6º Sea

$$z=\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}$$

Tendremos sucesivamente:

$$(z-\sqrt{z})=\sqrt[3]{y},\ z^3-3z^2\sqrt{x}+32x-x\sqrt{x}=y$$

$$z^3+3zx-y=\sqrt{x}(x+3z^2),\ (z^3+3zx-y)^2=x(x+3z^2)^2$$

7º Sea

$$y=\sqrt[5]{x}-\sqrt{z}$$

Dejando á $\sqrt[5]{x}$ sólo en el segundo miembro, y operando análogamente á como ántes hemos procedido, se halla:

$$(y^5+10y^3z+5yz^2+x)^2=z(5y^4+10y^2z+z^2)^2$$

8º Sea

$$x=\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{x}$$

debe hallarse:

$$(x^3-y-z)^3=27x^3yz$$

461. Entre las demás aplicaciones de la teoría de la eliminación habría que mencionar dos muy importantes además de las anteriores: el *rebajamiento de las ecuaciones* y el *método para encontrar las raíces imaginarias.* Del primer asunto nos hemos ocupado ya lo bastante para los fines que debe llenar esta obra; y en cuanto al segundo, nos ocuparemos de él adelante, para no sacrificar el método á que nos hemos ceñido al escribir esta obra.

CAPÍTULO VIII.

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES.

Exposición general del problema.—Proposiciones preliminares.

462. **Exposición general del problema.** En el prólogo de esta obra hemos apuntado algunas consideraciones sobre la diferencia que hay entre la resolución de las ecuaciones *numéricas* y la de las *algebraicas.* Ahora bien, si á esas consideraciones preliminares añadimos las que nos sugiere la lectura de los capítulos que llevamos en la Segunda Parte de esta obra, concluiremos que en rigor el Álgebra es el *análisis de las ecuaciones*, y que el conjunto de sus proposiciones y de sus principios se refieren á ese objeto común. En resumen, que tres son propiamente las partes en que el Álgebra puede dividirse: 1º *La teoría general de las ecuaciones*, que estudia las propiedades comunes á las ecuaciones. 2º *La resolución de las ecuaciones numéricas* que tiene por objeto determinar los valores exactos ó aproximados de las raíces de una ecuación cuyos coeficientes son numéricos; y 3º *La resolución algebraica de las ecuaciones*, que tiene por objeto determinar la forma de una expresión compuesta con los coeficientes de la ecuación, y que sustituída en ésta en lugar de la incógnita conduce á una identidad, ya sean *números* los citados coeficientes, ya, aunque considerados como datos, estén representados por letras.

La primera parte ha sido expuesta en lo que va escrito de esta Segunda Parte de la obra, y para emprender el estudio de la *resolución de las ecuaciones numéricas*, debemos entrar ántes en algunas explicaciones sobre el método que vamos á seguir.

Propuesta una ecuación numérica y desembarazada de sus raíces conmensurables iguales, sólo puede tener raíces conmensurables desiguales, raíces inconmensurables ó raíces imaginarias. Se ve que desde luego en una ecuación de tal especie lo primero que hay que averiguar es el número de sus raíces reales y de sus raíces imaginarias; es decir, la primera operación estriba en *separar* las raíces reales y las imaginarias. Habiendo encontrado que hay un cierto número de raíces reales, la segunda operación será buscar dos números *límites* entre los que queden comprendidas las raíces positivas que pueda haber y dos *números*, que serán el *límite superior* y el *límite inferior* entre los que queden comprendidas las negativas. Como esos límites superiores pueden ser muy grandes respecto á los *inferiores*, hay que efectuar una nueva *separación* determinando un límite *superior* y uno *inferior* para cada raíz. Conocidos estos límites parciales, por decirlo así, la *separación* de las raíces reales está efectuada y sólo resta calcularlas. Ahora bien, estas raíces reales son ó *conmensurables* ó *inconmensurables*; si lo primero, para hallarlas se aplica á la ecuación el procedimiento propio que en su lugar expondremos; si lo segundo, se tratará la ecuación por los métodos que explicaremos á su tiempo, prosiguiendo el cálculo en este caso hasta obtener la aproximación deseada. Conocidas ya las raíces reales (conmensurables é inconmensurables) sólo queda por hallar las *imaginarias*, por medio del procedimiento que explicaremos y naturalmente en el supuesto de que existan. Termina con esta operación la resolución de la propuesta, y de consiguiente, hablando en términos generales, la de cualquiera ecuación numérica; con objeto de no hacer difusas estas explicaciones, dejamos para más adelante las reflexiones preliminares sobre la resolución de las ecuaciones algebraicas.

