$y=-1$; en el cuarto, las que cumplen la condición $x=-y$, lo son también; sólo quedan, propiamente, tres nuevas:

$$\begin{cases} y=-1 \\ x=-1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y=1+\sqrt{2} \\ x=1+\sqrt{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} y=1-\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \end{cases}$$

V. Como último ejemplo vamos á elegir un caso en que resulta una resta nula á causa de no haberse simplificado convenientemente y de antemano las ecuaciones propuestas.

Sean las dos ecuaciones:

$$x^3-3yx^2+3y^2x-5x^2+10yx+6x-y^3-5y^2-6y=0 \qquad \text{(a)}$$
$$x^3-5yx^2+8y^2x-x-4y^3+y=0 \qquad \text{(b)}$$

ordenando respecto á x, y dividiendo, resulta por primer resto:

$$(2y-5)x^2-(5y^2-10y-7)x+3y^3-5y^2-7y \qquad \text{(b}'\text{)}$$

Haciendo las preparaciones conocidas, se obtiene por segundo resto:

$$(y^4-10y^3+35y^2-50y+24)x-y^5+10y^4-35y^3+50y^2-24y \qquad \text{(c)}$$

El siguiente resto es *nulo*, y á primera vista (c) es divisor común de (a) y (b); ahora bien, esto es imposible desde el momento en que los coeficientes de (c) son funciones de y, y en (a) y (b) el coeficiente de x^3 es 1.

La contradicción aparente es fácil de explicar: para poder efectuar la tercera división, se ha multiplicado (b′) por el cuadrado del coeficiente de x en (c) sin averiguar si este coeficiente es factor de la parte independiente de x en (c), y esto es lo que sucede, pues la resta puede escribirse así:

$$(y^4-10y^3+35y^2-50y+24)(x-y)$$

No es pues (c), sino (c) desembarazado del factor $y^4-10y^3+35y^2-50y+24$, es decir, $x-y$, el factor común de los propuestos.

Habría, pues, que haber empezado por suprimir este factor en ellos, con lo que se cambian en:

$$x^2-(2y+5)x+y^2+5y+6=0, \quad x^2-4yx+4y^2-1=0$$

No son inútiles, sin embargo, los cálculos ya efectuados, porque es evidente que la ecuación final correspondiente á estas dos últimas ecuaciones es precisamente la correspondiente á las primeras propuestas desembarazada del factor común, es pues:

$$y^4-10y^3+35y^2-50y+24=0$$

en cuanto al resto de primer grado en x es también evidente que se obtendrá dividiendo $(b') \div x-y$, lo que produce: $(2y-5)x-3y^2+5y+y$.

La ecuación final resuelta con ayuda de los métodos propios que adelante explicaremos, da los valores $y=1, 2, 3, 4$, que sustituídos en el resto de primer grado en x, dan los correlativos: $x=3, 5, 5, 7$.

VI. ¿Cuál es la ecuación final del sistema

$$x^3+3x^2y-3xy^2-98=0, \quad x^2+4xy-2y^2-10=0?$$

Debe hallarse:

$$43y^6+345y^4-1960y^3+750y^2-2940y-4302=0$$

VII. Probar que las ecuaciones:

$$yx^3-(y^3-3y-1)x+y=0, \quad x^2-y^2+3=0$$

son *incompatibles*.

MÉTODO DE EULER.

447. Euler se vale de un arbitrio cómodo, evitando buscar el M. C. D., y su método consiste en lo siguiente:

Sean las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}+\ldots\ldots+Mx^5+Lx^4+Kx^3+Hx^2+Tx+U=0 \\ x^n+P'x^{n-1}+Q'x^{n-2}+R'x^{n-3}+\ldots\ldots+M'x^5+L'x^4+K'x^3+H'x^2+T'x+U'=0 \end{array}\right\} \quad (708)$$

en las que supondremos, por ejemplo, que $n>m$, y siendo ambas completas.

