CAPÍTULO IX.

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES.

Teorema de Descartes.—Teorema de Rolle.

TEOREMA DE DESCARTES.

464. **Definiciones.** Este teorema permite asignar un límite superior al número de raíces reales de una ecuación de la forma:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots\ldots + U = 0 \tag{736}$$

Hay *permanencia* en dos términos consecutivos de una serie $a, b, c, d, \ldots\ldots l$, cuando son del mismo signo, y hay *variación* cuando son de signos contrarios.

465. **Proposiciones preliminares.** 1ª *En una función entera, entre dos términos de signos contrarios hay siempre un número impar de variaciones; entre dos términos del mismo signo hay siempre un número par de variaciones* (cero se considera como número par). Este enunciado no requiere demostración, tiene carácter axiomático.

2ª *Cuando una ecuación algebraica* $F(x) = 0$ *cuyo primer término se ha hecho positivo no admite sino raíces negativas y raíces imaginarias, el último término de su primer miembro es positivo necesariamente.* En efecto, si fuere *negativo* habría á lo ménos una raíz *positiva* (Capítulo VIII. Segunda Parte), lo que es contra la *hipótesis.*

466. El teorema de Descartes se basa en las precedentes proposiciones y en el siguiente lema:

LEMA. *Siendo* a *un número positivo, si se multiplica la función entera* $F(x)$ *por el término* $x - a$, *es decir, si se introduce la raíz positiva* a, *el producto* $(x - a)F(x)$ *tiene cuando menos una variación más, ó en general un número impar de variaciones más que el multiplicando.*

Consideremos, pues, un polinomio ordenado según las potencias decrecientes de x:

$$Ax^m + \ldots\ldots - Bx^n - \ldots\ldots + Cx^p + \ldots\ldots - Dx^q - \ldots\ldots \pm Ux^r \pm \ldots\ldots \pm V$$

En este polinomio se supone que del término Ax^m al Bx^n exclusive, sólo hay términos positivos; del Bx^n al Cx^p exclusive, sólo hay negativos, etc., del Ux^r en adelante los signos son cualesquiera. Multiplicando, pues, este polinomio por $x - a$ resulta por cuadro de operación el siguiente:

$$\begin{array}{l}
Ax^m + \ldots\ldots - Bx^n - \ldots\ldots\ldots + Cx^p + \ldots\ldots\ldots - Dx^q - \ldots\ldots\ldots \pm Ux^r \pm \ldots\ldots\ldots \pm V \\
\quad x - a \\
\hline
Ax^{m+1} + \ldots - Bx^{n+1} - \ldots\ldots + Cx^{p+1} + \ldots\ldots - Dx^{q+1} - \ldots\ldots \pm Ux^{r+1} \pm \ldots\ldots \pm Vx \\
\qquad - \ldots - B'x^{n+1} + \ldots\ldots + C'x^{p+1} - \ldots\ldots - D'x^{q+1} + \ldots\ldots \pm U'x^{r+1} \mp \ldots\ldots\ldots \mp Va \\
\hline
Ax^{m+1} \ldots\ldots - (B+B')x^{m-1} \ldots + (C+C')x^{p+1} \ldots - (D+D')x^{q+1} \ldots \pm (U+U')x^{r+1} \ldots\ldots \mp Va
\end{array}$$

El primer producto por x es muy fácil de entender; en cuando al segundo, se forma así: al multiplicar $-a$ por el multiplicando se originan términos por $-a$ negativos desde el $-Aax^m$ hasta el que se origina de multiplicar $-a$ por el término que precede á Bx^n que es del grado $n+1$, es decir, el producto será $-B'x^{n+1}$ designando por B' el producto de a por el coeficiente del término á que nos referimos. De igual manera se forman los demás términos del segundo producto parcial, y efectuando la suma de ambos productos parciales resulta el total. Para efectuar esta última operación escribimos desde luego Ax^{m+1}, pero como no sabemos qué signo definitivo nos den las reducciones de los términos que le siguen hasta $-Bx^{n+1}$ exclusive con los que preceden á $-B'x^{n+1}$ en el segundo producto parcial, ponemos puntos suspensivos. Al llegar á $-Bx^{n-1}$ y $-B'x^{n+1}$, como tienen el mismo signo, se suman escribiendo $-(B+B')x^{n+1}$, y así se prosigue hasta el fin.

