iguales y de signos contrarios, con tal que en este último caso la ecuación carezca de término medio.*

Del mismo modo veremos que *para que una ecuación de grado impar sea recíproca, es necesario y suficiente que los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos sean iguales y de los mismos signos ó iguales y de signos contrarios.*

Para demostrarlo partiríamos de la ecuación:

$$x^{2m+1}+\ldots\ldots+P_n x^{2m-n+1}+\ldots\ldots+P_{2m-n}x^{n+1}+\ldots\ldots+P_{2m+1}=0 \quad (659)$$

423. Pasemos ahora á estudiar cuatro casos que pueden presentarse en la resolución de una ecuación recíproca.

Primer caso. *La ecuación es de grado par y los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales y del mismo signo.*

Sea la ecuación:

$$f(x)=x^{2m}+P_1x^{2m-1}+P_2x^{2m-2}+\ldots\ldots+P_mx^m+\ldots\ldots+P_3x^3+P_2x^2+P_1x+1=0 \quad (660)$$

Siendo la unidad el producto de dos cantidades recíprocas, vemos que si conociésemos la suma de ellas sería fácil calcularlas.

Designando por y una cualquiera de las sumas que obtengamos sumando cada raíz de la propuesta con su recíproca, tendremos:

$$y=x+\frac{1}{x} \quad (661)$$

en la que y será susceptible de tener m valores diversos, de manera que la ecuación que determine el valor de y será solamente de grado m.

Por consiguiente *la resolución de la propuesta quedará reducida de este modo á la de una ecuación de grado subduplo* (1); porque cuando hayamos obtenido los valores de y, bas-

(1) También podemos decir que no cambiando la función $x+\frac{1}{x}$ cuando cambiamos en ella x por $\frac{1}{x}$, si buscamos una ecuación cuyas raíces estén ligadas con las de la propuesta por la relacion $y=x+\frac{1}{x}$, esta ecuación no podrá tener más que m raíces distintas, de manera que la resolución de la propuesta quedará reducida á la de dos ecuaciones: una de grado m, la otra (661) de segundo grado.

tará sustituirlos sucesivamente en la ecuación (661) y resolver las ecuaciones resultantes, que serán de segundo grado, para obtener todas las raíces de la ecuación (660).

Para formar la ecuación en y, no habría sino eliminar la incógnita entre las ecuaciones (660) y (661), lo que puede hacerse aplicando los métodos que explicaremos en otro Capítulo: después de reducir la (661) á la forma $x^2-xy+1=0$; pero la forma de la ecuación (660) permite efectuar la eliminación de x de un modo fácil, elegante y al alcance de los conocimientos adquiridos.

En efecto, dividiendo por x^m todos los términos de la ecuación (660) y agrupando los términos equidistantes de los extremos, resulta:

$$\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+P_1\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+P_2\left(x^{m-2}+\frac{1}{x^{m-2}}\right)+\cdots\cdots+P_m=0 \quad (662)$$

de manera que si podemos expresar en general á $x^n+\frac{1}{x^n}$ en función racional de y, la eliminación de x quedará efectuada inmediatamente.

Ahora bien, evidentemente se tiene:

$$\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)+\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right) \quad (663)$$

de donde:

$$x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)y-\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right) \quad (664)$$

Así para formar una función cualquiera de las que entran en el primer miembro de la ecuación (662) debemos multiplicar la precedente por y y restar del producto la anteprecedente.

Pero tenemos:

$$x^0+\frac{1}{x^0}=2,\ x+\frac{1}{x}=y$$

luego:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2,\ \ x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y,\ \ x^4+\frac{1}{x^4}=y^4-4y^2+2,\ \text{etc.} \quad (665)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (662), hallaremos efectuada la eliminación de x, y al mismo tiempo veremos comprobado que la ecuación en y es del grado m.

Resolveremos, pues, esta ecuación final y sustituiremos los valores de y en la expresión:

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2} \quad (666)$$

deducida de la (661), lo que nos dará á conocer las raíces de la propuesta.

N. B.—Observaremos que la ecuación (660) puede tener varias raíces iguales á $+1$ ó -1, porque el carácter de esta ecuación es el de que se puede verificar por cada uno de los cocientes que hallemos dividiendo la unidad por cada una de sus raíces.

En consecuencia principiaremos por ensayar si la verifican $+1$ ó -1, y buscaremos cuántas veces se encuentra cada uno de estos números entre sus raíces (Segunda Parte, Capítulo III); después dividiremos su primer miembro por el producto de los factores de primer grado correspondientes á todas estas raíces $+1$ ó -1, y por último aplicaremos á la ecuación-cociente el método que acabamos de exponer.

