por cuya forma vemos que 1 es el límite superior, luego dicho número 1 será el límite inferior de la δ raíces positivas de la propuesta que en resumen tendrá por límites inferior y superior 1 y $\sqrt{7}$, siendo los de la transformada en x' $3.1=3$ el inferior y

$$3.\sqrt{7}=\sqrt{63}=8$$

próximamente el superior, en virtud de la condición $x=\frac{1}{3}x'$. No tendremos que hacer sino las sustituciones correspondientes de 3 á 8:

Números...............	3,	4,	5,	6
Resultados............	$+27$,	$+1$,	-1,	$+27$

Sólo hemos llegado á 6 porque los dos cambios de signo expresan que las dos raíces buscadas son: una >4 y <5, la otra >5 y <6.

La propuesta, pues, admite dos, una $>\frac{3}{4}$ y $<\frac{5}{3}$, la otra $>\frac{5}{3}$ y $<\frac{6}{3}$, las tres raíces de la propuesta, pues, están definitivamente separadas.

Si hubiésemos aplicado lo dicho en el (párrafo 484) la condición conocida:

$$4p^3+27q^2$$

en este caso:

$$4.(-7)^3+27.7^2<0$$

de antemano nos habría asegurado que las tres raíces eran reales y desiguales.

CAPÍTULO XI.

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES.

Teorema de Sturm.

486. El teorema de Sturm que pasamos á demostrar tiene la ventaja de evitar, para separar las raíces, la formación de la ecuación de los cuadrados de las diferencias, cuya determinación es laboriosa.

Este teorema notable, permite determinar el número de raíces reales de una ecuación algebraica, comprendidas entre dos números dados. Por medio de sustituciones intermedias, se pueden llegar á separar perfectamente las raíces y dividiendo convenientemente los intervalos de las sustituciones, pueden calcularse las raíces con el grado de aproximación que se quiera. El teorema de Sturm permite, pues, resolver cumplidamente el doble problema relativo á la determinación de las raíces inconmensurables. Dicho sea de paso que no es forzoso para calcular esas raíces por el método Sturm, comenzar por separarlas, cosa que no sucede en el método Lagrange, la separación de las raíces es en este método una operación preliminar indispensable.

Sturm hizo conocer su célebre teorema en una "*Mémoire sur la résolution des équations numériques*" reproducida por completo en el tomo IV de las "*Mémoires des Savants étrangers*" (1835), dicha *Memoria* fué leída por el autor en la Academia de Ciencias el 13 de Mayo de 1829. Sturm puede considerarse como discípulo de Fourier, cuya influencia le fué extremadamente propicia, y en su teorema resolvió, con honrosísima gloria, el problema que su maestro había alcanzado imperfectamente. Sturm fué profesor del Colegio Rollin, de la Escuela Politécnica y miembro de la Academia de Ciencias; su nombre es de los más venerados en los anales matemáticos del presente siglo; sus timbres son muy claros y sus trabajos memorables; los triunfos que le dieron renombre desde sus primeros descubrimientos, no escasearon en el transcurso de su vida.

487. Sea V_0 un polinomio entero en x de grado m y sin raíces iguales, V_1 su primera derivada. Dividiendo V_0 entre V_1, supongamos que se obtiene Q_1 de cociente, y designemos por V_2 la resta. con signo cambiado.

En seguida, dividiendo $V_1 \div V_2$ supongamos que el cociente es Q_2 y V_3 la resta *cambiada de signo.*

Supongamos que la ecuación $V_0 = 0$ *no tiene raíces iguales.*

Después de haber ejecutado las operaciones anteriores, se llega á obtener una resta V_n numérica *diversa de cero.*

Supuesto esto: *el número de raíces reales de la ecuación* $V_0 = 0$ *comprendidas entre los límites* α *y* β, $(\alpha < \beta)$ *es igual al número de variaciones que pierde la serie:*

$$V_0,\ V_1,\ V_2,\ \ldots\ldots,\ V_n \qquad (741)$$

cuando varía de α *á* β. Las funciones constitutivas de esta serie, se denominan *funciones de* STURM.

Demostración. I. De la serie de operaciones que deben efectuarse, se deduce:

$$\left.\begin{array}{l} V_0 = V_1\ Q_1 - V_2 \\ V_1 = V_2\ Q_2 - V_3 \\ V_2 = V_3\ Q_3 - V_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{i-1} = V_i\ Q_i - V_{i+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{n-2} = V_{n-1}\ Q_{n-1} - V_n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (742)$$

De estas igualdades se infieren dos cosas:

1ª *Que dos funciones consecutivas:* V_{i-1}, V_i *de la serie no pueden reducirse á cero para un valor determinado de* x.