Precisamente la secuela de operaciones expuestas explica el método que hemos seguido: comenzamos por establecer los teoremas y las proposiciones que conducen á la *separación* absoluta de las raíces; nos ocupamos luego de la determinación de los *límites totales* que encierran las raíces, y en seguida de los *límites parciales* que comprenden cada raíz. Para pasar de la *separación* al *cálculo* de las raíces seguimos también el orden ya indicado: exponemos el procedimiento para hallar las raíces *conmensurables*, los métodos de aproximación para conocer las *inconmensurables*, y finalmente el que es bastante usual para determinar las *imaginarias*.

Supondremos (salvo advertencia contraria) que los polimonios están ordenados segun las potencias decrecientes de la variable y que los *coeficientes numéricos son reales.*

Proposiciones preliminares.

463. Comenzaremos por fundar algunos principios que servirán de base á nuestro estudio.

I. *Si un número* a *sustituído en lugar de* x *en un polimonio:*

$$x^m + Px^{m-1} + \dots\dots + Tx + U = 0 \qquad (730)$$

(función entera de x, con coeficientes reales y numéricos), *produce por resultado de la sustitución una cantidad* A, *se puede obtener otro resultado que difiera del primero una cantidad menor que cualquiera magnitud dada, cambiando* x *por* a + h *y teniendo* h *un valor pequeño y convenientemente escogido.*

Llamemos A, B, C, D, ..., los valores que toman los polimonios derivados de la propuesta para la condición $x = a$.

El polimonio (730) al poner $x = a + h$ se cambia en:

$$A + Bh + Ch^2 + \dots\dots + h^m = A + h(B + Ch + \dots\dots + h^{m-1}) = 0 \qquad (731)$$

La cantidad:

$$h(B + Ch + \dots\dots + h^{m-1})$$

es la expresión de la diferencia entre los resultados de las sustituciones de x por a y por $a + h$ que puede ser menor que toda magnitud dada para un valor conveniente de h.

Supongamos que los coeficientes se hallan en el caso más desfavorable, siendo iguales todos entre sí y al mayor de ellos que llamaremos K.

Tendremos:

$$h(B + Ch + \dots\dots + h^{m-1}) < K(1 + h + h^2 + \dots\dots + h^{m-1})h$$

pero como:

$$Kh(1 + h + h^2 + \dots + h^{m-1}) = Kh\frac{1 - h^m}{1 - h} = \frac{Kh}{1-h} - \frac{Kh^{m-1}}{1-h}$$

Si h es menor que 1 se tendrá:

$$\frac{Kh}{1-h} - \frac{Kh^{m+1}}{1-h} < \frac{Kh}{1-h}$$

y á *fortiori:*

$$h(B + Ch + \dots\dots) < \frac{Kh}{1-h} \qquad (732)$$

Si deseamos, por ejemplo, que la diferencia sea menor que una cantidad N tendremos:

$$\frac{Kh}{1-h} = \text{ó} < N \text{ que produce } h = \text{ó} < \frac{N}{N+K}$$

y á *fortiori* (q):

$$h(B + Ch + Dh^2 + \dots\dots) < N \qquad (733)$$

que es lo que anuncia el teorema.

II. *Si dos números de signos cualesquiera sustituídos por* x *en la ecuación* (730) *dan resultados de signos contrarios, comprenden entre sí una raíz real por lo menos de dicha ecuación.*

Sean p y q dichos números ($p < q$). Supongamos que los resultados de la sustitución de p y q en la ecuación son respectivamente P y Q de signos contrarios.

Por estar sujeto el polinomio á la ley de la continuidad, si hacemos crecer á p por grados muy cortos, observaremos:

1º Que cada sustitución de p y los valores subsecuentes originados por el crecimiento de p, nos darán un resultado del mismo signo que el que produce la sustitución de p.

2º Pero como $p < q$, si continúa creciendo p, llegará un momento en que se confunda con q y produzca signo contrario.

3º Como los signos de las sustituciones de p y q son diversos, necesita p en su crecimiento pasar por un valor nulo para poder cambiar de signo, y en el momento que cierto valor de p reduzca á *cero* la ecuación, dicho valor será raíz de ella, raíz comprendida como vemos entre p y q.

N. B. Una función dada puede cambiar de signo pasando por 0 ó por el ∞, pero siendo finitos los coeficientes del polinomio considerado y no entrando x en el denominador por ser entero el polinomio, el valor que cambie de signo no pasará por el ∞ sino por 0, y será raíz de la ecuación.

