CAPÍTULO VII.

APLICACIONES DE LA TEORÍA DE LA ELIMINACIÓN.

Transformación de las Ecuaciones.—Ecuación de las sumas, diferencias, cuadrados de las diferencias, productos y cocientes de las raíces tomadas dos á dos.—Evanescimiento de radicales.

454. **Transformación de las ecuaciones.** La teoría de la eliminacion tiene innumerables aplicaciones; en el presente Capítulo vamos á ocuparnos de algunas de las de mayor interés, comenzando por aplicar dicha teoría á la transformación de las ecuaciones. Para metodizar más el estudio, resolveremos desde luego el problema general que hay que resolver.

PROBLEMA GENERAL.—*Dada una ecuación* $f[z]=0$ *de grado* m *y cuyas raíces son:* $z_1, z_2, z_3 \ldots\ldots, z_m$ *formar una ecuación* $F(y)=0$ *transformada de la primera en la cual cada raíz* u *esté expresada por una función racional determinada:* $\varphi(z_1, z_2, \ldots\ldots, z_\mu)$ *de* μ *raíces de la propuesta.* La resolución del problema se obtiene, de consiguiente, eliminando las μ cantidades: $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_\mu$ entre las $\mu+1$ ecuaciones:

$$f(z_1)=0,\ f(z_2)=0,\ \ldots\ldots, f(z_\mu)=0,\ u=\varphi(z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots, z_\mu)$$

Estudiando el problema bajo este punto de vista, cada una de las cantidades:

$$z_1, z_2, \ldots\ldots, z_m$$

tendrá m valores diversos, pues cada una podrá recibir los valores de las m raíces de $f[z]=0$. El número de valores de u será, pues, el de ordenaciones de m cantidades μ á μ, pero serán ordenaciones *con repetición*, porque las cantidades $z_1, z_2, \ldots, z_m$ tienen los mismos valores y podrá sustituirse en un momento dado por dos ó varias de ellas el mismo valor. En el párrafo 51 hemos explicado cómo se averigua el número de *ordenaciones con repetición* que producen m cantidades n á n; como dicho párrafo aunque está impreso con caracteres pequeños es de inteligencia inmediata, mejor que repetir aquí el razonamiento aconsejamos que se le consulte en el lugar citado. Deducimos que el número de ordenaciones con repeticion es en el presente caso m^μ; este será, pues, el grado de la ecuación final en u.

Si excluyendo el caso en que la propuesta tuviese raíces iguales se impone la condi-

ción de que las cantidades: $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_m$ sean *distintas*, la transformada: $F(u)=0$, contendría *soluciones extrañas* y el cálculo debería dirigirse de manera tal que se evitaran estas soluciones.

455. Vamos á suponer en lo que resta del Capítulo referente á este asunto, el caso particular de que cada raíz n sea igual á una función racional cualquiera $\varphi(z_1, z_2)$ de *sólo dos* raíces de la propuesta.

Las tres ecuaciones fundamentales son en este caso:

$$f(z_1)=0, \quad f(z_2)=0, \quad u=\varphi(z_1, z_2) \tag{724}$$

El grado de la ecuación final en u es entonces el de repeticiones de m cantidades 2 á 2, es decir, m^2; mas si suponemos que las raíces z_1 y z_2 deben ser distintas, el grado será el de ordenaciones sin repetición de m cantidades 2 á 2, es decir: $m(m-1)$. El número de soluciones extrañas será la diferencia entre ambos números, es decir:

$$m^2-m(m-1)=m$$

Para evitar dichas soluciones reemplazaremos la segunda de las ecuaciones (724) por la ecuación: $f(z_1)-f(z_2)=0$ dividiendo á la vez esta nueva ecuación entre z_1-z_2. Es evidente que se suprimen así las soluciones que corresponden á $z_1=z_2$ que es el objeto buscado. Ahora bien, para conocer por una fórmula general el desarrollo

$$\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}$$

se tiene, de acuerdo con la fórmula de TAYLOR (Cap. VII, Primera Parte) y considerando á z_2-z_1 como incremento de la variable z_1:

$$f(z_2)=f(z_1+\overline{z_2-z_1})=f(z_1)+f'(z_1)\frac{z_2-z_1}{1}+f''(z_1)\frac{(z_2-z_1)^2}{1.2}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+f^{(m)}(z_1)\frac{(z_2-z_1)^m}{1.2\ldots\ldots m}=0$$

De esta fórmula se deduce:

$$\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}=f'(z_1)+f''(z_1)\frac{z_2-z_1}{1.2}+\ldots\ldots+f^m(z_1)\frac{{z_2-z_1}^{m-1}}{1.2.3\ldots\ldots m}=0$$

esta será, pues, la ecuación que en la práctica debe sustituirse á $f(z_2)=0$ en el sistema (724).