Si llamamos $x-a$ el factor común que adquieren los primeros miembros de estas ecuaciones, luego que esté determinado y, el primer miembro de la primera ecuación será el producto de $x-a$ por un factor de grado $m-1$:

$$x^{m-1}+px^{m-2}+qx^{m-3}+\ldots\ldots+tx+u$$

y el primer miembro de la segunda será igualmente el producto de dos factores $x-a$ y un polinomio de grado $n-1$ (grado mayor que $m-1$) y de la forma:

$$x^{n-1}+p'x^{n-2}+q'x^{n-3}+\ldots\ldots+t'x+u'$$

Tendremos, pues:

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}+\ldots\ldots+Tx+U=(x-a)(x^{m-1}+px^{m-2}+\ldots\ldots+tx+u)$$
$$x^n+P'x^{n-1}+Q'x^{n-2}+R'x^{m-3}+\ldots\ldots+T'x+U'=(x-a)(x^{n-1}+p'x^{n-2}+\ldots\ldots+t'x+u')$$

Eliminando entre estas ecuaciones el binomio $x-a$ como si fuera una incógnita de primer grado, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} (x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}+\ldots\ldots+Tx+U)(x^{n-1}+p'x^{m-2}+\ldots\ldots+t'x+u')= \\ =(x^n+P'x^{n-1}+Q'x^{n-2}+R'x^{n-3}+\ldots\ldots+T'x+U')(x^{m-1}+px^{m-2}+\ldots\ldots+tx+u) \end{array}\right\} \quad (709)$$

desarrollando esta expresión, ordenándola respecto á las potencias decrecientes de x, sacando á dichas potencias como factores comunes de los términos correspondientes, etc., se obtiene la ecuación:

$$x^{m+n-1}+x^{m+n-2}(P+p')+x^{m+n-3}(Q+Pp'+q')+x^{m+n-4}(R+Qp'+Pq'+r')+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+x^2(Hu'+Tt'+Uh')+x(Tu'+Ut')+Uu'=$$
$$=x^{m+n-1}+x^{m+n-2}(P+p')+x^{m+n-3}(Q'+P'p+q)+x^{m+n-4}(R'+Q'p+P'q+r)+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+x^2(T't+H'u+U'h)+x(U't+uT')+U'u.$$

para que sea idéntica esta expresión, los coeficientes de las mismas potencias de x deben ser iguales; luego se tendrán las condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{P}+p'=\mathrm{P}'+p \\ \mathrm{Q}+\mathrm{P}p'+q'=\mathrm{Q}'+\mathrm{P}'p+q \\ \mathrm{R}+\mathrm{Q}p'+\mathrm{P}q'+r'=\mathrm{R}'+\mathrm{Q}'p+\mathrm{P}'q+r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{H}u'+\mathrm{T}t'+\mathrm{U}h'=\mathrm{T}t+\mathrm{H}'u+\mathrm{U}'h \\ \mathrm{T}u'+\mathrm{U}t'=\mathrm{U}'t+u\mathrm{T}' \\ \mathrm{U}u'=\mathrm{U}'u \end{array}\right\} \tag{710}$$

No habiendo en estas $m+n-1$ ecuaciones, sino $m+n-2$ cantidades indeterminadas que son: $p, q, r, s, \ldots\ldots, t, u; p', q', r', s', \ldots\ldots, t', u'$, y no pasando del primer grado ninguna de ellas, se podrán eliminar todas, y por resultado final se tendrá una ecuación que sólo contendrá las cantidades:

$$\mathrm{P, Q, R}, \ldots\ldots, \mathrm{T, U};\ \mathrm{P', Q', R'}, \ldots\ldots, \mathrm{T', U'}$$

de consiguiente ésta será la *ecuación final*, pues no contendrá sino la incógnita y.

448. Como aplicación sean las ecuaciones:

$$x^3+\mathrm{P}x^2+\mathrm{Q}x+\mathrm{R}=0,\quad x^4+\mathrm{P}'x^3+\mathrm{Q}'x^2+\mathrm{R}'x+\mathrm{S}'=0 \tag{710'}$$