III. *Si dos números* p *y* q *comprenden un número impar* $2n + 1$ *de raíces, la sustitución de uno de ellos en el polimonio da signo contrario al que produce el otro sustituído. Si comprenden un número par de raíces, los signos de los resultados son iguales.*

Sean $a, b, c, \dots\dots$ las raíces (730) comprendidas entre p y q, ($p < q$) y $\varphi(x)$ el producto de los factores de primer grado en x, que corresponden en general á las raíces reales no comprendidas entre p y q.

El polinomio (730) tomará la forma:

$$F(x) = x^m + Px^{m-1} + \dots\dots = (x - a)(x - b) \dots\dots \varphi(x)$$

poniendo $x=p$ y luego $x=q$

$$F(p)=(p-a)(p-b)\ldots\ldots\varphi(p),\ F(q)=(q-a)(q-b)\ldots\ldots\varphi(q)$$

Los valores $\varphi(p)$ y $\varphi(q)$ deben ser de signo igual, pues de lo contrario habría, según el principio II una raíz cuando menos entre p y q, lo que es contra el supuesto de que $\varphi(p)$ y $\varphi(q)$ encierran á las raíces no comprendidas entre p y q.

Dividiendo $F(p)\div F(q)$, queda:

$$\frac{F(p)}{F(q)}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)\ldots\ldots\varphi(p)}{(q-a)(q-b)(q-c)\ldots\ldots\varphi(q)}=\frac{(p-a)(p-b)\ldots\ldots}{(q-a)(q-b)\ldots\ldots}\times\frac{\varphi(p)}{\varphi(q)}$$

pero como p y q comprenden entre sí las raíces $a, b, c, \ldots\ldots$ y $p<q$, resulta:

$$p<a, b, c, \ldots\ldots, q>a, b, c, \ldots\ldots$$

luego los cocientes $\frac{p-a}{q-a}$, $\frac{p-b}{q-b}$, etc., serán negativos y como $\frac{\varphi(p)}{\varphi(q)}$ es positivo, el producto:

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)\ldots\ldots}{(q-a)(q-b)(q-c)\ldots\ldots}\times\frac{\varphi(p)}{\varphi(q)}$$

será del signo del factor:

$$\frac{(p-a)(p-b)\ldots\ldots}{(q-a)(q-b)\ldots\ldots}$$

Si hay número par de cocientes, es decir, de raíces, el signo es positivo, y multiplicado este primer factor por $\frac{\varphi(p)}{\varphi(q)}$ produce un resultado positivo.

Si el número de cocientes ó raíces es impar, el signo del primer factor es negativo y lo mismo el resultado; luego las expresiones:

$$F(p)=(p-a)(p-b)(p-c)\ldots\ldots\varphi(p),\ F(q)=(q-a)(q-b)(q-c)\ldots\ldots\varphi(q)$$

serán de signos iguales ó contrarios según que sea par ó impar el número de raíces. Finalmente: *si dos números sustituídos en lugar de* x *en una ecuación, producen dos resultados de signos contrarios, comprenden una raíz por lo menos, pero pueden comprender un número impar de raíces y si dan resultados de signos iguales ó no comprenden ninguna raíz ó comprenden un número par de raíces.*

IV. Para más claridad expondremos, en forma de problema, la proposición de que vamos á ocuparnos, y la enunciaremos diciendo que *se trata de buscar un número que sustituído por* x *en la ecuación* [730], *haga el primer término* x^m *mayor que la suma aritmética de los demás.*

Sea:

$$x=x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots\ldots+Tx+U=0 \qquad (734)$$

y N el mayor coeficiente negativo de la ecuación.

Si se considera la expresión:

$$x_1=x^m-N(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots\ldots+x+1) \qquad (735)$$

es evidente que para todo valor positivo de x_1 el valor de x será igual ó mayor que el de x_1 y que de consiguiente si un valor positivo de x hace positivo á x_1 con mayor razón satisfará la condición $x>0$. Es fácil asignar á x un valor l partiendo del cual to-

dos los mayores que él hagan positivo á x_1 y á *fortiori* á x; partiendo de l ningun valor debe nulificar á x; así pues, puede tomarse l por valor del número pedido que, como se vé, es justamente el *límite superior de las raíces positivas.*

Para determinar á l recordaremos que en álgebra elemental se demuestra la relación:

$$x^m-1=(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots\ldots+x+1)$$

que transforma la expresión (n) en la siguiente:

$$x_1=x^m-N\frac{x^{m-1}}{x-1}=\frac{x^m(x-1-N)+N}{x-1}$$

Vemos que para que x_1 sea positivo es preciso tener:

$$x=1+N$$

que produce:

$$x_1=\frac{x-1}{N} \qquad (x>1)$$

ó bien:

$$x>1+N$$

que da con mayor razón un resultado positivo.