456. N. B. Si la funcion $\varphi(z_1, z_2)$ fuese *simétrica* con respecto á z_1 y z_2, el número de valores distinto de u sería el de *combinaciones* de m objetos dos á dos, es decir, $\frac{m(m-1)}{1.2}$ en lugar del de *ordenaciones* $m(m-1)$.

457. Pasemos á aplicar el método general contenido á algunos ejemplos.

1º **Ecuación de las sumas de las raíces tomadas dos á dos.** Las ecuaciones (724) serán:

$$f(z_1)=0,\ f'(z_1)+f''(z_1)\frac{z_2-z_1}{1.2}+\ldots\ldots=0,\ u=z_1+z_2$$

el grado de la ecuación final es $m(m-1)$ pero como admite tanto la raíz z_1+z_2 como la z_2+z_1 las raíces serán iguales dos á dos y el número de valores diversos será $\frac{m(m-1)}{1.2}$.

Sea por ejemplo la ecuación de tercer grado:

$$z^3+pz+q=0$$

las tres ecuaciones fundamentales serán:

$$z_1^3+pz_1+q=0,\ 3z_1^2+p+3z_1(z_2-z_1)+(z_2-z_1)^2=0,\ u=z_1+z_2 \qquad (725)$$

Comenzaremos por sustituir en la segunda en lugar de z_2 el valor uz_1 que da la tercera con lo cual se cambiará la segunda en: $z_1^2-uz_1+u^2+p=0$.

No habrá sino eliminar la incógnita z_1 entre la primera ecuación (725) y la que acaba de obtenerse, en las que para mayor sencillez podemos quitar á z los índices. Efectuando, pues, la eliminación por el método del M. C. D., resulta por ecuación final: $u^3+pn-q=0$ cuyo grado es $\frac{m(m-1)}{2}=3$.

NOTAS. 1ª Si buscamos la transformada en z de la ecuación propuesta, se encuentra una ecuación idéntica á la que acaba de obtenerse, salvo el cambio de u en z, lo que es de esperar, pues la condición: $z_1+z_2+z_3=0$ á que da lugar la forma de la propuesta origina la ecuación: $-z_3=z_1+z_2=u$.

2ª Si la ecuación de tercer grado propuesta no careciese de segundo término como hemos supuesto y tuviera la forma: $f(x)=z^3+az^2+bz+c=0$ siendo z_1, z_2, z_3 sus tres raíces, resultaría en general: $u=z_1+z_2$, $a=-(z_1+z_2+z_3)$, es decir: $z_3=-u-a$; de consiguiente, la transformada sería:

$$f(-u-a)=u^3+2au^2+(a^2+b)u+(ba-c)=0$$

2º **Ecuación de las diferencias y de los cuadrados de las diferencias de las raíces tomadas dos á dos.** Las ecuaciones (724) serán:

$$f(z_1)=0,\ f'(z_1)+f''(z_1)\frac{z_2-z_1}{1.2}+\ldots\ldots=0,\ u=z_2-z_1$$

sustituyendo en la segunda u en lugar de z_2-z_1 quedarán por ecuaciones con que operar:

$$f(z_1)=0,\ f'(z_1)+f''(z_1)\frac{u}{1.2}+f'''(z_1)\frac{u^2}{1.2.3}+\ldots\ldots=0 \qquad (726)$$

El grado de la ecuación final será $m(m-1)$, pero como admite tanto la raíz z_2-z_1 como la z_1-z_2 todas sus raíces serán iguales dos á dos y de signos contrarios. Dicha ecuación final sólo contendrá potencias pares de u y podrá *rebajarse* al grado *subduplo* $\frac{m(m-1)}{2}$ suponiendo $u^2=W$. La ecuación en W es la *ecuación de los cuadrados de las diferencias de las raíces.*

Sea, por ejemplo, la ecuación de tercer grado:

$$z^3+pz+q=0$$

que supondremos desprovista de su segundo término, porque para efectuar esta transformación preliminar, hay que restar una cantidad dada á las raíces (párrafo 378), y las diferencias entre ellas no varían si se les disminuye una misma cantidad.

