Si a *y* b *son raíces de la ecuación* $F(x)=0$, *cuando menos un valor intermedio entre* a *y* b *es raíz de la derivada* $F'(x)=0$.

Para demostrarlo, supongamos $a<b$ y que x crece gradualmente desde a hasta b. Es claro que puesto que $F(x)$ se nulifica cuando $x=a$ y vuelve á nulificarse cuando $x=b$, llegará á adquirir uno ó varios valores máximos ó mínimos al pasar x de a á b. Ahora bien, cada vez que $F(x)$ adquiera un valor máximo ó mínimo, $F'(x)$ se nulificará (párrafo 187 etc. Primera Parte), luego hay uno ó *varios* valores de x comprendidos entre a y b que verifican la ecuación $F'(x)=0$.

Para fijar las ideas supongamos (fig. 36) que A M B es la curva representada por $F(x)=0$, cuya curva corta al eje $x\,x'$ en los puntos A y B, cuyas abscisas son $x=a$ y $x=b$; porque por hipótesis estos valores de x que son raíces de $F(x)=0$ nulifican la ordenada, es decir, se tiene en dichos puntos:

$$F(a)=0, \quad F(b)=0$$

Como la curva debe pasar del punto $A(a,o)$ al punto $B(b,o)$, al ser $F(x)$ una función supuesta continua, habrá en el intermedio un punto *al menos* U en que la tangente sea paralela á xx' y se tenga $F'(x)=0$.

La abscisa $o\,c=c$ que corresponde á este punto será, pues, raíz de $F'(x)=0$, comprendida, como se ve, entre a y b. Si la curva hiciera varias ondulaciones como la

R S P J U K L

la ecuación $F'(x)=0$ admitiría varias raíces reales consecutivas comprendidas entre l y r y que en el caso de la figura son:

$$ok,\ ou,\ oj,\ op,\ os.$$

Claramente se ve: 1º Que el número de raíces reales de $F'(x)=0$ comprendidas entre dos raíces reales consecutivas de $F(x)=0$ es siempre impar. 2º Que dos raíces consecutivas de la derivada pueden no comprender ninguna de la propuesta. 3º Que de comprender las raíces de la derivada raíces de la propuesta, solamente podrá ser *una sola*. 4º Que la demostración expuesta es independiente de la forma de $F(x)=0$, pudiéndose aplicar el Teorema de Roll aun á las ecuaciones *trascendentes*, no requiriéndose sino que sean continuas la propuesta y su derivada. 5º Para decidir si entre dos raíces a' y b' de $F'(x)=0$ existe una raíz de la propuesta, se sustituirán a' y b' en lugar de x en $F(x)$, si los resultados $F(a')$, $F(b')$ son de signo diverso existirá *una raíz única real* de $F(x)=0$ comprendida entre a' y b', si los resultados $F(a')$, $F(b')$ son de igual signo no habrá *ninguna raíz real entre* a' *y* b'.

473. De lo que precede pueden deducirse varias consecuencias:

1ª *Si las raíces de la ecuación* $F(x)=0$ *son reales y desiguales, dos raíces consecutivas de dicha ecuación no comprenden sino una sola de la derivada* $F'(x)=0$.

Según el Teorema de Rolle entre dos raíces reales consecutivas de la primera ecuación existe por lo menos una raíz real de la segunda, y como ésta al ser de grado $m-1$ si la primera es de grado m no puede admitir más de $m-1$ raíces, queda demostrada la proposición.

Se ve también que las $m-1$ raíces de $F'(x)=0$ son igualmente reales y desiguales.

2ª *Si la ecuación* $F(x)=0$ *tiene todas sus raíces reales, lo propio acontecerá con las derivadas sucesivas:*

$$F'(x)=0, \quad F''(x)=0, \quad \ldots\ldots$$

3ª *La ecuación* $F(x)=0$ *no puede tener más de una raíz inferior á la menor raíz de:*

$$F'(x)=0$$

y una sola superior á su mayor raíz.

