Se llega, pues, á igual resultado sustituyendo $+h$ y $+\infty$ en lugar de 0 y $+\infty$ porque h puede ser suficientemente pequeño para que no haya ninguna raíz entre 0 y h. Se concluye, pues, el mismo enunciado.

483. Deberíamos para terminar hacer una aplicación del modo práctico de separar las raíces valiéndose del teorema de FOURIER, pero como por una parte adolece del defecto del método de BUDAN y por otra pronto pasaremos á exponer el Teorema de STURM, cuya perfección *teórica* es absoluta, preferimos omitir más explicaciones que en esta obra tal vez serían superfluas. Sí diremos que tanto BUDAN como FOURIER hicieron esfuerzos heroicos de genio por efectuar la separación de las raíces evitando la formación laboriosísima de la ecuación de los cuadrados de las diferencias, que era operación integrante en el primer método riguroso de separación de raíces imaginado por LAGRANGE, y del que vamos á dar una idea.

Los Teoremas de los dos primeros sabios y sus investigaciones, se consagraron propiamente al logro de ese anhelo y se afanaron, aunque sin éxito, en generalizar en absoluto sus procedimientos.

FOURIER, sin embargo, en las Memorias del Instituto en 1827, enunció que se podía proceder inmediatamente al cálculo de las raíces en fracciones continuas como si fuesen todas reales, y que la distinción entre las verdaderamente reales y las imaginarias se operaría indudablemente; pero este enunciado sin demostración revestía un carácter empírico. Mr. VINCENT la ha encontrado y ha deducido, de consiguiente, un método ingenioso para resolver las ecuaciones, completamente eximido de la formación de la ecuación de los cuadrados de las diferencias. (Memorias de la Sociedad Real de Lille).

METODO DE LAGRANGE.

484. El primer método riguroso para la separación de las raíces reales lleva el nombre del ilustre LAGRANGE.[1]

Sea $x=0$ una ecuación desprovista de raíces iguales, L′ y L dos límites, inferior y superior respectivamente de las raíces de la propuesta, y tan próximas á éstas cuanto sea posible.

Como cambiando x en $-x$, se tiene una transformada cuyas raíces positivas tomadas con signo — son las negativas de la propuesta, bastará explicar cómo se determinan las raíces positivas de dicha ecuación.

Supongamos que se sustituyan en ella los números:

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ \ldots\ldots$$

formando una serie que comience desde L′ hasta L y escogidos de tal suerte dichos números, que entre uno y otro no quede comprendida más que una raíz de la ecuación.

Según los teoremas del párrafo 63, se conoce por los signos de las sustituciones cuá-

1 Su *Memoria* está en el *Recueil des Mémoires de l'Académie de Berlin* [1767]; las *Adiciones* en las mismas *Memorias* [1768]; el trabajo completo en su *Traité de la resolution des Equations numériques*, ediciones de 1798 y 1808 y en el tomo VIII de sus *Obras* publicadas por SERRET.

les son de estos números los que encierran una raíz ó cuándo no comprenden ninguna y la separación de las raíces es completa.

Para que:

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ \ldots\ldots$$

sólo comprendan una raíz, es preciso escoger para estos números los términos de una progresión aritmética cuya razón δ sea una cantidad más pequeña que la menor diferencia que existe entre las raíces positivas de la ecuación, la dificultad es, pues, conocer á δ. Esto lo había hecho notar ya NEWTON en su "Aritmética Universal," y LAGRANGE, para determinar á δ, se valió de la *ecuación de los cuadrados de las diferencias* entre las raíces de la propuesta.[1]

Para conocer á δ determinaremos la ecuación de los cuadrados de las diferencias correspondiente á la propuesta y de grado:

$$\frac{m(m-1)}{2}$$

Supongamos conocido el límite inferior de las raíces positivas, de esta ecuación, que llamaremos l. Debiendo ser l menor que el cuadrado de la menor diferencia entre las raíces reales de la propuesta, tomadas dos á dos, hay que suponer:

$$\delta=\sqrt{l}$$

Como $\sqrt{l}$ es generalmente inconmensurable, se tomará para δ el número entero próximo menor á $\sqrt{l}$.

Cuando se puede hallar para l un número mayor que 1, se toma para δ el número entero inferior á $\sqrt{l}$, y conociendo la razón δ se pueden sustituir en la ecuación una serie de números enteros.

Si se reconoce que entre dos de estos números, por ejemplo p y q hay una raíz, se sustituirán los números enteros intermedios, y por los signos de los resultados se conocerán los números enteros consecutivos entre los que está comprendida alguna raíz.

Generalmente l es una fracción <1 y también δ será <1.