Ejemplo. Sea la ecuación:

$$f(x)=x^{10}-2x^9-4x^8+6x^7+3x^6-8x^5+3x^4+6x^3-4x^2-2x+1=0$$

Sustituyendo $+1$ y -1, estos números verificarán la ecuación, y para conocer su grado de multiplicidad formando las derivadas sucesivas del primer miembro de la propuesta, hallaremos:

$$f'(x)=10x^9-18x^8-32x^7+42x^6+18x^5-40x^4+12x^3+18x^2-8x-2$$

$$f'(1)=0,\ f'(-1)=0$$

$$\frac{f''(x)}{1.2}=45x^8-72x^7-112x^6+126x^5+45x^4-80x^3+18x^2+18x-4$$

$$\frac{f''(1)}{1.2}=-16,\ \frac{f''(-1)}{1.2}=0$$

$$\frac{f'''(x)}{1.2.3}=120x^7-168x^6-224x^5+210x^4+60x^3-80x^2+12x+6,\ \frac{f'''(-1)}{1.2.3}=0$$

$$\frac{f^{\text{IV}}(x)}{1.2.3.4}=210x^6-252x^5-280x^4+210x^3+45x^2-40x+3,\ \frac{f^{\text{IV}}(-1)}{1.2.3.4}=60$$

Hay pues (Segunda Parte, Capítulo III) dos raíces iguales á $+1$ y cuatro iguales á -1; dividiendo, pues, el primer miembro de la propuesta entre $(x-1)^2(x+1)^4$ que es igual á:

$$x^6+2x^5-x^4-4x^3-x^2+2x+1$$

é igualando á 0 el cociente de la división, se tendrá la ecuación:

$$x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$$

de la que obtendremos:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$$

que según las ecuaciones (665) se cambia en $y^2-4y+3=0$, cuyas raíces son:

$$y=3,\ y=1$$

y de consiguiente los valores de x serán:

$$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2},\quad x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

y finalmente las diez raíces de la ecuación propuesta serán:

$$+1,\ +1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ \frac{3+\sqrt{5}}{2},\ \frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{-3}}{2},\ \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$$

Segundo caso. *La ecuación es de grado par y los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales y de signos contrarios, pero falta el término medio.*

Si hacemos $x=1$ en esta ecuación, es claro que quedará verificada, puesto que sus términos quedarán reducidos á sus coeficientes; y si hacemos $x=-1$, también se verificará, porque los términos equidistantes de los extremos se destruirán dos á dos; luego $x=-1$ es raíz de la propuesta, lo mismo que $x=1$.

Si pues dividimos el primer miembro de la propuesta entre $(x+1)(x-1)=x^2-1$, é igualamos el cociente á cero, esta ecuación-cociente tendrá las mismas raíces que la propuesta, excepto $+1$ y -1.

Esta ecuación será, pues, recíproca de grado par y su último término, que es el cociente del último término -1 de la propuesta entre el último -1 del divisor, será $+1$; luego dicha ecuación es de la forma de la ecuación (660) y se resolverá, de consiguiente, de la misma manera; su resolución se reducirá á la de una ecuación del grado:

$$\frac{2m-2}{2}=m-1$$

Tercer caso. *La ecuación es de grado impar y los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales y de los mismos signos.*

Desde luego vemos que $x=-1$ es raíz de la ecuación, puesto que dos términos equidistantes de los extremos, el uno de grado par y el otro de grado impar, al hacer $x=-1$, uno se reduce á su coeficiente y el otro á su coeficiente con signo cambiado; de consiguiente se destruyen.

Dividiremos, pues, el primer miembro de la ecuación entre $x+1$ y la ecuación-cociente que se obtenga será recíproca, de grado par, y su último término será:

$$\frac{+1}{+1}=+1$$

luego será de la forma de la (660).

Si $2m+1$ es el grado de la propuesta, su resolución depende de la de una ecuación del grado:

$$\frac{2m}{2}=m$$

Cuarto caso. *La ecuación es de grado impar y los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales y de signos contrarios.*

Fácilmente vemos que $x=+1$ es raíz de la ecuación, y dividiendo su primer miembro entre $x-1$ obtendremos una ecuación-cociente de la forma de la (660) y que la resolveremos análogamente.

APLICACIONES.

424. Sea la ecuación binomia (1) $x^m-1=0$; esta ecuación tiene evidentemente la raíz $x=1$; si pues efectuamos la división:

$$\frac{x^m-1}{x-1}=x^{m-1}+x^{m-2}+\dots\dots+x^2+x+1$$

é igualamos á cero el cociente, obtendremos la ecuación:

$$x^{m-1}+x^{m-2}+\dots\dots+x^2+x+1=0$$

ecuación recíproca de grado par ó impar que puede resolverse por medio de los precedentes principios haciéndola depender de otra de grado menor.

Sea, por ejemplo: $x^5-1=0$; dividiéndola entre $x-1$, se obtiene:

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

(1) Aunque adelante nos ocupamos en el estudio particular de las ecuaciones binomias, creemos oportuno la aplicación que vamos á exponer, con objeto de indicar desde luego un modo de resolución bastante cómodo.

Que puede escribirse así:

$$x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}+1=0$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones (665), se transforma en $y^2+y-1=0$, que da:

$$y=-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

y como tenemos para valor de x, el que da la ecuación (666); sustituyendo se obtiene:

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}=-\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{5}\pm\frac{1}{4}\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}.\sqrt{-1}$$

después de hacer reducciones.