SEPARACIÓN DE LAS RAÍCES REALES CON AYUDA DEL TEOREMA ROLLE.

474. I. Si la ecuación $F(x)=0$, como por lo común hemos supuesto, no tiene raíces reales iguales se procederá de la manera siguiente:

Es preciso saber resolver la derivada $F'(x)=0$ para el buen éxito del procedimiento, llamemos, pues, sus raíces: $a', b', c', \ldots\ldots, h'$ y consideremos la serie:

$$-\infty,\ a',\ b',\ c',\ \ldots\ldots,\ h',+\infty$$

Si sustituimos sucesivamente en el primer miembro de $F(x)=0$ los términos de la serie anterior cuando dos términos consecutivos den resultados de signos contrarios, encerrarán *una sola* raíz; cuando den resultados de signos iguales no comprenderán ninguna raíz real de la propuesta (Capítulo VIII. Segunda Parte). Como se ve, las raíces de $F(x)=0$ serán separadas.

Si $F'(x)=0$ de grado $m-1$ tiene sólo n raíces reales habrá $n+1$ intervalos en la serie antes escrita y la ecuación propuesta podrá admitir *á lo más* $n+1$ raíces reales.

Esto conduce, pues, á la indicación de un límite superior del número de raíces imaginarias de la propuesta, porque, como se sabe ya, el número de raíces reales de una ecuación y su grado, son siempre de la misma paridad y el número de raíces imaginarias es siempre par.

II. Si $F(x)=0$ tiene raíces reales iguales, esto se conocerá porque algunas raíces de $F'(x)=0$ serán también raíces de $F'(x)=0$, y la nulificarán. Sean $a', b'\ c'$ las raíces de $F'(x)=0$, a, b, c, d, las de $F(x)=0$, se tendrá la serie ordenada según magnitudes crecientes:

$$-\infty\, a,\ a',\ b,\ b',\ c,\ c', \ldots\ldots + \infty$$

Si b fuese igual á c y la propuesta tuviese raíces iguales con ese motivo, la raíz b' de $F'(x)=0$ se confundirá con b y con c y entonces $F(x)=0$, $F'(x)=0$ admitirán una raíz común que será raíz doble de $F(x)=0$ y simple de $F'(x)=0$. La serie precedente se cambia, pues, en esta:

$$-\infty\, a,\ a',\ b',\ c',\ d, \ldots\ldots +\infty$$

Como ya se conoce b' que es raíz simple de $F'(x)=0$, se conocerá la raíz doble de $F(x)$ y sólo restará hallar las raíces a y d que están en los intervalos:

$$-\infty\, y\, a', \quad c'\, y + \infty$$

EJEMPLOS.

475. 1º Si la propuesta es de tercer grado, como la derivada es de segundo, la separación es inmediata.

2º Si la propuesta es de cuarto grado, privada de antemano de su segundo término, tendrá la forma:

$$x^4+px^2+qx+r=0$$

Para aplicar el procedimiento con más sencillez busquemos la transformada en $\frac{1}{x}$ que es:

$$rx^4+qx^3+px^2+1=0$$

cuya derivada es:

$$x(4rx^2+3qx+2p)=0$$

Esta derivada tiene una raíz nula y la otra dos á las que conduce la ecuación de segundo grado que resulta de igualar á cero el paréntesis. Pueden, pues, separarse las raíces de la transformada, y los números recíprocos de los límites que las separan serán los límites que separan las raíces de la propuesta.

Sin aprovechar el artificio precedente es obvio que la resolución sería más escabrosa y más larga.

APLICACIONES.