Las ecuaciones (726) con que debemos operar son quitando los índices á la incógnita para más sencillez:

$$z^3+pz+q=0,\ 3z^2+3uz+(p+u^2)=0$$

es preciso, pues, eliminar á z entre estas dos ecuaciones; la primera division obliga á introducir el factor 3 én el dividendo, y origina por cociente $x-y$ y por resta:

$$2u^2z+2pz+u^3+pu+3q$$

la segunda división originará por cociente: $3z+(3u^3+3pu-9q)$ y por resta final: $u^6+6pu^4+9pu^2+(4p^3+27q^2)=0$ que es la *ecuación de las diferencias.*[1] Suponiendo en la ecuación obtenida $u^2=W$, resulta la *ecuación de los cuadrados de las diferencias:*

$$W^3+6pW^2+9p^2W+(4p^3+27q^2)=0$$

Si por ejemplo: $p=-7$, $9=7$, la propuesta sería:

$$x^3-7x+7=0$$

y la ecuación de los cuadrados de las diferencias es:

$$W^3-42W^2+441W-49=0$$

Si $p=-9$, $q=10$ la propuesta sería $x^3-9x+10=0$ y la ecuación de los cuadrados de las diferencias:

$$W^3-54W^2+729W-216=0$$

como hallamos en el párrafo 398 por medio de las funciones simétricas.

3º **Ecuación de los productos de las raíces tomadas dos á dos.** Las ecuaciones (724) serán:

$$f(z_1)=0,\ f'(z_1)+f''(z_1)\frac{z_2-z_1}{1.2}+f'''(z_1)\frac{(z_2-z_1)^2}{1.2.3}+\ldots\ldots=0,\ u=z_1z_2 \qquad (727)$$

el grado de la ecuación final será $m(m-1)$, pero como admite tanto la raíz z_1z_2 como la z_2z_1 sus raíces serán iguales dos á dos, su primer miembro cuadrado perfecto, y extrayendo raíz cuadrada, el grado definitivo será $\frac{m(m-1)}{2}$.

4º **Ecuación de los cocientes de las raíces tomadas dos á dos.** Las ecuaciones (724) son en este caso:

$$f(z_1)=0,\ f'(z_1)+f''(z_1)\frac{z_2-z_1}{1.2}+f'''(z_1)\frac{(z_2-z_1)^2}{1.2.3}+\ldots\ldots=0,\ u=\frac{z_2}{z_1}$$

el grado de la ecuación final es $m(m-1)$, pero como admite dicha ecuación tanto la raíz $\frac{z_2}{z_1}$ como $\frac{z_1}{z_2}$ será *recíproca* y susceptible de rebajarse al grado $\frac{m(m-1)}{1.2}$

458. **Evanescimiento de Radicales.** Comenzaremos por establecer un procedimiento bastante general, suponiendo una ecuación complicada con n radicales:

$$a\sqrt[\alpha]{z}+b\sqrt[\beta]{z'}+c\sqrt[\gamma]{z''}+\ldots\ldots=0 \qquad (728)$$

igualando cada radical á una incógnita resultan n ecuaciones:

$$\sqrt[\alpha]{z}=x,\ \sqrt[\beta]{z'}=y,\ \sqrt[\gamma]{z''}=u,\ \ldots\ldots \qquad (729)$$

1 En la segunda división que condujo á esta resta, se multiplicó el dividendo por y^2+p dos ocasiones, pero igualado este factor á cero reduce el divisor respectivo á $3q$, que es independiente de x; luego en la ecuacion final no hay *soluciones extrañas.*

estas ecuaciones se harán racionales elevando en cada una ambos miembros á la potencia marcada por el indice del radical que figura en ella; habrá, pues, n ecuaciones racionales que juntamente con la (728) hecha racional por la sustitución de las incógnitas en lugar de los radicales formarán un sistema de $n+1$ ecuaciones racionales con n incógnitas, del que se deducirá, por eliminación de las n incógnitas, la ecuación final desembarazada de radicales.

N. B. Hay que hacer notar que la ecuación final conduce á todos los valores de la incógnita que satisfacen á la ecuación primitiva, tomando en cuenta los valores múltiples de los radicales que encierra ó de las diversas ecuaciones contenidas en ella. Esto obedece á que cuando se supone un radical igual á una incógnita subsidiaria y se elevan los miembros de la ecuación á la potencia que expresa el índice, la ecuación subsiste cualquiera que sea la que se elija de las determinaciones que tiene el radical (Capítulo III.—Primera Parte).

