Como de las ecuaciones (684) se han obtenido las (690), (691), de éstas, efectuando operaciones semejantes, se obtienen otras de grado $(m-2)$ en x, de aquí se llegará á dos ecuaciones de grado $(m-3)$ en x, y procediendo del mismo modo llegaremos á dos ecuaciones en x elevada á la primera potencia, en fin, á una ecuación en que entre x elevada á cero, es decir, en que entran sólo la incógnita y y las cantidades conocidas.

TERCER MÉTODO.

441. Más sencillo es el método siguiente: Multiplicando la primera ecuación por el coeficiente del primer término de la segunda y *vice versa*, resulta después de restar:

$$(A'B-AB')x^{m-1}+(A'C-AC')x^{m-2}+\ldots\ldots+(A'K-AK')=0 \qquad (692)$$

Multiplicando la primera por el último coeficiente K′ de la segunda y *vice versa*, restando y suprimiendo el factor común x, queda:

$$(AK'-A'K)x^{m-1}+(BK'-B'K)x^{m-2}+\ldots\ldots+(HK'-H'K)=0 \qquad (693)$$

y tenemos dos ecuaciones de grado $m-1$ en x (692), (693); deducidas de las dos (684) de grado m.

Análogamente se deducen sucesivamente dos ecuaciones de grado $(m-2)$, $(m-3)$, ..., en fin, de primer grado en x, de las que eliminando á esta incógnita x, quedará la ecuación final en y.

APLICACIONES.

442. Sean dos ecuaciones de segundo grado:

$$Ax^2+Bx+C=0,\quad A'x^2+B'x+C'=0 \qquad (694)$$

Conforme al primer método obtenemos:

$$(A'B-AB')x+(A'C-AC')=0 \qquad (695)$$

y pudiendo escribirse las ecuaciones (694) bajo la forma:

$$(Ax+B)x+C=0,\quad (A'x+B')x+C=0$$

tendremos:

$$(A'C-AC')x+(B'C-BC')=0 \qquad (696)$$

obteniendo el valor de x de la (695) y sustituyendo en la (696), se tendrá la ecuación resultante:

$$(A'B-AB')(B'C-BC')-(A'C-AC')^2=0 \qquad (697)$$

Esta ecuación la daría inmediatamente el determinante:

$$\begin{vmatrix} (A'B-AB') & (A'C-AC') \\ (A'C-AC') & (B'C-BC') \end{vmatrix} \qquad (698)$$

que sólo contiene á la incógnita y.

El mismo resultado se obtiene con los otros métodos, por ejemplo con el tercero; además de la ecuación (695) tenemos la siguiente:

$$(AC'-A'C)x^2+(BC'-B'C)x=0 \text{ ó sea: } (A'C-AC')x+(B'C-BC')=0$$

que es la misma ecuación (696); luego se obtendrá por resultado la (697).

Supongamos que las ecuaciones sean:

$$x^2-yx+y^2=0,\quad x^2-ay+a^2=0$$

Se tendrá en este caso:

$$A=1,\ B=-y,\ C=y^2,\ A'=1,\ B'=0,\ C'=-ay+a^2$$

y la ecuación resultante será:

$$-y(a^2y-ay^2)-(y^2+ay-a^2)^2=0 \text{ ó sea: } y^4+ay^3-2a^3y+a^4=0$$

443. Cuando las dos ecuaciones no son del mismo grado relativamente á la incógnita por eliminar, para la aplicación de los métodos expuestos conviene reducirlos al mismo grado *relativo*.

Sean las ecuaciones:

$$Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots\ldots+Hx+K=0,\quad A'x^n+B'x^{n-1}+\ldots\ldots+H'x+K'=0 \qquad (699)$$

Supongamos que de los números enteros y positivos m y n sea $m>n$; se tendrá $m=n+p$; si multiplicamos la segunda por x^p, se obtendrá la ecuación:

$$A'x^m+B'x^{m-1}+C'x^{m-2}+\ldots\ldots+H'x^{p+1}+K'x^p=0 \qquad (700)$$

y se tendrá así respecto á x un grado igual al de la primera ecuación (699).

Podemos obtener la igualdad de los grados relativos en las ecuaciones (699), no sólo aumentando el grado de la segunda, sino bajando el de la primera.