Comparando los coeficientes de estas ecuaciones con las de las (708), y teniendo presente además que en este caso $m=3$ y $n=4$, se deducirá que:

$$\begin{array}{l} \mathrm{U=R,\ T=Q,\ H=P,\ K=1,\ L=0}, \text{ etc.} \\ \mathrm{U'=S',\ T'=R',\ H'=Q',\ K'=P,\ L'=1,\ M=0}, \text{ etc.} \\ u=q,\ t=p,\ h=1,\ k=0,\ l=0', \text{ etc.} \\ u'=r',\ t'=q',\ h'=p',\ k'=1,\ l'=0,\ m'=0, \text{ etc.} \end{array}$$

de consiguiente las fórmulas (710) se transforman así: sustituyendo los anteriores valores en la última ecuación (710), se cambia en:

$$\mathrm{R}r'=\mathrm{S}'q \tag{a}$$

la penúltima se cambia en:

$$\mathrm{R}q'+\mathrm{Q}r'=\mathrm{S}'p+\mathrm{R}'q \tag{b}$$

y del mismo modo la antepenúltima, etc., se cambian en:

$$\mathrm{R}p'+\mathrm{Q}q'+\mathrm{P}r'=\mathrm{S}'+\mathrm{R}'p+\mathrm{Q}'q \tag{c}$$
$$\mathrm{R}+\mathrm{Q}p'+\mathrm{P}q'+r'=\mathrm{R}'+\mathrm{Q}'p+\mathrm{P}'q \tag{d}$$
$$\mathrm{Q}+\mathrm{P}p'+q'=\mathrm{Q}'+\mathrm{P}'p+q \tag{e}$$
$$\mathrm{P}+p'=\mathrm{P}'+p \tag{f}$$

como se ve, hay cinco incógnitas: p, q, p', q', r', y seis ecuaciones (a), (b), (c), (d), (e) y (f), el problema es determinado y la *ecuación final* en y que se obtiene de eliminar las cinco anteriores incógnitas entre las seis ecuaciones citadas contendrá sólo P, Q, R, P′, Q′, R′ y S′.

Si fuese idéntica esta ecuación final, inferiríamos que las propuestas debían tener,

cuando menos, un factor de la forma $x-\alpha$, cualquiera que fuese y; si la ecuación final sólo contuviera cantidades conocidas, las propuestas serían contradictorias. Si la ecuación final se verifica, podemos determinar el factor $x-\alpha$ dividiendo la primera ecuación dada entre el polinomio x^2+px+q, obteniéndose el cociente $x+\mathrm{P}-p$ haciendo abstracción del residuo que debe ser nulo al sustituir en él por y un valor deducido de la *ecuación final.*

Igualando á cero el cociente anterior, se obtiene: $x=p-\mathrm{P}$; sustituyendo en esta ecuación el valor de p hallado como se ha dicho, tendremos finalmente el valor de x expresado en función de y.

Debe notarse que este primer método de Euler contiene el germen del que ha dado Bezout, tan prolijamente explicado en su *Teoría de las Ecuaciones.*

449. Vamos á hacer otra aplicación de lo anterior.

Sean las ecuaciones:

$$x^2+\mathrm{P}x+\mathrm{Q}=0,\quad x^2+\mathrm{P}'x+\mathrm{Q}'=0$$

los multiplicadores del factor común $x-\alpha$ deben ser de primer grado, tales como:

$$x+p,\quad x+p'$$

Para mayor sencillez, comparando las fórmulas (710′) del párrafo (448) con las ecuaciones anteriores, tendremos:

$$\mathrm{R}=0,\ \mathrm{R}'=0,\ \mathrm{S}'=0,\ q=0,\ q'=0,\ r'=0$$

Así pues, de las (a), (b), (c), (d), (e), (f), se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{P}+p'=\mathrm{P}'+p \\ \mathrm{Q}+\mathrm{P}p'=\mathrm{Q}'+\mathrm{P}'p \\ \mathrm{Q}p'=\mathrm{Q}'p \end{array}\right\} \text{ ó bien } \left\{\begin{array}{l} p-p'=\mathrm{P}-\mathrm{P}' \\ \mathrm{P}'p-\mathrm{P}p'=\mathrm{Q}-\mathrm{Q}' \\ \mathrm{Q}'p-\mathrm{Q}p'=0 \end{array}\right\} \tag{711}$$

De las dos primeras se deduce:

$$p=\frac{(\mathrm{P}-\mathrm{P}')\mathrm{P}-(\mathrm{Q}-\mathrm{Q}')}{\mathrm{P}-\mathrm{P}'},\quad p'=\frac{(\mathrm{P}-\mathrm{P}')\mathrm{P}'-(\mathrm{Q}-\mathrm{Q}')}{\mathrm{P}-\mathrm{P}'} \tag{712}$$

y sustituyendo en la tercera resultará:

$$(\mathrm{P}-\mathrm{P}')(\mathrm{PQ}'-\mathrm{QP}')+(\mathrm{Q}-\mathrm{Q}')^2=0 \tag{713}$$

Dividiendo $x^2+\mathrm{P}x+\mathrm{Q}\div x+p$ con el objeto de hallar el factor desconocido $x-\alpha$, obtenemos de cociente $x+\mathrm{P}-p$ y despreciamos el residuo.