459. Sea por ejemplo:

$$z-\sqrt{z-1}+\sqrt[3]{z+1}=0$$

según lo antes expuesto, se tendrán las ecuaciones:

$$z-x+y=0,\ x^2-z+1=0,\ y^3-z-1=0$$

Substituyendo en la segunda ecuación el valor que se obtiene para x en la primera, resultan las dos ecuaciones:

$$y^2+2zy+z^2-z+1=0,\ y^3-z-1=0 \tag{a}$$

Para efectuar con brevedad la eliminación, multiplicaremos la primera por y y restaremos de ella la segunda, á esta ecuación juntaremos la que se origina multiplicando la primera por $2z$, con lo que resultará el sistema:

$$2zy^2+(z^2-z+1)y+(z-1)=0,\ 2zy^2+4z^2y+2z^3-2z^2+2z=0 \tag{b}$$

restando estas ecuaciones se obtiene:

$$(3z^2+z-1)y+(2z^3-2z^2+z-1)=0 \tag{c}$$

Con objeto de encontrar otra ecuación de primer grado en y, escribiremos la primera ecuación (a) y la primera (b) bajo la forma:

$$(y+2z)y+(z^2-z+1)=0,\ (2zy+z^2-z+1)y+(z+1)=0 \tag{d}$$

reducidos sus primeros términos al mismo coeficiente, y restando, resulta:

$$(z^2-z+1)(2zy+z^2-z+1)-(z+1)(y+2z)=0$$

ó bien: $(2z^3-2z^2+z-1)y+(z^2-z+1)^2-(2z^2+2z)=0$, la que combinada con la (c) por substracción, después de hacer iguales los coeficientes de los primeros términos, conduce á la ecuación:

$$(2z^3-2z^2+z-1)^2=(z^2-z+1)^2(3z^2+z-1)-(2z^2+2z)(3z^2+z-1)$$

es decir, á la ecuación racional en z:

$$z^6-3z^5+8z^4+z^3+7z^2-7z+2=0.$$

460. Cuando puede evitarse por medio de artificios de cálculo el empleo laborioso

de los métodos de eliminación es conveniente hacerlo; tanto con este objeto como con el de presentar ejemplos, á continuación exponemos diversos casos particulares.

1º Sea

$$2\sqrt[5]{x-1}-\sqrt{x-1}=0$$

Sucesivamente iremos deduciendo:

$$2\sqrt[5]{x-1}=\sqrt{x-1}+1,\ 32(x-1)=\sqrt{x-1}(x^2+8x-4)+5x^2-4$$

$$5x^2-32x+28=-\sqrt{x-1}(x^2+8x-4)$$

finalmente, elevando al cuadrado y reduciendo:

$$x^5-10x^4+360x^3-1424x^2+1872x-800=0$$

2º Sea

$$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}+C=0$$

Tendremos sucesivamente:

$$\sqrt[3]{A}+C=-\sqrt[3]{B},\ A+3C\sqrt[3]{A^2}+3C^2\sqrt[3]{A}\times C^3=-B$$

$$3C(\sqrt[3]{A^2}+C)\sqrt[3]{A}=-(A+B+C^3)$$

como se tiene $\sqrt[3]{A}+C=-\sqrt[3]{B}$ resultará:

$$3C\sqrt[3]{AB}=A+B+C^3,\ 27C^3AB=(A+B+C^3)^3$$

expresión racional.

3º Sea

$$\sqrt[n]{A}+\sqrt[3]{B}+C=0$$

Dejaremos sólo en el segundo miembro á $\sqrt[n]{A}$ y elevaremos los dos miembros de la ecuación resultante á la potencia n, así obtendremos una ecuación cuyo primer miembro no contendrá más radicales que $\sqrt[3]{B}$ y $\sqrt[3]{B^2}$, porque los exponentes de las potencias á que habremos elevado á $\sqrt[3]{B}$ serán de la forma $3K$, $3K+1$ ó $3K+2$, y se tiene:

$$(\sqrt[3]{B})^{3K}=B^K,\ (\sqrt[3]{B})^{3K+1}=B^K\sqrt[3]{B},\ (\sqrt[3]{B})^{3K+2}=B^K\sqrt[3]{B^2}$$