2ª *Si una de las cantidades:*

$$V_0,\ V_1,\ V_2,\ \ldots\ldots\ldots,\ V_{i-1},\ \ldots\ldots\ldots$$

se reduce á cero para un valor determinado de x, *la que le precede y la que le sigue inmediatamente tienen signos contrarios.*

1º Para demostrar que dos funciones consecutivas no pueden reducirse á cero para un valor determinado de x, supongamos que sí puedan reducirse, y veamos lo que sucede:

Si V_{i-1} y V_i fuesen iguales á cero, según la ecuación:

$$V_{i-1} = V_i\ Q_i - V_{i+1}$$

deduciríamos:

$$V_{i+1} = 0$$

Igualmente de la ecuación:

$$V_i = V_{i+1}\ Q_{i+1} - V_{i+2}$$

se obtendría:

$$V_{i+1} = 0$$

Finalmente se llegaría á deducir: $V_n = 0$, lo que es imposible, porque $V_0 = 0$ no tiene raíces iguales y V_n es una constante que no puede ser nula.

2º De la ecuación:

$$V_{i-1} = V_i\ Q_i - V_{i+1}$$

se infiere que si $V_i = 0$ resultará:

$$V_{i-1} = -V_{i+1}$$

por consiguiente, el paso por cero de una de las funciones V_1, V_2, ..., no altera el

número de variaciones de la serie (741). Así pues, resulta finalmente: *que en tanto que el valor creciente de* x *no llega á confundirse con alguna raíz de* $V_0 = 0$, *la serie* (741) *presenta siempre el mismo número de variaciones.* En efecto, si se tiene $V_i = 0$ para $x = a$, puede tomarse h muy pequeña, para que las dos ecuaciones:

$$V_{i-1} = 0, \quad V_{i+1} = 0$$

no admitan raíz alguna real entre $a - h$ y $a + h$ puesto que no pueden admitir la raíz a (1º). Así pues, mientras que V_i cambia de signo cuando x pasa por el valor a, las funciones V_{i-1} y V_{i+1} conservan el propio. Pero como (2º) tienen signos contrarios para $x = a$, en el intervalo considerado solo pueden tener lugar las combinaciones de signos siguientes:

$$\begin{array}{c|cccc|cccc|} & \multicolumn{4}{c}{x = a - h} & \multicolumn{4}{c}{x = a + h} \\ V_{i-1} & + & + & - & - & + & + & - & - \\ V_i & + & - & + & - & - & + & - & + \\ V_{i+1} & - & - & + & + & - & - & + & + \end{array} \ldots\ldots\ldots\ldots (743)$$

que no presentan sino *una sola variación* tanto para $x = a - h$ como para $x = a + h$. De consiguiente, es legítima la conclusión de que: *la serie* (741) *no pierde ninguna variación cuando se hace crecer á* x *en tanto que no se llega á una raíz de la propuesta* $V_0 = 0$.

II. Supongamos *que* x *en su crecimiento llega á confundirse con alguna raíz* b *de la propuesta.* Este valor b podrá nulificar tambien alguna de las otras funciones de la serie (741) que pasaron por cero sin cambiar el número de variaciones (1º) de la serie (741).

Queda pues, por examinar, lo que sucede entre las dos primeras funciones V_0 y V_1 cuando x pasa de $b - k$ á $b + k$, siendo k una cantidad positiva tan pequeña como se quiera.

Si en las funciones V_0 y V_1 se sustituye por x, $b + k$ se obtienen dos expresiones de la forma:

$$B + B'K + \tfrac{1}{2}B''K^2 + \ldots\ldots$$

$$B_1 + B_1'K + \tfrac{1}{2}B_1''K^2 + \ldots\ldots$$

en las que B, B′, B″, ... son los resultados de la sustitución de b por x en V_0 y sus derivadas y análogamente B_1, B_1', B_1'' ......, son los resultados de sustituir b por x en V_1 y sus derivadas. Como b es raíz de $V_0 = 0$, se tiene $B = 0$; además B' y B_1 constituyen signo de una sola cantidad, que es el resultado de sustituir b por x en lugar de V_1.

Así pues, las anteriores expresiones se cambian en:

$$B'K + \tfrac{1}{2}B''K^2 + \ldots\ldots$$

$$B' + B_1'K + \tfrac{1}{2}B_1''K^2 + \ldots\ldots$$

Estas expresiones son del signo de los primeros términos $B'K$, B' cuando se toma para K un valor suficientemente pequeño, así pues, ambas expresiones son del *mismo signo* cuando K es *positivo* y de *signos contrarios* cuando K es *negativo.* Resulta, de consiguiente, que los signos de V_0 y V_1 que presentan una *variación* para $x = b - K$, presentarán una *permanencia* para $x = b + K$; así pues, en el paso de $b - K$ á $b + K$ *una variación se cambia en permanencia.* Se comprende, pues, que si el valor $x = b$ nulifica á $V_0 = 0$ y á alguna ó algunas otras de las demás funciones hay pérdida de *una variación* *sola*, pues las demás funciones al nulificarse no aumentan el número de variaciones. En resumen, como á cada raíz de $V_0=0$ corresponde una variación perdida, se deduce que:

"*El número de variaciones que pierde la serie* (741) *cuando pasa de* α *á* β $(\alpha<\beta)$ *es igual al número de raíces de la ecuación* $V_0=0$ *comprendidas entre estos dos números.*

ESCOLIO.—El teorema de STURM se aplica también á las ecuaciones que tienen raíces iguales. Da á conocer las raíces iguales comprendidas entre dos números dados, *mas haciendo punto omiso del grado de multiplicidad de esas raíces.*

488. El teorema de STURM da las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación $f(x)=0$ tenga todas sus raíces reales.