476. 1ª Sean la ecuación de segundo grado y su derivada:

$$F(x)=x^2+px+q, \quad F'(x)=2x+p$$

Llamemos a, b, en orden creciente de magnitud, las raíces de $F(x)=0$, las de la derivada es:

$$x=-\frac{p}{2}$$

Si las dos raíces de $F(x)=0$ son reales, la de $F'(x)=0$ debe serlo, y en efecto lo es, puesto que $x=-\frac{p}{2}$. Para separar las raíces de la propuesta escribiremos la serie:

$$-\infty, \; a, \; a', \; b, \; +\infty$$

Tendremos, pues, que sustituir $-\infty$, a' y $+\infty$ en el primer mienbro de $F(x)=0$ para ejecutar la separación (párrafo 3º) La sustitución de $-\infty$ da signo $+$ hasta el momento en que se sustituyese a quedaría un resultado nulo, cambia el signo de $+$ en $-$ hasta el momento de sustituir b que produciría cero; de b en adelante, el signo es más. Así pues, se tendrá:

$$\overbrace{-\infty, \quad a,}^{+}\overbrace{\quad a' \quad b,}^{-}\overbrace{\quad +\infty}^{+}$$

así pues, la sustitución de a' *debe dar signo* $-$ y resultará la condición:

$$\left(-\frac{p}{2}\right)^2+p\left(-\frac{p}{2}\right)+q<0$$

esta condición, como se comprende, es necesaria, y también suficiente. Dicha condición se puede transformar en:

$$\frac{p^2}{4}-q>0$$

que ya conocemos en Álgebra Elemental para que sean reales las raíces de la propuesta. Si:

$$\frac{p^2}{4}-q<0$$

no podían ser reales, y como por una parte el número de raíces reales es de la misma

paridad que el grado de la ecuación y por otra las raíces imaginarias entran por pares, las dos raíces serán imaginarias. Finalmente, si:

$$\frac{p^2}{4}-q=0$$

las dos raíces serán *reales é iguales* entre sí, es decir, habrá *una raíz doble*, cuyo valor es: $-\frac{p}{2}$.

2ª Sean la ecuación de tercer grado formada de su segundo término y su derivada:

$$F(x)=x^3+px+q=0, \quad F'(x)=3x^2+p=0$$

Llamaremos a, b, c las tres raíces de la propuesta escritas en orden de magnitud creciente; las de la derivada son:

$$a'=-\sqrt{-\frac{p}{3}}, \quad b'=+\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

Si las tres raíces de $F(x)=0$ son reales (párrafo 473'. II), las de $F'(x)=0$ deben de serlo, y para esto es necesaria la condición $p<o$ pues que p tiene signo menos bajo un radical de índice par.

Para separar las raíces de la propuesta escribiremos la serie:

$$-\infty, \; a, \; a' \; b, \; b', \; c, \; +\infty$$

Tendremos, pues, que sustituir $-\infty$, a', b' y $+\infty$ en $F(x)$ (párrafo 5º) para efectuar la separacion.

La sustitución de $-\infty$ da un resultado negativo, y el signo $-$ persistirá hasta que si se sustituyese a el resultado sería nulo; en seguida cambiaría de signo, siendo positivo hasta el momento de sustituir b que es raíz por el supuesto y daría un resultado nulo. Siguiendo la consideración resulta el diagrama:

$$\overbrace{-\infty, \quad a,}^{-}\overbrace{\quad a', \quad b}^{+}\overbrace{\quad b' \quad c,}^{-}\overbrace{\quad +\infty}^{+}$$

La sustitución de a' debe, pues, *dar un resultado positivo* y la de b' *debe dar un resultado negativo;* en otras palabras, es preciso tener:

$$\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3+p\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)+q>0, \quad \left(+\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3+p\left(+\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)+q<0$$

Estas condiciones son suficientes porque *recíprocamente* si se cumplen dichas condiciones la propuesta tiene una raíz real entre $=\infty$ y a', otra entre a' y b' y otra entre b' y $+\infty$, las tres raíces son, pues, *reales*.

Las desigualdades pueden transformarse en:

$$-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}>-\frac{q}{2} \; (1), \quad -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}>+\frac{q}{2} \; (2)$$

Como por supuesto $p<o$, los primeros miembros de (1) y (2) son *positivos*, de consiguiente: primero, si $q>o$ la (1) está satisfecha por sí misma y basta considerar la (2); segundo, $q>o$ la (2) está satisfecha por sí misma, y basta considerar la (1). En ambos casos la desigualdad resolutiva tiene sus dos miembros positivos; elevando, pues, al cuadrado (1) ó (2) resulta:

$$4p^3+27q^2>0$$

condición ya conocida para que las tres raíces de la propuesta sean reales y desiguales.