Luego: *el mayor coeficiente negativo de la ecuación, aumentado una unidad,* (habiendo hecho de antemano que el coeficiente del primer término de la ecuación sea 1), *y todo número mayor que él hacen que el primer término* x^m *sea mayor que la suma aritmética de los demás, dicho número es precisamente un límite superior de las raíces positivas de la ecuación.*

La indicación de este límite, como se ve, bastante sencilla, se atribuye á MAC-LAURIN.

Si de antemano no se ha hecho que el primer término de la ecuación sea 1, sino que fuese por ejemplo N^1, el valor de l sería:

$$l=1+\frac{N}{N'}$$

V. *Toda ecuación cuyos términos son todos positivos, sólo puede tener raíces negativas.*

Porque cualquier valor positivo sustituído en lugar de x, no nulificaría la ecuación. En este caso: al pasar de la separación al cálculo de las raíces, es inútil buscar el límite superior de las raíces positivas, porque es 0.

VI. *Toda ecuación completa con términos alternativamente positivos y negativos, es decir, con variaciones de signo, sólo admite raíces reales positivas.*

Porque cualquier número negativo sustituído en la ecuación en lugar de x, hará todos los términos positivos si la ecuación es de grado par, ó negativos si es de grado impar; en ambos casos no se nulifica la ecuación.

En este caso es inútil buscar límites negativos.

Lo mismo sucede en una ecuación incompleta de tal género que si se pone por x, la cantidad $-y$, resulta una transformada con *permanencias* solamente, es decir, sin ninguna variación de signo.

VII. *Toda ecuación de grado impar y coeficientes reales, tiene cuando menos una raíz real de signo contrario al último término.*

Sea:

$$x^m + Px^{m-1} + \ldots\ldots + Tx \pm U = 0$$

se presentan dos casos.

1er. CASO. **U negativo.** Si $x=0$, la ecuación anterior se reduce á: $-U$.

Si:

$$x = K + 1$$

siendo K el mayor coeficiente de la ecuación, como según lo demostrado ya, x^m es mayor que la suma aritmética de los demás términos, el resultado es del signo de x^m, es decir, positivo. Luego si: 0 y $K+1$ producen resultados de diverso signo, comprenden cuando menos una raíz.

2º CASO. **U positivo.** Si $x=0$ la ecuación se reduce á: $+U$.

Si:

$$x = K + 1$$

el resultado es de signo contrario al de x^m, es decir, negativo; luego entre 0 y $-K+1$ hay, cuando menos, una raíz comprendida.

VIII. *Toda ecuación de grado par y coeficientes reales, con el último término negativo, tiene cuando menos dos raíces reales, una positiva y una negativa.*

1º Sea $-U$ el último término de la ecuación.

La hipótesis $x=0$ da por resultado la sustitución $-U$.

$x = K + 1$ produce signo positivo pues m es par.
$x = -(K+1)$ „ „ „ „ „ „ „

Así pues, tenemos que:

$K+1$	da signo	$+$
0	„ „	$-$
$-(K+1)$	„ „	$+$

hay, pues, dos raíces reales comprendidas entre los tres valores.

2º Sea $+U$ el último término, entonces:

$K+1$	da signo	$+$
0	„ „	$+$
$-(K+1)$	„ „	$+$

en este caso nada se deduce.

Efectivamente, las ecuaciones que tienen raíces imaginarias tienen esta forma, porque si fueran de grado impar tendrían cuando menos una raíz real, y si siendo de grado par su último término fuese negativo, tendrían á lo menos dos.

IX. *En una ecuación de grado impar, las raíces reales de signo contrario al último término existen en número impar, y las raíces del mismo signo* (si las hay) *en número par.*

Si la ecuación es de grado par, cuando el último término es negativo, las raíces reales, tanto positivas como negativas, son en númeio impar, y si el último término es positivo las raíces de cada especie son en número par.

En general, debemos demostrar que: *cuando el último término de la ecuación es positivo, el número de raíces reales positivas de la ecuación es par; y si es negativo, el número de raíces es impar.*

Sea $+U$ el último término, para $x=0$ la ecuación se reduce á: $+U$.

Para $x=K+1$ el resultado es positivo, luego entre 0 y $K+1$ debe de haber ó ninguna raíz, ó un número par de raíces.

Si el término es $-U$, $x=0$ produce $-U$; el valor $x=K+1$ da signo positivo, luego entre 0 y $K+1$ hay cuando menos una raíz ó un número impar de raíces.

X. Como hemos visto que hay tantas raíces reales como grado la ecuación, es decir, que si éste es par ó impar, el número total de raíces reales es par ó impar, deducimos *que si hay raíces imaginarias deben existir en número par.*