Igualando á cero el cociente, se obtiene: $x=p-\mathrm{P}$; sustituyendo el valor de p que dan las ecuaciones (712), se tiene finalmente:

$$x=-\frac{\mathrm{Q}-\mathrm{Q}'}{\mathrm{P}-\mathrm{P}'} \tag{714}$$

Sean, por ejemplo, las ecuaciones:

$$x^2+3yx+5=0,\quad x^2+xy+1=0$$

tenemos en este caso: $\mathrm{P}=3y$, $\mathrm{Q}=5$, $\mathrm{P}'=y$, $\mathrm{Q}'=1$.

Así pues, la fórmula (713) da sustituyendo estos valores: $y^2=4$, de la que se obtiene: $y=+2$, $y=-2$; sustituyendo en las fórmulas (712), se tiene: $p=5$, $p=-5$; la fórmula $x=p-P$, ó bien la (714), se cambia en $x=-1$, $x=+1$.

Así pues, tenemos los sistemas:

$$\left.\begin{matrix} y=+2 \\ x=-1 \end{matrix}\right\} (a) \qquad \left.\begin{matrix} y=-2 \\ x=+1 \end{matrix}\right\} (b)$$

que en efecto verifican las ecuaciones propuestas.

450. Como última aplicación de este método sean las ecuaciones:

$$x^3+Px^2+Qx+R=0, \quad x^3+P'x^2+Q'x+R'=0$$

tendremos $S'=0$, $r'=0$; luego de las fórmulas (a), (b), (c), (d), (e), (f), (párrafo 448), se obtiene:

$$\left.\begin{matrix} P+p'=P'+p \\ Q+Pp'+q'=Q'+P'p+q \\ R+Qp'+Pq'=R'+Q'p+P'q \\ Rp'+Qq'=R'p+Q'q \\ Rq'=R'q \end{matrix}\right\} \text{ ó bien } \left\{\begin{matrix} p-p'=P-P' \\ P'p-Pp'+q-q'=Q-Q' \\ Q'p-Qp'+P'q-Pq'=R-R' \\ R'p-Rp'+Q'q-Qq'=0 \\ R'q-Rq'=0 \end{matrix}\right\} \quad (715)$$

por las reglas de la eliminación podremos obtener los valores de p, p', q y q', pero podremos por medio de un artificio llegar más pronto al resultado final.

Hagamos, para abreviar, $P-P'=e$, $Q-Q'=e'$, $R-R'=e''$; de la primera y de la última (715), se obtiene:

$$p'=p-e, \quad q'=\frac{R'q}{R}$$

Sustituyendo estos valores en las otras tres expresiones, y haciendo desaparecer el denominador R, se cambian en las siguientes:

$$\left.\begin{matrix} (P-P')Rp-(R-R')q=R(Pe-e') & (a) \\ (Q-Q')Rp-(P'R-PR')q=R(Qe-e'') & (b) \\ (R-R')Rp-(Q'R-QR')q=R^2 & (c) \end{matrix}\right\} \quad (716)$$

de las dos primeras se deduce:

$$p=\frac{(Pe-e')(P'R-PR')-(R-R')(Qe-e'')}{(P-P')(P'R-PR')-(Q-Q')(R-R')}$$

$$q=R\,\frac{(Q-Q')(Pe-e')-R(P-P')(Qe-e'')}{(P-P')(P'R-PR')-(Q-Q')(R-R')}$$

sustituyendo estos valores en la tercera, resultará la *ecuación final:*

$$\left.\begin{matrix} R-R'[(Pe-e')(P'R-PR')-(R-R')(Qe-e'')] \\ -(Q'R-QR')[(Pe-e')(Q-Q')-(P-P')(Qe-e'')] \\ =Re[(P-P')(P'R-PR')-(Q-Q')(R-R')] \end{matrix}\right\} \quad (717)$$