En efecto, multiplicando la segunda por x^p, transformándola en la (700) y dividiendo esta ecuación sucesivamente por x^0, x^1, x^2, x^3, ..., x^{p-1}, se tendrán las expresiones:

$$x^m=-\frac{1}{A'}(B'x^{m-1}+C'x^{m-2}+\ldots\ldots+H'x^{p+1}+K'x^p)$$

$$x^{m-1}=-\frac{1}{A'}(B'x^{m-2}+C'x^{m-3}+\ldots\ldots+H'x^p+K'x^{p-1})$$

$$x^{m-2}=-\frac{1}{A'}(B'x^{m-3}+C'x^{m-4}+\ldots\ldots+H'x^{p-1}+K'x^{p-2}$$

....

$$x^{m-p+1}=x^{n+1}=-\frac{1}{A'}(B'x^n+C'x^{n-1}+\ldots\ldots+H'x^2+K'x)$$

si se sustituye este valor de x^{n+1} en la expresión precedente que corresponde á la potencia $n+2$; si el valor de x^{n+2} se sustituye en la expresión que da á x^{n+3}, y se prosigue sustituyendo hasta la potencia x^m, es claro que los valores de:

$$x^m,\ x^{m-1},\ x^{m-2},\ \ldots\ldots,\ x^{n+2},\ x^{n+1}$$

estarán expresados con las potencias de la cantidad desconocida x no superiores á la *enésima*.

Así pues, sustituídos estos valores en la primera de las ecuaciones (699), el grado de ésta se encuentra bajado al *enésimo* y será igual al grado de la segunda ecuación.

Propuestas, por ejemplo, las ecuaciones:

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0, \quad A'x^2+B'x+C'=0$$

de la segunda, multiplicada por x^2 y dividida después del modo que se ha dicho, resulta:

$$x^4=-\frac{B'}{A'}x^3-\frac{C'}{A'}x^2, \quad x^3=-\frac{B'}{A'}x^2-\frac{C'}{A'}x$$

y de consiguiente:

$$x^4=\left(\frac{B'^2}{A'^2}-\frac{C'}{A'}\right)x^2+\frac{B'C'}{A'^2}x$$

tenemos, pues, las dos potencias x^4 y x^3 expresadas por potencias de x no superiores á la segunda; sustituídos dichos valores en la primera de las ecuaciones dadas, se tendrá:

$$\left(\frac{AB'^2}{A'^2}-\frac{AC'}{A'}-\frac{BB'}{A'}+C\right)x^2+\left(\frac{AB'C'}{A^2}-\frac{BC'}{A'}+D\right)x+E=0$$

ecuación de segundo grado en x, como la segunda de las propuestas.

CUARTO MÉTODO.

ELIMINACIÓN POR MEDIO DEL MÁXIMO COMÚN DIVISOR.

444. Sean $\varphi(x,y)=0$, $\psi(x,y)=0$ las ecuaciones por resolver [1].

Ordenemos á $\varphi(x,y)$ respecto á y, busquemos el M. C. D. de los multiplicadores de las diversas potencias de y, y dividamos $\varphi(x,y)$ entre dicho divisor, ordenemos en seguida el cociente respecto á x, busquemos el M. C. D. de los coeficientes de las diversas potencias de x, y dividamos el cociente por este divisor.

Podemos entonces descomponer á $\varphi(x,y)$ en tres factores, uno función de x, otro de y, otro de x é y; llamándolos $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(x,y)$, se tendrá:

$$\varphi(x,y)=\varphi_1(x)\,\varphi_2(y)\,\varphi_3(x,y) \text{ y análogamente: } \psi(x,y)=\psi_1(x)\,\psi_2(y)\,\psi_3(x,y)$$

Pueden $\varphi_1(x)$ y $\psi_1(x)$ factores en x, admitir un M. C. D., así como $\varphi_2(y)$ y $\psi_2(y)$, $\varphi_3(x,y)$ y $\psi_3(x,y)$.

Llamando: d, d', d'' estos divisores; $F_1(x)$, $F_2(y)$, $F_3(x,y)$ y $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_3(x,y)$ los cocientes respectivos, se tendrá:

$$\varphi(x,y)=dd'd''F_1(x)F_2(y)F_3(x,y), \quad \varphi(x,y)=dd'd''f_1(x)f_2(y)f_3(x,y) \quad (701)$$

Examinemos ahora de cuántos modos pueden satisfacerse las ecuaciones propuestas:

$$\varphi(x,y)=0, \quad \psi(x,y)=0$$

[1] Es preciso que el lector tenga presentes los conceptos del Capítulo I de la Primera Parte que son esenciales para la inteligencia del método que vamos á exponer.