Ahora bien, aunque no conozcamos los signos intermedios entre el que afecta Ax^{m+1} y el que afecta á $(B+B')x^{n+1}$, según la primera proposición (párrafo 465), habrá entre Ax^{m+1} y $(B+B')x^{n+1}$ *un número* IMPAR *de variaciones* puesto que son de signos contrarios, es decir, *cuando menos una variación* como sucede entre los términos Ax^m y Bx^n del multiplicando, más un *número par de variaciones* que puede ser cero. Análogas consideraciones se seguirán haciendo, hasta que al llegar al intervalo entre

$$\pm(U+U')x^{r+1}$$

y $\mp Vx$ se ve que en el producto hay en dicho intervalo un *número impar de variaciones*, es decir, cuando menos *una*, más *un número par*, que puede ser cero, mientras que en el intervalo entre $\pm Ux^r$ y $\pm V$ no hay por hipótesis ninguna variación, ó si las hay son en número par. Como se ve, el número de variaciones del producto $(x-a)F(x)$ sobrepasa en una unidad más una suma de números pares positivos, que pueden ser cero, al número de variaciones del multiplicando $F(x)$, es decir, que el *exceso del número de variaciones del producto sobre el número de variaciones del multiplicando es un número impar que puede reducirse á la unidad.*

Si llamamos v el número de variaciones del multiplicando, y designamos por V un número cualquiera que puede ser cero, y, por consiguiente, por $2V$ un número par positivo que puede ser nulo cuando lo sea V, el número de variaciones del producto será:

$$v + 1 + 2V$$

N. B. Cada grupo del multiplicando puede contener no varios términos como hemos supuesto, si uno solo; en este caso, el último término del multiplicando sería $\pm Ux^r$ y V sería nulo. El producto terminaría en los términos:

$$\pm(U+U')x^{r+1} \mp Uax^2$$

y como se ve, las conclusiones formuladas anteriormente no se modifican.

467. Basándose en este lema que hemos procurado explicar, la demostración del *Teorema de* DESCARTES es inmediata; dicho Teorema se enuncia así: *Si* $F(x)=0$ *representa una ecuación algebraica de coeficientes reales en la que* $F(x)$ *es un polinomio ordenado respecto á las potencias de* x, *el número de raíces positivas de la ecuación nunca es mayor que el número de variaciones de la misma ecuación, y la diferencia entre el número de variaciones y el número de raíces positivas ó es cero ó es un número par.*

Consideremos una ecuación algebraica de coeficientes reales $F(x)=0$, y sea $\varphi(x)$ el polinomio que encierra los factores lineales correspondientes á sus raíces reales negativas y á sus raíces imaginarias; finalmente, sea:

$$\psi(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots$$

el polinomio que comprende las raíces reales. Tendremos:

$$F(x)=\varphi(x)\psi(x)$$

de donde:

$$\frac{F(x)}{\psi(x)}=\varphi(x)$$

Si en el polinomio $\varphi(x)$ sustituímos por x los valores: $x=0$, $x=\infty$ no debe haber cambio de signo, puesto que no contiene raíces positivas por el supuesto, luego el primero y el último término de $\varphi(x)$ deben tener el mismo signo (que podemos suponer positivo). Como entre dos términos del mismo signo (Proposición 1ª, párrafo 465) hay un número *par* de variaciones, el polinomio $\varphi(x)$ tendrá un número *par* de *variaciones.*

Si en seguida se multiplica sucesivamente el polinomio $\varphi(x)$ por cada uno de los factores lineales correspondientes á las raíces positivas y que constituyen $\psi(x)$, se llegará á obtener el polinomio $F(x)$. Ahora bien, á cada multiplicación se introduce un número *impar* de variaciones; de consiguiente, al ejecutar tantas multiplicaciones como raíces positivas tiene $F(x)$, resultará un número impar de variaciones multiplicado por el número de raíces, y si m representa el número de raíces y $2k$ un número par positivo que puede ser nulo, el número de variaciones introducidas es:

$$(2k+1)m=2km+m$$

Finalmente, como m es el número de raíces positivas, la diferencia entre el número de variaciones y el de raíces será:

$$2km+m-m=2km$$

que es un número par.