en la que sólo falta sustituir por e, e', e'' sus valores $P-P'$, $Q-Q'$, $R-R'$, para obtener finalmente:

$$\left.\begin{matrix} (R-R')\left\{\begin{matrix} [P(P-P')-(Q-Q')](P'R-PR') \\ -(R-R')[Q(P-P')-(R-R')] \end{matrix}\right\} \\ -(Q'R-QR'\left\{\begin{matrix} [P(P-P')-(Q-Q')](Q-Q') \\ -(P-P')[Q(P-P')-(R-R')] \end{matrix}\right\} \\ =R(P-P')[(P-P')(P'R-PR')-(Q-Q')(R-R')] \end{matrix}\right\} \quad (718)$$

que es la *ecuación final.*

N. B.—Recordando lo dicho en el (párrafo 430) diremos nuevamente que Bezout en su *Teoría de las Ecuaciones* ha demostrado que *el exponente del grado de la ecuación final que resulta de la eliminación entre cualquier número de ecuaciones completas de cualquier grado, es igual á lo más al producto de los exponentes de estas ecuaciones.*

Poisson, Profesor de la Escuela Politécnica, ha dado la misma demostración de un modo más breve y directo, como puede verse en el *Complemento al Álgebra* de Lacroix. En el párrafo ya citado hemos expuesto un sistema de demostración bastante sencillo.

451. Otros varios métodos superiores de eliminación se usan, reuniendo á la vez elegancia y rigor matemático, pero su exposición nos llevaría más lejos de lo que nos toca; debemos, pues, únicamente mencionarlos en obsequio del carácter elemental de esta obra. Entre ellos citaremos los que dan las resultantes en forma de *determinantes*, partiendo de los expuestos por Bezout y por Euler en el mismo año de 1764 y aplicando el teorema de Rouché; el segundo método imaginado por Bezout y simplificado por Cauchy en sus *Nouveaux Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* y el método de eliminación por las *funciones simétricas*. Solamente daremos una idea de este último, porque conduce á una elegante y breve demostración del teorema de Bezout.

Ahora bien, el lector deseoso de efectuar un estudio detallado de la eliminación, puede consultar además de las obras citadas en los párrafos (432 y 445) los trabajos de Lagrange [1], Darboux [2], Rouché [3], Lemonnier [4], Mansion [5], Falk [6], Sylvester [7] y en su defecto los excelentes cursos de Álgebra Superior de Serret [8] y Comberousse [9] en que se mencionan y ponderan los trabajos citados.

MÉTODO DE ELIMINACIÓN POR LAS FUNCIONES SIMÉTRICAS.

452. Sean las ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} A=x^m+P_1x^{m-1}+\ldots\ldots+P_m=0 \\ B=x^n+Q_1x^{n-1}+\ldots\ldots+Q_n=0 \end{matrix}\right\} \quad (719)$$

(1) *Memoires de l'Académie de Berlin* (1770-1771).

(2) Teoría de la eliminación entre dos ecuaciones con dos incógnitas. *Bulletin de Sciences mathématiques et astronomiques* (1876-1877).

(3) Sobre la eliminación. *Nouvelles annales de mathématiques* (1877).

(4) *Comptes rendus de l'Académie de Sciences* (1875) y *Annales de l'École Normale Supérieure* (1878).

(5) Teoría *a priori* y *a posteriori* de la eliminación. *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (1878-1879).

(6) Estudio sobre los métodos de eliminación de Bezout y Cauchy. Trabajo presentado á la Sociedad de Ciencias de Upsal (1879).

(7) Método dialítico de eliminación. *Philosophical Magazine* (1840).

(8) *Algèbre Superieure* (1885), T. I.

(9) *Cours de mâthématiques* (1890), T. IV.

con dos incógnitas, una de grado m, la otra de grado n; así, cada coeficiente es una función de y, cuyo grado es, á lo más, igual á su índice.

Supongamos resuelta la primera respecto á x, y sean $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_m$ sus m raíces.