Desde luego es claro que se satisfacen igualando á cero cualquiera de los factores comunes: d, d', d''.

Si se supone: $d=0$, esta ecuación sólo contiene á x y resuelta dará un número limitado de valores para x; pero asociados á valores arbitrarios de y darán un número ilimitado de soluciones.

Si se supone $d'=0$, se tendrá un número limitado de valores para y, pero se puede juntar á cada uno de ellos una infinidad de valores de x y el número de soluciones también será ilimitado.

Por último, si $d''=0$ como contiene á x y á y se puede dar un valor arbitrario á una de las incógnitas, por ejemplo á x, y entonces la ecuación dará los valores correspondientes de y.

Así pues, cada uno de los factores d, d' y d'' da una infinidad de soluciones.

Los otros medios de satisfacer á las ecuaciones propuestas, son igualar á cero, al mismo tiempo un factor de la primera y otro de la segunda.

No se puede tener á la vez $F_1(x)=0$, $f_1(x)=0$, porque estos polinomios sólo contienen á x y no tienen factor común; de suerte que ningún valor de x puede á la vez nulificarlos. Lo mismo habrá que decir de la combinación: $F_2(y)=0$, $f_2(y)=0$.

Las combinaciones restantes:

$$\begin{cases} F_1(x)=0 \\ f_2(y)=0 \end{cases} \begin{cases} F_1(x)=0 \\ f_3(x,y)=0 \end{cases} \begin{cases} F_2(y)=0 \\ f_1(x)=0 \end{cases} \begin{cases} F_2(y)=0 \\ f_3(x,y)=0 \end{cases}$$

son posibles, pero como todas encierran una ecuación con una incógnita, la dificultad estriba en resolver esta ecuación en cada grupo.

Sólo resta la combinación $F_3(x,y)=0$, $f_3(x,y)=0$ y es justamente á la que se aplica el método de eliminación que vamos á exponer. Teniendo, pues, presente que estos polinomios carecen de toda especie de factor común: llamémoslos A y B para facilitar su escritura, ordenémoslos respecto de x y supongamos que el grado de esta incógnita sea en A mayor ó á lo sumo igual al que tiene en B.

Dividamos A entre B hasta que se obtenga una resta de grado menor que el divisor; si R y Q son la resta y el cociente hallados, se tendrá:

$$A=BQ+R \quad (702)$$

admitiendo que la división no haya introducido ningún denominador función de y, deducimos que R y Q serán funciones enteras, y si ciertos valores de x é y nulifican á A y á B, nulificarán á R y deberán hallarse entre las soluciones del sistema:

$$B=0, \quad R=0 \quad (703)$$

Recíprocamente los valores de x é y que verifiquen estas ecuaciones deben dar $A=0$ y satisfarán á las propuestas; así pues, puede reemplazarse el primer sistema por el (703).

Vemos, pues, que habrá que operar con los polinomios A y B como si se buscara su M. C. D.; los cálculos, pues, se proseguirán hasta hallar un resto R_n independiente de x. Admitiendo, pues, que las divisiones sucesivas *no introducen denominadores funciones de y*, se irían deduciendo ecuaciones análogas á la (702). La última ecuación: $R_n=0$ función de y solamente, es precisamente la *resultante*. Resolviéndola, se tendrán los valores de y que forman parte de los grupos de soluciones comunes que satisfacen las propuestas. De la ecuación $R_{n-1}=0$ que precede á $R_n=0$ y que es de primer grado en x, se deducirá el valor de x correlativo á cada uno de los de y. Si R_n resultara igual á una constante, las propuestas serían *incompatibles*.

Este método, que como se ve es en extremo elegante, teóricamente hablando, requiere que las divisiones se efectúen sin originar denominadores funciones de y. Como esto sólo acontece en casos particulares, vamos á suponer lo contrario, haciendo palpar con ello el vicio de que adolece el método.

Supongamos que la división de $A \div B$ conduce á este resultado:

$$A = \frac{BH}{K} + R \tag{704}$$

en que K es función de y, y que sólo de este modo pueda ser el resto de grado en x menor que el divisor.