Para encontrar estas condiciones basta sustituir en lugar de x en la serie (741), $-\infty$ y $+\infty$, y expresar que para el primer valor de x, en la serie solamente hay variaciones y para el segundo sólo permanencias.

Sea, por ejemplo, la ecuación:

$$x^3+px+q=0$$

Las *funciones de* STURM son:

$$V_0=x^3+px+q,\quad V_1=3x^2+p,\quad V_2=-(2px+3q),\quad V_3=-(27q^2+4p^3)$$

Si hacemos $x=-\infty$ y $x=+\infty$ encontramos sustituyendo:

$$-\infty,\ +\infty,\ +\infty,\ -(27q^2+4p^3)$$

$$+\infty,\ +\infty,\ -\infty,\ -(27q^2+4p^3)$$

Así pues, para que las tres raíces sean reales debe tenerse $p<0$ y $27q^2+4p^3<0$ ó bien, puesto que la primera condición entra implícitamente en la segunda:

$$27q^2+4p^3<0$$

como ya hemos visto.

489. Podemos deducir esta conclusión de las ecuaciones generales:

Como las raíces reales deben estar comprendidas entre los límites α y β, que nosotros hemos supuesto ser $-\infty$ y $+\infty$, la cuestión es buscar las condiciones necesarias para que de $x=\alpha$ á $x=\beta$, la serie V_0, V_1, V_2, ..., pierda un número de variaciones igual al grado de la ecuación.

Sea m este grado, es preciso que la serie pierda m variaciones.

Para que tenga m variaciones es preciso que á lo menos tenga $m+1$ términos, y como no puede tener más, las cantidades V_0, V_1, V_2, ..., son en número de $(m+1)$ y respectivamente del grado m, $m-1$, $m-2$, $m-3$, ..., la última que no contiene x la hemos representado por V_n.

Cuando se sustituyen en los polinomios por x, valores grandes positivos ó negativos, los resultados son del signo del primer término, así en nuestro caso, sólo en este término conviene fijar la atención.

Tomemos $V_0=0$ bajo la forma ya tanto citada:

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots\ldots=0$$

El primer término de V_0 es x^m.

" " " " V_1 será mx^{m-1}

En cuanto á los de V_2, V_3, ..., son funciones de los coeficientes P, Q, ..., y que determinan las divisiones que se efectúan.

Sean G_2, G_3, ..., G_m estas funciones, y escribamos por orden las $m+1$ cantidades siguientes:

$$x^m,\ mx^{m-1},\ G_2x^{m-2},\ G_3x^{m-3},\ \ldots\ldots,\ G_m \tag{744}$$

La cuestión se reduce á buscar las condiciones que hacen perder m variaciones á la serie cuando x pase de α á β.

Para que esto sea, es preciso que tenga m variaciones al sustituir α, y m permanencias al sustituir β.

Por otra parte, en esta serie las potencias de x van disminuyendo una unidad, por consiguiente, si haciendo $x=\beta$ sólo tiene permanencias, haciendo $x=\alpha$ sólo tendrá variaciones.

Las condiciones buscadas se reducen á las que son necesarias para que esta serie no tenga sino coeficientes positivos, es decir:

$$G_2>0,\ G_3>0,\ \ldots\ldots\ldots,\ G_m>0$$

Estas condiciones no serán en número mayor que $m-1$, pero pueden ser en número menor, pues que algunas de estas desigualdades pueden estar comprendidas en las otras.

(Lefebure de Fourcy.)

489. Aplicando estas consideraciones á nuestro ejemplo $x^3+px+q=0$, tenemos que $m=3$ y sólo hay dos condiciones:

$$G_2>0,\quad G_3>0$$

Efectuando las operaciones ya citadas, hemos hallado:

$$V_0=x^3+px+q,\quad V_1=3x^2+p,\quad V_2=-2px-3q,\quad V_3=-4p^3-27q^2$$

por consiguiente, las condiciones $G_2>0$ y $G_3>0$ se cambian en:

$$-2p>0,\ -4p^3-27q^2>0$$

es decir:

$$2p>0,\ 4p^3+27q^2<0$$

y como la primera desigualdad está encerrada en la segunda, se tendrá la condición ya conocida:

$$4p^3+27q^2<0$$

que es, en efecto, la condición que deben llenar los coeficientes de una ecuación de tercer grado para que las raíces sean reales, conclusión que deducimos igualmente en el Capítulo que trata de las ecuaciones de tercer grado y hemos hallado en otros anteriores.

Notas relativas al Teorema de Sturm.

1ª Al buscar V_0, V_1, V_2, ..., se pueden introducir ó suprimir factores numéricos positivos, pero cuidando de cambiar los signos en los casos que indica el teorema.

2ª La última función V_n es una constante que no puede ser nula, pero es claro que basta para la demostración del teorema, que V_n sea una función que no cambie de sig-