Dicha ecuación podrá, pues, escribirse bajo la forma:

$$D+E\sqrt[3]{B}+F\sqrt[3]{B^2}=0$$

ó elevando al cubo y reduciendo, á la forma: $BE^3+D^3+B^2F^3-3BDEF=0$

4º Sea

$$x+\sqrt{y}=\sqrt[3]{z}$$

Tendremos sucesivamente:

$$x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y}=z,\ x^3+3xy-z=-\sqrt{y}\cdot(y+3x^2)$$

$$(x^3+3xy-z)^2=y(y+3x^2)^2$$

5º Sea

$$x=\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

Debe obtenerse: $$(x^2-y-z)^2=4yz$$

6º Sea

$$z=\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}$$

Tendremos sucesivamente:

$$(z-\sqrt{z})=\sqrt[3]{y},\ z^3-3z^2\sqrt{x}+32x-x\sqrt{x}=y$$

$$z^3+3zx-y=\sqrt{x}(x+3z^2),\ (z^3+3zx-y)^2=x(x+3z^2)^2$$

7º Sea

$$y=\sqrt[5]{x}-\sqrt{z}$$

Dejando á $\sqrt[5]{x}$ sólo en el segundo miembro, y operando análogamente á como ántes hemos procedido, se halla:

$$(y^5+10y^3z+5yz^2+x)^2=z(5y^4+10y^2z+z^2)^2$$

8º Sea

$$x=\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{x}$$

debe hallarse:

$$(x^3-y-z)^3=27x^3yz$$

461. Entre las demás aplicaciones de la teoría de la eliminación habría que mencionar dos muy importantes además de las anteriores: el *rebajamiento de las ecuaciones* y el *método para encontrar las raíces imaginarias*. Del primer asunto nos hemos ocupado ya lo bastante para los fines que debe llenar esta obra; y en cuanto al segundo, nos ocuparemos de él adelante, para no sacrificar el método á que nos hemos ceñido al escribir esta obra.

CAPÍTULO VIII.

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES.

Exposición general del problema.—Proposiciones preliminares.

462. **Exposición general del problema.** En el prólogo de esta obra hemos apuntado algunas consideraciones sobre la diferencia que hay entre la resolución de las ecuaciones *numéricas* y la de las *algebraicas*. Ahora bien, si á esas consideraciones preliminares añadimos las que nos sugiere la lectura de los capítulos que llevamos en la Segunda Parte de esta obra, concluiremos que en rigor el Álgebra es el *análisis de las ecuaciones*, y que el conjunto de sus proposiciones y de sus principios se refieren á ese objeto común. En resumen, que tres son propiamente las partes en que el Álgebra puede dividirse: 1º *La teoría general de las ecuaciones*, que estudia las propiedades comunes á las ecuaciones. 2º *La resolución de las ecuaciones numéricas* que tiene por objeto determinar los valores exactos ó aproximados de las raíces de una ecuación cuyos coeficientes son numéricos; y 3º *La resolución algebraica de las ecuaciones*, que tiene por objeto determinar la forma de una expresión compuesta con los coeficientes de la ecuacion, y que sustituída en ésta en lugar de la incógnita conduce á una identidad, ya sean *números* los citados coeficientes, ya, aunque considerados como datos, estén representados por letras.

La primera parte ha sido expuesta en lo que va escrito de esta Segunda Parte de la obra, y para emprender el estudio de la *resolución de las ecuaciones numéricas*, debemos entrar ántes en algunas explicaciones sobre el método que vamos á seguir.

Propuesta una ecuación numérica y desembarazada de sus raíces conmensurables iguales, sólo puede tener raíces conmensurables desiguales, raíces inconmensurables ó raíces imaginarias. Se ve que desde luego en una ecuación de tal especie lo primero que hay que averiguar es el número de sus raíces reales y de sus raíces imaginarias; es decir, la primera operación estriba en *separar* las raíces reales y las imaginarias. Habiendo encontrado que hay un cierto número de raíces reales, la segunda operación será buscar dos números *límites* entre los que queden comprendidas las raíces positivas que pueda haber y dos *números*, que serán el *límite superior* y el *límite inferior* entre los que queden comprendidas las negativas. Como esos límites superiores pueden ser muy grandes respecto á los *inferiores*, hay que efectuar una nueva *separación* determinando un límite