Si se dan á x y á y valores que hagan nulos A y B, K puede ser nulo también y entonces $\frac{BH}{K}$ es de la forma $\frac{0}{0}$ pudiendo tomar, y de consiguiente R, un valor finito ó infinito.

No se puede, pues, afirmar que todas las soluciones de las ecuaciones $A=0$, $B=0$ se encuentren en el sistema $B=0$, $R=0$.

Recíprocamente, estando B y R reducidas á 0, K podrá también nulificarse, el término $\frac{BH}{K}$ ser $\frac{0}{0}$ y A no ser nulo.

Es preciso evitar las fracciones como en el M. C. D.

Notemos, ante todo, que no hay factor común función de y en los diferentes términos de B, de suerte que si se multiplica A por el coeficiente del primer término de B ó bien por algunos factores de este coeficiente, se consigue poder efectuar la división sin introducir ningún factor extraño en A y B.

Pero en general esta multiplicación introduce soluciones extrañas; en efecto, sea C el multiplicador función de y, Q el cociente, R el resto; se tendrá:

$$CA = BQ + R \tag{705}$$

vemos que las soluciones de $B=0$, $R=0$, equivalen no al sistema $A=0$, $B=0$, sino al $CA=0$, $B=0$ que se descompone en dos:

$$(C=0,\ B=0) \text{ y } (A=0,\ B=0) \tag{706}$$

Así, además de las soluciones de las ecuaciones propuestas, las ecuaciones $B=0$, $R=0$ harán conocer las del sistema $C=0$, $B=0$.

Es preciso, pues, resolver estas últimas, de las que una, $C=0$, no contiene sino á y; después sustituir los valores correspondientes de x y de y en $A=0$, y los pares de valores que no la satisfagan estarán de más entre las soluciones de las ecuaciones $B=0$, $R=0$ y deben desecharse.

La cuestión se reduce, de consiguiente, á resolver las ecuaciones $B=0$, $R=0$, para lo cual examinaremos si hay en R factores funciones de y ó de x.

Supongamos que existen; designémoslos por f y f', y sea r el cociente de R entre ff'; se tendrá: $R = rff'$, y podemos reemplazar las ecuaciones precedentes por los tres sistemas:

$$(B=0,\ f=0),\ (B=0,\ f'=0),\ (B=0,\ r=0) \tag{707}$$

Los dos primeros no presentan dificultades, pues f contiene sólo á y y f' sólo x, estudiemos el tercero.

B y r no tienen factor común, pues de lo contrario se hallaría en A y B lo que es contra el supuesto; además, ni R ni r encierran factores funciones de y sola ó de x sola; así pueden tratarse las ecuaciones: $B=0$, $r=0$ como las propuestas $A=0$, $B=0$; se

las reemplazará, de consiguiente, por otras dos: $r=0$, $r'=0$, de las cuales r' será de menor grado en x que r; éstas, á su turno, se cambiarán en otras $r'=0$, $r''=0$, etc.

Continuando las operaciones idénticas á las que se harían al buscar el M. C. D. entre A y B, se llegará á un resto independiente de x, que si es, por ejemplo, $r''=0$, las ecuaciones propuestas dependen de las ecuaciones: $r'=0$, $r''=0$, que no ofrecen dificultad, pues la segunda no contiene á x.

No debe olvidarse que retrogradando de las ecuaciones: $r'=0$, $r''=0$ á las $r=0$, $r'=0$, $B=0$, $r=0$; de las $B=0$, $r=0$ á las $A=0$, $B=0$, hay algunas soluciones que se toman y otras que se suprimen.

445. El método que acaba de explicarse conduce, en general, á varias ecuaciones en y, de las que algunas pueden dar para esta incógnita valores falsos. Cuando se hayan conocido todas las que entran verdaderamente en las soluciones comunes á las dos ecuaciones, será fácil, si es necesario reunirlas en una sola ecuación que se tomará por *final*, pero esta reunión rara vez es útil.

Cuando se han hecho todas las simplificaciones preliminares (párrafo 444) los polinomios que se someten á divisiones sucesivas no tienen ya factores comunes, y como las divisiones que se efectúan son las mismas que se harían para determinar el M. C. D. entre los dos polinomios, se tendrá seguridad de no llegar á un resto nulo.