(Demostración de *Gauss.*)

467. **Corolario I.** *En una ecuación cualquiera, el número de raíces negativas nunca es mayor que el de variaciones de la transformada en* $-x$ *deducida de la propuesta, y la diferencia entre el número de variaciones y el de raíces negativas ó es cero ó es un número par.*

Corolario II. *Cuando el primer miembro de una ecuación sólo presenta una variación, esta ecuación sólo admite una sola raíz positiva*, puesto que la diferencia entre el número de variaciones y el de raíces positivas, debiendo ser un número par, en este caso sólo puede ser cero.

NOTAS. 1ª Cuando la ecuación es completa, es inútil buscar la transformada en $-x$, porque entonces es evidente que: *los números de variaciones y de permanencias de la propuesta son los límites superiores de los números de raíces positivas y negativas que puede admitir y las diferencias respectivas de existir son números pares.* En opinión de GAUSS la ecuación puede ser completa é incompleta para la primera parte de la regla, referente á las raí-

ces positivas, pero para la segunda, relativa á las negativas, debe ser completa. Para fijar las ideas sea por ejemplo la ecuación:

$$x^4-5x^2+8x-6=0$$

Por ser negativo el último término y ser *par* el grado de la ecuación (Capítulo VIII. Segunda Parte) debe haber cuando menos dos raíces reales, una positiva y una negativa, y sin embargo, al no haber ninguna *permanencia* parece no admitir ninguna raíz negativa.

Si completamos la ecuación resulta:

$$x^4\pm 0x^3-5x^2+8x-6=0$$

presenta entonces una *permanencia*, ya tomemos el signo superior, ya el inferior de

$$\pm 0.x^3$$

En conclusión, para decidir la existencia de las raíces positivas, tan lo podemos averiguar con la ecuación incompleta como con la completa, mientras que para las negativas es preciso que la ecuación sea completa.

Podemos, pues, decir en general que: *en toda ecuación completa ó incompleta el número de raíces positivas está limitado por el de variaciones, y el de negativas por el de variaciones que presenta la transformada en* $-x$. Esta regla equivale, pues, á reunir la proposición directamente demostrada con el corolario I.

Sea la ecuación:

$$x^4-5x^3-7x^2+29x+30=0$$

como tiene *dos variaciones* no puede admitir más de *dos raíces positivas.* La transformada en $-x$ es:

$$x^4+5x^3-7x^2-29x+30$$

como presenta *dos variaciones*, la propuesta no puede admitir más que *dos raíces negativas.* En efecto, aplicando á la propuesta el procedimiento que adelante explicaremos, para hallar las raíces conmensurables resultan por raíces:

$$3,\ 5,\ -2,\ -1$$

2º En ocasiones puede averiguarse la existencia de raíces imaginarias; por ejemplo, sea la ecuación:

$$x^3+px+q=0$$

que completada es:

$$x^3\pm 0.x^2+px+q=0$$

Tomando el signo superior hay tres *permanencias*, es decir, á lo más tres raíces reales negativas, y tomando el inferior hay dos variaciones y una *permanencia*, es decir, á lo más dos raíces positivas y una negativa. Como ambas conclusiones son contradictorias, deducimos que debe haber varias raíces imaginarias. En fin, como el grado de la ecuación es impar y el signo de q es negativo, presumimos que debe haber una raíz real negativa y dos imaginarias.

468. *Límites relativos al número de raíces imaginarias.* 1º Sea v el número de variaciones

de la propuesta, y v' el de m transformadas en $-x$, P el número de raíces positivas, N el de negativos é I el de imaginarias. Evidentemente se tiene:

$$m = \mathrm{P} + \mathrm{N} + \mathrm{I}$$

de donde:

$$m - \mathrm{P} - \mathrm{N} = \mathrm{I}$$

es decir:

$$m - (v + v') < \text{ó} = \mathrm{I}$$

así pues, el número $m - (v + v')$ es un *límite inferior del número* I *de raíces imaginarias.*