La ecuación $x^{10}-1=0$ puede resolverse por el mismo medio.

En efecto, se tiene:

$$x^{10}-1=(x^5-1)(x^5+1)=0$$

Como se conocen las raíces de $x^5-1=0$, y las de $x^5+1=0$ son iguales á las de $x^5-1=0$ y de signo contrario, se conocerán las de $x^{10}-1=0$.

425. Las raíces de $f(x)=0$ pueden ser no simplemente recíprocas sino *recíprocas* y de *signos contrarios*, ó como se dice abreviadamente, *recíprocas* de la *segunda especie;* la teoría de esta clase de ecuaciones es análoga á la de las recíprocas de la primera especie que acabamos de estudiar; así pues, omitimos una exposición detallada que nos conduciría á razonamientos análogos.

El lector está en aptitud de efectuarlos por sí sólo.

426. **Problemas á que dan lugar las ecuaciones susceptibles de rebajamiento.** Son muy numerosos y á la vez interesantes los problemas de esta naturaleza, mas como por una parte carecemos de espacio y por otra, más bien en su mayoría, revisten un aspecto netamente especulativo, nos conformaremos con enunciar algunos dejando al lector la tarea de resolverlos.

427. I. La ecuación: $x^4+2x^3-21x^2-22x+40=0$ tiene sus raíces en proporción aritmética y se trata de calcularlas. Deben hallarse para valores de las raíces: -5, 1, -2 y 4.

II. Calcular las raíces de la ecuación: $x^4+x^3-7x^2+2x+4=0$ que están en proporción geométrica. Debe hallarse:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \frac{1-\sqrt{5}}{2},\quad -1+\sqrt{5},\quad -1-\sqrt{5}$$

III. ¿Qué relaciones deben existir entre los coeficientes indeterminados de una ecuación: $f(x)=0$, 1°, para que dos de sus raíces estén en la relación: $1:9$; y 2°, para que u pares de raíces guarden esa relación?

IV. La ecuación: $x^m+Px^{m-1}+\ldots\ldots+Tx+u=0$ tiene sus raíces en proporción geométrica y se trata de calcularlas.

V. Calcular las raíces de la ecuación anterior cuando las raíces forman progresión aritmética.

428. Por la índole de estos problemas vemos cuántas son las variantes que pueden sufrir los enunciados; el lector, tomando en cuenta los anteriores, puede proponerse otros análogos.

CAPÍTULO VI.

TEORÍA GENERAL DE LA ELIMINACIÓN.

Métodos elementales.—Métodos superiores.—Aplicaciones.

429. **Definiciones y observaciones preliminares.** Eliminar $x, y, z, \ldots\ldots$ entre las ecuaciones: $M=0$, $N=0$, $L=0$, ... es encontrar ecuaciones que sean consecuencias necesarias de ellas y que no contengan á: $x, y, z, \ldots\ldots$

Estas ecuaciones se llaman *resultantes* de las ecuaciones propuestas. La *ecuación final* es entonces propiamente la *resultante* ó *eliminante* del sistema.

430. Pueden presentarse tres casos:

1º *Cuando el sistema de ecuaciones algebraicas contiene tantas incógnitas como ecuaciones;* en este caso el número de valores asociados de las incógnitas que satisfacen á las ecuaciones, ó en otras palabras, el *número de soluciones del sistema* es en general *determinado.*

Sean tres ecuaciones generales en x, y y z de los grados m, n y p respectivamente. La primera da teóricamente m valores para x que son funciones de las otras incógnitas consideradas por el momento como datos. Sustituídos estos m valores en las otras dos ecuaciones generales originarán m grupos de dos ecuaciones con dos incógnitas y x se habrá *eliminado* teóricamente. Resolviendo respecto á y cada una de las primeras ecuaciones de estos m grupos que serán del grado n, considerando á z como dato y sustituyendo los n valores que se obtienen para y en la segunda ecuación del mismo grupo que es del grado p, la incógnita y se habrá *eliminado.* Así se tendrán mn ecuaciones del grado p y conteniendo sólo á la incógnita z. Cada una dará p valores para z; luego en resumen z tendrá mnp valores que es un *número limitado.* Retrocediendo en sentido inverso llegaremos á obtener por sustituciones mnp valores para y y mnp valores para x. De consiguiente: *todo sistema en que hay tantas incógnitas como ecuaciones admite en general un número de soluciones igual al producto de los grados de las ecuaciones propuestas.* Este teorema es, en sustancia, el importante teorema de BEZOUT.

2º *Cuando hay más incógnitas que ecuaciones, hay indeterminación.* Si hay $n+p$ incógnitas y sólo n ecuaciones, se pasa de este caso al anterior atribuyendo á p incógnitas valores arbitrarios. Las n restantes obtenidas en función de las p incógnitas de valores arbitrarios serán también indeterminadas.

3º *Cuando hay menos incógnitas que ecuaciones.* Si hay n incógnitas y $n+p$ ecuaciones, se escogen n ecuaciones para determinar las n incógnitas y los valores encontrados para