Pero puede suceder que los términos en y se destruyan en el resto último y que este resto se reduzca á un número; en este caso no puede igualarse á cero y entonces se concluye que las ecuaciones son *imcompatibles*, á menos que no haya soluciones suprimidas en el curso del cálculo y de las que enseña á tener cuenta el método.

De estas cuestiones se han ocupado, entre otros: M. Bret en el cuaderno 15 del *Diario de la Escuela Politécnica;* Mr. Lefebure de Fourcy en el tomo II de la *Correspondencia* de dicha Escuela y en sus *Lecciones de Álgebra*, de las que hemos tomado la anterior demostración celosos de conservarle (salvo leves modificaciones) su sello de peculiar originalidad.

Este método de eliminación ha recibido de Mr. Labatie, en 1832, notables perfeccionamientos, que ha reproducido Mr. Sarrus bajo una forma elegante en 1834.

También aconsejamos consultar, entre otras, la Memoria de Cirodde sobre la *Teoría de la eliminación entre dos ecuaciones de cualquier grado con dos incógnitas*, y la de Mr. Valat, de la Academia Real de Ciencias de Bordeaux, sobre las *Ecuaciones de primer grado con una ó varias incógnitas.*

APLICACIONES.

446. I. Sean las ecuaciones:

$$y^3x^2 - 3y^3x - y^2 + 2 = 0, \quad (y^2 - 3y + 2)x^2 + (y-1)x - 3y + 1 = 0$$

Para eliminar á x, efectuando la división, es preciso multiplicar el primer polinomio por: $y^3 - 3y + 2$, hecho lo cual se obtiene por resto:

$$(-3y^5 + 8y^4 - 5y^3)x + 2y^4 + 2y^3 - 6y + 4$$

Para efectuar la segunda división con facilidad, atenderemos á que el coeficiente del primer término del nuevo divisor: $-3y^5 + 8y^4 - 5y^3$ puede transformarse en:

$$-y^3(y-1)(3y-5)$$

y á que el coeficiente del primer término del nuevo dividendo $y^2 - 3y + 2$, puede descomponerse en: $(y-1)(y-2)$, de consiguiente, para obtener cocientes y restas enteras, basta multiplicar por $y^6(y-1)(3y-5)^2$, con lo que resultará por resta final:

$$27y^{10}-136y^9+214y^8-112y^7+65y^6-100y^5+30y^4-24y^3+120y^2-112y+32=0$$

Pasemos ahora á averiguar cuáles son los factores extraños que están contenidos en esta ecuación.

1º Ante todo, se multiplicó el primer polinomio propuesto por:

$$y^2-3y+2=(y-1)(y-2)$$

de consiguiente la ecuación final puede contener como extraños los factores $(y-1)$ é $(y-2)$.

Sustituyendo $y=1$ é $y=2$ en el segundo polinomio propuesto, el primer supuesto lo reduce á una cantidad independiente de x, y no resulta, de consiguiente, ningún valor para x; el segundo supuesto produce $x=5$; en definitiva las ecuaciones (párrafo 444):

$$y^2-3y+2=0 \quad \text{y} \quad (y^2-3y+2)x^2+(y-1)x-3y+1=0$$

admiten por solución única: $x=5$, $y=2$, que como no satisfacen al dividendo no son soluciones del sistema propuesto.

2º En la segunda operación se ha introducido el factor $y^6(y-1)(3y-5)^2$. Para conocer las raíces de este factor, notemos que es nulo cuando se verifica una de las tres hipótesis: $y=0$, $y=1$, $y=\frac{5}{3}$.

Ahora bien, cualquiera de ellas sustituída en el polinomio correspondiente:

$$(-3y^5+8y^4-5y^3)x+2y^4+2y^3-6y+4$$

nulifica el coeficiente de x, y de consiguiente no conduce á ningún valor de x; no deben, pues, entrar en la ecuación final.

En general la introducción del factor necesario en el resto que precede al resto de primer grado, no influye en la ecuación final porque los valores de y sacados de este factor igualado á cero, reducen el resto de primer grado á una *cantidad numérica;* de consiguiente no se deducirá para x ningún valor.