2º Agregando y quitando $v + v'$ al segundo miembro de la igualdad

$$\mathrm{I} = m - \mathrm{P} - \mathrm{N}$$

resulta:

$$\mathrm{I} = (v - \mathrm{P}) + (v' - \mathrm{N}) + (m - v - v')$$

Ahora bien, $v' - \mathrm{N}$ y $m - v - v'$ son números pares que pueden ser cero, de consiguiente:

$$\mathrm{I} > \text{ó} = v - \mathrm{P}$$

que es otro *límite inferior del número* I *de raíces imaginarias.*

3º *Un vacío cualquiera entre dos términos del mismo signo, y un vacío de dos términos cuando ménos entre dos términos de signos diversos conducen á la existencia de dos raíces imaginarias cuando ménos.*

Sean $\mathrm{A}x^n$ y $\mathrm{B}x^r$ los dos términos considerados entre los que hay un vacío, y supongámoslos por lo pronto del mismo signo. Pueden suceder dos cosas: ó ambos son de grado *par* ó *impar* ó mientras uno es de grado *par* el otro es de grado *impar;* en otras palabras, ó son de *igual paridad* ó son de *diversa paridad.*

I. *Son de igual signo y de igual paridad.* En este caso es preciso que *á lo menos* falte un término entre ellos y se tenga $n - r > \text{ó} = 2$, conservan su signo en la transformada en $-x$ y no originan *ninguna variación* esta última en la propuesta y en la transformada.

II. *Son del mismo signo y de diversa paridad.* Entonces faltarán *cuando menos* dos términos entre ellos, y se tendrá $n - r > \text{ó} = 3$, originarán una sola *variación* por total en la propuesta y en la transformada.

Según el teorema de Descartes el número de raíces reales posibles se disminuirá cuando menos en dos unidades en los dos casos precedentes.

III. *Son de signos contrarios y de la misma paridad.* Entonces faltarán *á lo menos* tres términos entre ellos, y se tendrá $n - r > \text{ó} = 4$, permanecerán con signo diverso en la transformada en $-x$, y originarán, pues, *dos variaciones* en la propuesta y en la transformada.

IV. *Son de signos contrarios y de diversa paridad.* Entonces faltarán *á lo menos* dos términos entre ellos, y se tendrá $n - r > \text{ó} = 3$, originarán *una variación* en la propuesta y ninguna en la transformada, es decir, *una sola variación* por total.

El número de raíces reales posibles se disminuirá, pues, cuando menos, en dos unidades. Así pues, *el doble del número de vacíos* (en el sentido expresado) *es un límite inferior del número de raíces imaginarias de la propuesta.*

Nota. Es evidente que un vacío de un solo término entre dos de signos diversos se excluye de la demostración.

4º *Sea la ecuación* $\mathrm{F}(\mathrm{x}) = 0$ *y* a *un número positivo. Si el número de variaciones del producto* $\varphi(\mathrm{x})$ *obtenido multiplicando* $\mathrm{F}(\mathrm{x})$ *por el término* $\mathrm{x} - \mathrm{a}$ *sobrepasa en* $2k + 1$ *unidades al número de variaciones* v *de* $\mathrm{F}(\mathrm{x})$, *la propuesta admite cuando menos* 2k *raíces imaginarias.* El polinomio $\mathrm{F}(x)$ tiene v variaciones, la ecuación $\mathrm{F}(x) = 0$, P raíces positivas, el polinomio $\varphi(x)$ por hipótesis tendrá $v + 2k + 1$ variaciones y la ecuación $\varphi(x) = 0$; $\mathrm{P} + 1$ raíces positivas puesto que se introdujo la raíz a para formarla. Esta última ecua-

ción admitirá (párrafo 468–2º) cuando menos un número de raíces imaginarias expresado por:

$$(v + 2k + 1) - (\mathrm{P} + 1) = (v - \mathrm{P}) + 2k$$

Pero $v - \mathrm{P}$ es un número par positivo que puede ser nulo (párrafo 467) y $\varphi(x) = 0$ tiene las mismas raíces que $\mathrm{F}(x) = 0$ salvo la a que se introdujo; de consiguiente, $2k$ es un límite inferior del número de raíces imaginarias de $\mathrm{F}(x) = 0$.

La indicación de este límite se debe á Sturm.

APLICACIONES.