Si los coeficientes de la propuesta llenaran la condición:

$$4p^3+27q^2>0$$

contraria á la anterior, y la ecuación no podrá admitir tres raíces reales porque resultaría una conclusión contraria á lo demostrado, lo que es absurdo; mas siendo de la misma paridad el tercer grado de la ecuación y el número de raíces reales, admitirá una real y dos imaginarias conjugadas.

Si finalmente los coeficientes de la propuesta satisfacen la condición:

$$4p^3+27q^2=0$$

Según los conceptos expuestos, se concluirá que las tres raíces serán reales pero *dos iguales entre sí.*

Sabiendo que hay dos raíces reales é iguales y una desigual, será fácil calcularlas.

En efecto, llamándolas a, b, c, se tienen las tres relaciones (párrafo 355) en las que no debe perderse de vista que se ha supuesto por la misma hipótesis $a=b$:

$$0=2a+c, \quad p=a^2+2ac, \quad q=-a^2c$$

Sustituyendo en la segunda y tercera el valor de c deducido de la primera, resulta:

$$p=-3a^2, \quad p=2a^3$$

dividiendo uno entre otro estos resultados, se obtiene:

$$a=-\frac{3q}{2p}$$

valor de la raíz doble, de consiguiente:

$$c=\frac{3q}{p}$$

valor de la raíz simple.

En el Capítulo que trata de la resolución algebraica de las ecuaciones de tercer grado, hallaremos de nuevo estas conclusiones.

3º Analizar las ecuaciones:

$$x^3+8x-1=0, \quad x^3-7x-7=0, \quad x^3+3x+3=0, \quad x^3-5x+2=0$$

averiguando si:

$$4p^3+27q^2 \text{ es } >, < \text{ ó } = \text{ á cero.}$$

CAPÍTULO X.

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES.

Separación de las raíces reales por el método de BUDAN.—Teorema de FOURIER.—Método de LAGRANGE.

METODO DE BUDAN.

477. El método de BUDAN ha dado lugar á encendidas discusiones sobre si él fué realmente el primer autor ó más bien FOURIER maestro de STURM, que lo expuso públicamente en sus cursos en la Escuela Politécnica. En brevísimas palabras mencionaremos los hechos culminantes de la historia del citado teorema.

BUDAN presentó á la Academia de Ciencias en 1803 la primera parte de un método imaginado por él para la resolución de las ecuaciones numéricas en el caso en que todas fueran reales, método que mereció la aprobación de la Academia. En 1807 publicó una Memoria referente al asunto intentando generalizar su procedimiento cualquiera que fuese la naturaleza de las raíces, sin conseguirlo. Finalmente, en 1811 comunicó á la Academia la demostración de un teorema importante que FOURIER ya había dado á conocer en la Escuela Politécnica. LAGRANGE y LEGENDRE juzgaron exacta la demostración y nuevo el teorema.

Por otra parte, en el "Análisis de las ecuaciones determinadas," por FOURIER, obra publicada por NAVIER en 1831, un año después de la muerte del eminente autor, está consignado que FOURIER explicó dicho teorema en la mencionada Escuela antes y después de la expedición napoleónica á Egipto, es decir, en 1797 y á principios de 1803. La prioridad que corresponde á BUDAN se basa, de consiguiente, en un solo hecho, el de haber sido el primero en comunicarlo en 1811 al Instituto.

El teorema ha recibido, sin embargo, el nombre de FOURIER, porque el enunciado que él le dió es el acostumbrado y porque las reflexiones del eminente sabio iluminaron á STURM para enunciar á su vez el suyo y zanjar la cuestión. Las anteriores consideraciones deberían en gran parte preceder más bien al teorema de FOURIER de que más adelante nos ocupamos, pero estando tan ligadas con las que se refieren á BUDAN, hemos preferido juntarlas de antemano.