Se evita entonces la sustitución de números fraccionarios haciendo $x=\delta x'$ (Capítulo II. Segunda Parte) buscando la transformada en x'. En efecto, para que los valores de x difieran entre sí una cantidad mayor que δ, los de x' deben diferir más de una unidad; con tal artificio podremos hacer sustituciones de números enteros.

484. Despues de determinar los límites de las raíces y cuando se sabe que todas son reales se sustituyen en $x=0$, los números enteros consecutivos que comprenden los límites, después números más y más próximos, y cuando los signos obtenidos indiquen tantas raíces reales como unidades hay en el grado de la ecuación, nos habremos evitado calcular la ecuación de los cuadrados de las diferencias, y las raíces estarán separadas.

APLICACIONES.

485. I. Sea:

$$x=x^3+x-3=0$$

según lo ántes dicho, hay cuando menos una raíz positiva.

1. WARING en 1762 había ya indicado este uso de la ecuación de los cuadrados de las diferencias en sus *Miscellaneas*, pero asegura LAGRANGE que al componer su primera memoria sobre las ecuaciones ignoraba que existiera tal obra.

Vamos á sustituir:

$$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots$$

y tendremos:

Para	$x=0$	el resultado	-3
„	$x=1$	„	-1
„	$x=2$	„	$+7$
„	$x=3$	„	$+27$

Hay, pues, una raíz entre 1 y 2; para buscar las raíces negativas supondremos:

$$x=-x$$

lo que nos dará la transformada:

$$x^3+x+3=0$$

como todos los términos son positivos, no hay raíces positivas en la transformada, es decir, no hay raíces negativas en la ecuación; las demás raíces de la ecuación son, de consiguiente, imaginarias.

Adelante enseñaremos á calcular aproximadamente la raíz >1 y <2, y las imaginarias.

II. Sea:

$$x^4-5x-10=0$$

en la que hay dos raíces reales cuando menos, una positiva y una negativa:

Números.........	0,	1,	2,	3
Resultados.......	-10,	-14,	-4,	$+56$

hay una raíz comprendida entre 2 y 3. Buscando la transformada, que es:

$$x^4+5x-10=0$$

Números....................	0,	1,	2
Resultados..................	-10,	-4,	-16

hay una raíz entre $+1$ y $+2$ en esta transformada, es decir, hay una raíz entre -1 y -2 en la ecuación propuesta.

III. Sean la ecuación propuesta y su transformada en $-x$:

$$x^3-7x+7=0,\quad x^3-7x-7=0$$

Como la propuesta es de grado impar, á lo menos tiene una raíz real de signo contrario al último término, es decir, negativa, que será la única, porque la transformada no admite sino una raíz positiva.

Tendremos por sustitución en la transformada:

Números.......	0,	1,	2,	3,	4
Resultados.....	-7,	-13,	-13,	-1,	$+29$

la raíz positiva de la transformada está comprendida entre 3 y 4, es decir, la raíz negativa de la propuesta, está comprendida entre -3 y -4. Las otras dos raíces si son reales deberán ser positivas, sustituyendo los números enteros 0, 1, 2, 3, ... en la propuesta tendremos:

Números............	0,	1,	2,	3
Resultados..........	7,	1,	1,	13

Será inútil proseguir, pues $x=3$ produce $x^3>7x$, y valores mayores que 3 seguirán dando resultados positivos. Así, pues, de existir raíces reales positivas, su existencia sólo podrá averiguarse acortando el intervalo de los números que se sustituyen, y aun si esas raíces fuesen iguales, no se obtendrán, con todo, resultados de signos contrarios.

Aplicando los procedimientos de los párrafos anteriores, resulta que la ecuación de los cuadrados de las diferencias referentes á la propuesta, es:

$$z^3-42z^2+441z-49=0 \text{ [1]}$$

Para seguir aplicando el procedimiento con alguna sencillez, nos valdremos de un artificio, suponiendo $z=\frac{1}{u}$ con lo que tendremos:

$$u^3-9u^2+\frac{42}{49}u-\frac{1}{49}=0$$

Esta ecuación puede escribirse bajo la forma:

$$u^2(u-9)+\frac{42}{49}\left(u-\frac{1}{42}\right)u=0$$

con objeto de hallar el límite superior de las raíces positivas que hasta ahora tan sólo sabemos determinar (Capítulo VIII. Segunda Parte) por la regla de MAC-LAURIN. Bajo esta forma, vemos que dando á u valores de 9 en adelante, los resultados son constantemente positivos; 9 es, pues, un límite superior de las raíces positivas de dicha ecuación y por consiguiente, $\frac{1}{9}$ será un límite superior de los valores positivos de z. Así pues, el valor que debe formarse para δ, será:

$$\delta=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3}$ es, pues, el intervalo de las sustituciones. Para evitar la forma fraccionaria, pongamos $x=\frac{1}{3}x'$ y hallaremos la transformada:

$$x'^3-63x'+189=0$$

Para limitar el número de sustituciones, busquemos el límite superior y el límite inferior de los valores positivos de x'. Con este objeto, busquemos el límite superior de los valores de x en la propuesta, para lo cual la escribiremos bajo la forma:

$$x(x^2-7)+7=0$$

por lo que vemos que dando á x valores de $\sqrt{7}$ en adelante los resultados son positivos; luego $\sqrt{7}$ es el límite superior de las raíces positivas de esta ecuación. Si por x ponemos $\frac{1}{x}$ el límite superior de las raíces positivas de la transformada que resulte, será el límite inferior de las raíces positivas de la propuesta. La transformada $\frac{1}{x}$ es:

$$x^3-x^2+\tfrac{1}{7}=0$$

que puede escribirse así:

$$x^2(x-1)+\tfrac{1}{7}=0$$

1. Como esta ecuación no tiene raíces nulas, la propuesta no tiene raíces iguales, y como dicha ecuación de los cuadrados de las diferencias sólo tiene *variaciones*, la propuesta tiene todas sus raíces reales, las tres raíces son, pues, reales y desiguales.

por cuya forma vemos que 1 es el límite superior, luego dicho número 1 será el límite inferior de la 3 raíces positivas de la propuesta que en resumen tendrá por límites inferior y superior 1 y $\sqrt{7}$, siendo los de la transformada en x' $3.1=3$ el inferior y

$$3.\sqrt{7}=\sqrt{63}=8$$

próximamente el superior, en virtud de la condición $x=\frac{1}{3}x'$. No tendremos que hacer sino las sustituciones correspondientes de 3 á 8:

Números...............	3,	4,	5,	6
Resultados............	$+27$,	$+1$,	-1,	$+27$

Sólo hemos llegado á 6 porque los dos cambios de signo expresan que las dos raíces buscadas son: una >4 y <5, la otra >5 y <6.

La propuesta, pues, admite dos, una $>\frac{3}{4}$ y $<\frac{5}{3}$, la otra $>\frac{5}{3}$ y $<\frac{6}{3}$, las tres raíces de la propuesta, pues, están definitivamente separadas.

Si hubiésemos aplicado lo dicho en el (párrafo 484) la condición conocida:

$$4p^3+27q^2$$

en este caso:

$$4.(-7)^3+27.7^2<0$$

de antemano nos habría asegurado que las tres raíces eran reales y desiguales.

CAPÍTULO XI.

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES.

Teorema de Sturm.

486. El teorema de Sturm que pasamos á demostrar tiene la ventaja de evitar, para separar las raíces, la formación de la ecuación de los cuadrados de las diferencias, cuya determinación es laboriosa.

Este teorema notable, permite determinar el número de raíces reales de una ecuación algebraica, comprendidas entre dos números dados. Por medio de sustituciones intermedias, se pueden llegar á separar perfectamente las raíces y dividiendo convenientemente los intervalos de las sustituciones, pueden calcularse las raíces con el grado de aproximación que se quiera. El teorema de Sturm permite, pues, resolver cumplidamente el doble problema relativo á la determinación de las raíces inconmensurables. Dicho sea de paso que no es forzoso para calcular esas raíces por el método Sturm, comenzar por separarlas, cosa que no sucede en el método Lagrange, la separación de las raíces es en este método una operación preliminar indispensable.

Sturm hizo conocer su célebre teorema en una "*Mémoire sur la résolution des équations numériques*" reproducida por completo en el tomo IV de las "*Mémoires des Savants étrangers*" (1835), dicha *Memoria* fué leída por el autor en la Academia de Ciencias el 13 de Mayo de 1829. Sturm puede considerarse como discípulo de Fourier, cuya influencia le fué extremadamente propicia, y en su teorema resolvió, con honrosísima gloria, el problema que su maestro había alcanzado imperfectamente. Sturm fué profesor del Colegio Rollin, de la Escuela Politécnica y miembro de la Academia de Ciencias; su nombre es de los más venerados en los anales matemáticos del presente siglo; sus timbres son muy claros y sus trabajos memorables; los triunfos que le dieron renombre desde sus primeros descubrimientos, no escasearon en el transcurso de su vida.

487. Sea V_0 un polinomio entero en x de grado m y sin raíces iguales, V_1 su primera derivada. Dividiendo V_0 entre V_1, supongamos que se obtiene Q_1 de cociente, y designemos por V_2 la resta. con signo cambiado.

En seguida, dividiendo $V_1 \div V_2$ supongamos que el cociente es Q_2 y V_3 la resta *cambiada de signo*.