469. 1ª Sean la ecuación propuesta y su transformada:

$$x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 1 = 0 \quad x^5 - 3x^3 - 5x^2 - 7x - 1 = 0$$

Teniendo la propuesta cuatro variaciones podrá admitir 4, 2 ó ninguna raíz positiva, y teniendo la transformada una sola variación, la propuesta podrá admitir una sola raíz negativa. Como ha de haber cinco raíces, pues el grado de la ecuación es 5, se pueden establecer las siguientes combinaciones:

(1)	4	raíces positivas,	1	raíz negativa,	0	raíces imaginarias.
(2)	2	„ „	1	„ „	2	„ „
(3)	0	„ „	1	„ „	4	„ „

Para aplicar el límite de Sturm, multiplicando la propuesta por $x - 1$ obtenemos:

$$x^6 - x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 8x - 1$$

Este producto encierra 5 variaciones, mientras que la propuesta sólo encierra cuatro; la diferencia es $2k + 1 = 0 + 1$, es decir, en este caso dicho límite inferior expresa que *cuando menos hay* 0 *raíces imaginarias.* Aplicando el límite del párrafo 1º también resultaría:

$$m - (v + v') = 5 - (4 + 1) = 0$$

2ª Analizar en el sentido indicado en la anterior aplicación las ecuaciones:

$$x^6 + x^3 + x^2 + x - 1 = 0, \qquad x^5 - 4x^4 - 16x^3 + 56x^2 - 17x + 60 = 0$$
$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 62x + 60 = 0, \qquad x^3 + 7x^2 + 2x - 40 = 0$$

FORMA DEL TEOREMA DE DESCARTES CUANDO LA ECUACIÓN PROPUESTA TIENE TODAS SUS RAÍCES REALES.

470. *Cuando de antemano se sabe que la ecuación propuesta tiene todas sus raíces reales, el número de raíces positivas es justamente el número de variaciones de la propuesta, y el número de raíces negativas es el de variaciones de la transformada en* $-x$. Sea P el número de raíces reales positivas, N el número de raíces reales negativas, v el número de variaciones, v' el de variaciones de la transformada y m el grado de la ecuación, tendremos:

$$\mathrm{P} + \mathrm{N} = m, \quad v + v' < \text{ó} = m \text{ de consiguiente } v + v' < \text{ó} = \mathrm{P} + \mathrm{N}$$

ahora bien, como se tiene:

$$v > \text{ó} = \mathrm{P}, \quad v' > \text{ó} = \mathrm{N}$$

deduciremos que no puede ser $v > \mathrm{P}$ porque la desigualdad anterior origina por compensación $v' < \mathrm{N}$, lo que es absurdo; de consiguiente $v = \mathrm{P}$, si fuese $v' > \mathrm{N}$, resultaría $v < \mathrm{P}$ que acabamos de ver que es imposible, luego $v' = \mathrm{N}$.

470. **Corolario I.** *Toda ecuación con todas sus raíces reales y de una sola especie* (todas positivas ó todas negativas), *es completa, y su primer miembro encierra ó sólo variaciones si son todos positivos, ó sólo permanencias si son negativos.*

Corolario II. *Si* a *es una cantidad positiva y* $\mathrm{F}(\mathrm{x})=0$ *una ecuación con todas sus raíces reales y se forma el producto* $(\mathrm{x}-\mathrm{a})\mathrm{F}(\mathrm{x})$, *este producto encierra una variación de más que* $\mathrm{F}(\mathrm{x})$.

DETERMINACION EN EL SUPUESTO DE LA EXISTENCIA DE SOLO RAÍCES REALES, DEL NÚMERO DE ELLAS COMPRENDIDAS ENTRE DOS NÚMEROS DADOS.

Método de *Jacobi.*

471. Sea $\mathrm{F}(x)=0$ la ecuación propuesta, y α y $\beta > \alpha$ dos números dados. Para averiguar el número de raíces reales que comprenden, procederemos de la manera siguiente:

Transformemos la propuesta en otra ecuación $f(y)=0$ cuyas raíces satisfagan la condición:

$$y=\frac{x-\alpha}{\beta-x}$$

de esta ecuación resulta:

$$x=\frac{\beta y+\alpha}{y+1}$$

y la transformada se escribirá *simbólicamente* así:

$$f(y)=f\left(\frac{\beta y+\alpha}{y+1}\right)=0$$

Ahora bien, esta ecuación tiene todas sus raíces reales como la propuesta, y sus raíces positivas corresponden á las raíces reales de $\mathrm{F}(x)=0$ *comprendidas* entre α y β, son en igual número según se deduce de la fórmula misma de la transformación. Así pues, el número de variaciones de $f(y)=0$ resuelve el problema.

APLICACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LOS CUADRADOS DE LAS DIFERENCIAS A LA INVESTIGACIÓN SOBRE LA REALIDAD DE LAS RAÍCES.

472. *Si la ecuación* $\mathrm{F}(\mathrm{x})=0$ *tiene todas sus raíces reales y desiguales,* los cuadrados de sus diferencias serán cantidades reales positivas y no nulas, luego *el primer miembro de la ecuación de los cuadrados de las diferencias será un polinomio completo y únicamente con variaciones.* Para demostrar la recíproca y probar que la condición es suficiente, supongamos que

$$\mathrm{F}(x)=0$$

admita raíces imaginarias y á *fortiori* conjugadas de dos en dos. Sean $\alpha+\beta i$ y $\alpha-\beta i$ dos de ellas, el cuadrado de su diferencia es: $-4\beta^2$; de consiguiente, la ecuación de los cuadrados de las dife-

rencias admitiría forzosamente raíces negativas, y su primer miembro no podría á la vez ser completo y componerse sólo de variaciones, lo que es contra el supuesto de la recíproca.

Deducimos de aquí que para obtener las relaciones que deben existir entre los coeficientes indeterminados de una ecuación, para que todas sus raíces sean reales, es preciso expresar que los coeficientes de la ecuación de los cuadrados de las diferencias sean alternativamente positivos y negativos. De este modo hallamos $m\left(\frac{m-1}{2}\right)$ condiciones, pero puede suceder, como veremos con un ejemplo, que algunas de estas condiciones estén comprendidas en otras.

Cuando la ecuación de los cuadrados de las diferencias sólo tiene permanencias, la propuesta tiene todas sus raíces imaginarias si es de grado par, y sólo tiene una raíz real si es de grado impar; porque si la propuesta tuviese dos raíces reales, la ecuación de los cuadrados de las diferencias admitiría una raíz real positiva, lo que es contra la hipótesis.

Luego expresando que todos los coeficientes de la ecuación de los cuadrados de las diferencias son positivos, tendremos las condiciones *suficientes* para que la propuesta tenga todas sus raíces imaginarias si es de grado par ó para que no tenga más que una raíz real si es de grado impar.

Si la ecuación de los cuadrados de las diferencias no es completa, ó si tiene permanencias y variaciones, deduciremos inmediatamente de esto que la propuesta tiene raíces imaginarias; pero nada puede decirse con precisión acerca de su número, solamente resulta de la regla de los signos de DESCARTES que la propuesta no tiene más pares de raíces imaginarias que variaciones, la transformada en $-z$ en la ecuación de los cuadrados de las diferencias, porque si tuviese más, como á cada uno de estos pares corresponde una raíz real negativa de la ecuación en z, deduciríamos que esta ecuación tendría más raíces negativas que variaciones su transformada en $-z$, lo que no es posible.

Sea la ecuación de tercer grado formada de su segundo término:

$$\mathrm{F}(x)=x^3\pm px\pm q=0$$

Según hemos visto, la ecuación de los cuadrados de las diferencias que le corresponde es:

$$\varphi(z)=z^3+6pz^2+9p^2z+4p^3+27q^2=0$$

1º Para que las tres raíces de la propuesta sean reales, debe tenerse:

$$p<0,\quad 4p^3+27q^2<0$$

pues que la primera condición implícitamente está contenida en la segunda:

$$4p^3+27q^2<0$$

2º Para que la propuesta admita una raíz real y dos imaginarias, debe tenerse:

$$p>0,\quad p^2>0,\quad 4p^3+27q^2>0$$

es decir:

$$4p^3+27q^2>0$$

Estas conclusiones las hallaremos al emprender el estudio especial de la Resolución Algebraica de las Ecuaciones de tercer grado:

TEOREMA DE ROLLE.

473. En el párrafo 136, Teorema I, Primera Parte, dejamos sin demostrar un enunciado que dijimos entonces que era en último análisis el del *Teorema de Rolle*; vamos, pues á demostrarlo, y á estudiar su importancia en el asunto que ahora ventilamos.