Esta ecuación equivaldrá á:

$$A=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots\ldots(x-a_m)=0 \qquad (719')$$

de manera que al sistema de ecuaciones propuestas pueden sustituirse los m sistemas:

$$\left.\begin{matrix} x-a_1=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x-b_1=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\} \ldots\ldots \left.\begin{matrix} x-a_m=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\} \qquad (720)$$

Pero si de la primera ecuación de cada uno de estos sistemas deducimos el valor de x, y lo sustituímos en la segunda, obtendremos la ecuación final en y de este sistema, y por consiguiente multiplicando las ecuaciones finales miembro á miembro, formaremos la del sistema propuesto.

Esta ecuación es, por lo tanto:

$$(a_1^n+Q_1 a^{n-1}+\ldots..+Q_n)(a_2^n+Q_1 a_2^{n-1}+\ldots..+Q_n)\ldots..(a_m^n+Q_1 a_m^{n-1}+\ldots..+Q_n)=0 \; (721)$$

Aunque a_1, a_2, a_3, sean funciones desconocidas de y, sin embargo, es posible formar esta ecuación, porque su primer miembro es una función simétrica racional de las raíces: $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_m$; y por consiguiente podemos expresarla en función racional de los coeficientes de $A=0$.

Ejemplo. Eliminar á x entre las ecuaciones:

$$x^3-7x+6=0, \quad x^2-yx+(y^2-7)=0$$

llamando a, b, las raíces de la segunda, tendremos por ecuación final:

$$(a^3-7a+6)(b^3-7b+6)=0$$

efectuando las operaciones indicadas:

$$a^3b^3-7(ab^3+ba^3)+6(a^3+b^3)+49ab-42(a+b)+36=0$$

vemos que el primer miembro está formado por funciones simétricas de las raíces de la segunda ecuación.

Fácilmente hallaremos que:

$$ab=y^2-7, \quad a+b=y, \quad ab^3+ba^3=-y^4+21y^2-98, \quad a^3+b^3=-2y^3+21y$$

luego la ecuación pedida es:

$$y^6-14y^4-12y^3+49y^2+84y+36=(y^3-7y-6)^2=0$$

453. Los cálculos que exige este método son tan prolijos, que en la práctica no se hace por lo común uso de él, pero ofrece la ventaja de conducir de un modo fácil, al grado de la ecuación final.

Considerando el término general de la ecuación (721), vemos que puede representarse por:

$$Q_\alpha a_1^{n-\alpha} Q_\beta a_2^{n-\beta}\ldots\ldots Q_\mu a_m^{n-\mu} = Q_\alpha Q_\beta \ldots\ldots Q_\mu a_1^{n-\alpha} a_2^{n-\beta}\ldots\ldots a_\mu^{n-\mu} \qquad (722)$$

Pero como la ecuación es simétrica, debe contener todos los términos que se deducen de éste por el cambio de las cantidades: $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_m$ unas en lugar de otras, es decir:

$$Q_\alpha Q_\beta \ldots\ldots Q_\mu T\left(a_1^{n-\alpha} a_2^{n-\beta}\ldots\ldots a_m^{n-\mu}\right) \qquad (723)$$

Valuemos el límite del grado de esta función, para lo cual desde luego vemos que el producto: $Q_\alpha Q_\beta \ldots\ldots Q_\mu$ es á lo sumo del grado: $\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots+\mu$.

Ahora bien, recordando las relaciones:

$$T(a^\alpha b^\beta)=S_\alpha S_\beta - S_{\alpha+\beta}$$

Vemos que la suma de los índices (párrafo 385, etc.) de S es en cada término igual á la suma de los exponentes que afectan á las letras: $a, b, \ldots..$, en cada término del desarrollo entrañado en el primer miembro, y por otra parte de los párrafos (385, etc.) se deduce que el índice de S es justamente igual al mayor índice de los coeficientes de la propuesta que entran en su expresión, de consiguiente:

$$T\left(a_1^{n-\alpha} a_2^{n-\beta}\ldots\ldots a_m^{n-\mu}\right)$$

es á lo sumo del grado:

$$(n-\alpha)+(n-\beta)+\ldots\ldots+(n-\mu)=mn-(\alpha+\beta+\ldots\ldots+\mu)$$

y en definitiva el grado de la ecuación final es á lo sumo mn. Este, como se ve, es el brillante teorema de Bezout.

Dicha ecuación final será precisamente de ese grado, si las propuestas son las más generales de su grado respectivo; será de grado menor si se han propuesto ecuaciones particulares.