II. Sean las ecuaciones:

$$x^3-3yx^2+(3y^2-y+1)x-y^3+y^2-2y=0, \quad x^2-2yx+y^2-y=0$$

el primer resto es: $x-2y$, el segundo y^2-y. Igualando este resto á cero, se obtienen las raíces $y=0$, $y=2$, que sustituídas en el anterior dan: $x=0$, $x=2$; como no se ha introducido ningún factor, las soluciones serán:

$$\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$$

III. Sean las ecuaciones:

$$(y-1)x^2+2x-5y+3=0, \quad yx^2+9x-10y=0$$

Multiplicando el primer polinomio por y para poder efectuar la división, resulta por primer resto: $(-7y+9)x+5y^2-7y$.

Para efectuar la segunda división es preciso multiplicar el segundo polinomio propuesto por $(-7y+9)$, y el segundo resto, que es la ecuación final, será:

$$25y^5-70y^4-126y^3+414y^2-243y$$

Hay que resolver las ecuaciones $y=0$, $yx^2+9x-10y=0$, que dan: $y=0$, $x=0$; como estos valores no nulifican el dividendo, son soluciones extrañas.

En la segunda división se multiplicó el dividendo correspondiente por $-7y+9$, valor que igualado á cero da: $y=\frac{9}{7}$. Hay, pues, que resolver el sistema:

$$y=\tfrac{9}{7}, \quad (-7y+9)x+5y^2-7y=0$$

como no se obtiene para x ningún valor, la solución es extraña.

Tenemos, pues, las dos ecuaciones resolutorias:

$$25y^5-70y^4-126y^3+414y^2-243y=0, \quad (-7y+9)x+5y^2-7y=0$$

que son: la final y la precedente de primer grado en x. La primera es de quinto grado y para resolverla son insuficientes los conocimientos adquiridos, pero aplicando los métodos de que muy pronto vamos á ocuparnos, resultan para valores de las raíces:

$$y=0,\ 1,\ 3,\ \frac{-3\pm\sqrt{10}}{5}$$

que sustituídos en la segunda producen: $x=0$, 1, 2, $-5\mp\sqrt{10}$.

Suprimiendo las primeras soluciones correlativas que vimos que eran extrañas, resultan sólo las cuatro últimas.

IV. Sean las ecuaciones:

$$\begin{aligned} &(-2x^2+2)y^3+(x^4-2x^3-2x^2-2x+1)y^2+(x^5-2x^3+x)y=0 \\ &(-x+1)y^5+(-x^2+x)y^4+(x^3-x^2)y^3+(x^4-x^3)y^2=0 \end{aligned}$$

En este caso no vale la pena emplear el procedimiento del M. C. D. porque las ecuaciones se prestan á simplificaciones numerosas, descomponiéndolas en factores del modo siguiente:

$$\begin{aligned} &y(x-1)(x+y)\times(x+1)(x^2-2y-1)=0 \\ &y(x-1)(x+y)\times(x^2-y^2)y=0 \end{aligned}$$

De consiguiente habrá varias maneras de satisfacerlas; igualando desde luego á cero los factores comunes, resulta:

$$\begin{cases} y=0 \\ x \text{ indeterminada} \end{cases} \begin{cases} y \text{ indeterminada} \\ x=1 \end{cases} \begin{cases} y \text{ indeterminada} \\ x=-y \end{cases}$$

Igualando los demás factores á cero, resultarán cuatro sistemas:

$$\begin{array}{lll}
1^\circ \begin{cases} y=0 \\ x+1=0 \end{cases} & \begin{array}{l} \text{de donde} \\ \quad " \end{array} & \begin{array}{l} y=0 \\ x=-1 \end{array} \\
2^\circ \begin{cases} y=0 \\ x^2-2y-1=0 \end{cases} & \begin{array}{l} \quad " \\ \quad " \end{array} & \begin{array}{l} y=0,\ y=0 \\ x=1,\ x=-1 \end{array} \\
3^\circ \begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x+1=0 \end{cases} & \begin{array}{l} \quad " \\ \quad " \end{array} & \begin{array}{l} x=-1,\ x=-1 \\ y=+1,\ y=-1 \end{array} \\
4^\circ \begin{cases} x^2-y_2=0 \\ x^2-2y-1=0 \end{cases} & \begin{array}{l} \quad " \\ \quad " \end{array} & \begin{array}{l} y=1+\sqrt{2},\ y=1-\sqrt{2} \\ x=\pm(1+\sqrt{2}),\ x=\pm(1-\sqrt{2}) \end{array}
\end{array}$$

En los tres primeros sistemas todas las soluciones son conocidas, excepto $x=-1$ é