no al pasar x de α á β, puesto que esta no puede anularse en estos límites; de aquí resulta una simplificación de importancia: si entre las funciones (741) hay una que no cambia de signo de α á β, es decir, que igualada á cero no admita raíz alguna entre estos números, se puede terminar la serie (741) en dicha función ahorrando el cálculo de las subsecuentes; esto es lo que comunmente sucede cuando por ejemplo se encuentra una función que igualada á cero tiene sólo raíces imaginarias, y conserva, por consiguiente, el signo de su primer término.

3ª Cuando una función intermedia V_i se anula para la sustitución extrema $x=\alpha$ ó $x=\beta$ la dificultad se resuelve análogamente á la que suele presentar el Teorema de Fourier (párrafo 482′. Corolario III.)

4ª Es suficiente (como lo hemos hecho) sustituir $-\infty$ y $+\infty$ (para conocer el número total de raíces), en el primer término de cada función, pues el signo de cada función depende del de el primer término, evitándose así el buscar los límites de las raíces.

La diferencia entre el número de variaciones de ambas sustituciones será el número de raíces reales de la ecuación.

5ª Podemos tambien sin determinar los límites, conocer los números naturales que comprenden una ó más raíces, sustituyendo en las funciones la serie de números:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots\ldots,$$

en lugar de x, viendo qué números de entre ellos producen las variaciones que $-\infty$ y $+\infty$, y buscando la diferencia entre los números de variaciones que producen dos sustituciones consecutivas cualesquiera.

6ª Podemos aún dar las siguientes reglas: comenzar por sustituir:

$$0,\ 1,\ 10,\ 100,\ 1{,}000,\ \ldots\ldots,$$

que son cálculos fáciles, y cuyas sustituciones hacen conocer el número de raíces que hay entre 0 y 1, 1 y 10, etc.

Si hay raíces entre 1 y 10 se determina la parte entera, sustituyendo 1, 2, 3, ..., 9, 10. Si hay raíces entre 10 y 100 se sustituirá: 20, 30, 40, ..., hasta 100, y así se conocerá la cifra de las decenas de cada raíz.

Para las raíces <1 se sustituirán los números comprendidos entre 0,1 y 1, ó bien entre 0, 01, y 0,1 etc., para conocer la cifra decimal de orden más próximo á la coma.

Para las raíces, por ejemplo, comprendidas entre 100 y 1,000 y que se haya reconocido que están comprendidas, verbi gracia, entre 300 y 400, se tendrá:

Que la sustitución de los números 300, 310, 320, ... en la serie hará conocer la cifra de las decenas, pero para mayor sencillez en los cálculos se cambia x en $300+x'$ y se obtiene una nueva serie x' en la que se sustituirán los números 1, 10, 20, ...

Supongamos, por último, que se haya reconocido que hay raíces entre 350 y 360, la sustitución de los números 350, 351, 352, ..., en la serie hará conocer la cifra de las unidades, pero puede simplificarse el cálculo.

El cambio de x en $300+x'$ ha dado una serie en x'; de un modo semejante, sustituyendo en ésta por x' el valor $50+x''$ se tendrá una tercera serie en x'' en la que sustituyendo 1, 2, 3, 4, ..., 10 se tendrán los mismos resultados que sustituyendo:

$$50,\ 51,\ 52,\ \ldots\ldots$$

en la serie (x') ó 350, 351, 352, ... en la serie (x).

Puede aún continuarse el cálculo hasta las décimas, centésimas, etc., y conocer las raíces en la aproximación que se quiera, además de separarlas.

APLICACIONES.

491. I. Tomaremos la ecuación $x^3+px+q=0$ que comenzamos á tratar en los párrafos 488 y 489.

La serie de funciones que obtendremos en este caso es como hemos visto:

$$V_0=x^3+px+q,\ V_1=3x^2+p,\ V_2=-2px-3q,\ V_3=-27q^2-4p^3=-4.27\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)$$

Discusión. 1º Para p positivo obtendremos, sustituyendo:

Para $x=-\infty$: $-,\ +,\ +,\ -,=2$ variaciones.
„ $x=+\infty$: $+,\ +,\ -,\ -,=1$ „

2º Para p negativo y:

$$\frac{q^2}{4} > \frac{p^3}{27}$$

en valor numérico las mismas funciones dan:

Para $x=-\infty$: $-,\ +,\ -,\ -,=2$ variaciones.
„ $x=+\infty$: $+,\ +,\ +,\ -,=1$ „

3º Cuando p es negativo y:

$$\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{17}$$

resulta:

Para $x=-\infty$: $-,\ +,\ -,\ +,=3$ variaciones.
„ $x=+\infty$: $+,\ +,\ +,\ +,=0$ „

En los primeros casos hay para $x=-\infty$ dos variaciones y para $\infty=+\infty$ una variación, que produce por diferencia $2v-1v=1$ variación; hay, pues, una sola raíz real.

En el tercer caso hay para $x=-\infty$, 3 variaciones; para $x=+\infty$ no hay ninguna, luego: $3v-0v=3$ variaciones; las tres raíces son, pues, reales.

II. Sea la ecuación:

$$x^4-2x^3-7x^2+10x+10=0$$

deducimos:

$$V_0=x^4-2x^3-7x^2+10x+10,\quad V_1=4x^3-bx^2-14x+10,$$

$$V_2=17x^2-23x-45,\quad V_3=152x-305,\quad V_4=+524535$$

La hipótesis $x=-\infty$ produce: $+,\ -,\ +,\ -,\ +,=4$ v.
„ „ $x=\ \infty$ „ $+,\ +,\ +,\ +,\ +,=0$ v.
Diferencia .... 4 v.

luego las cuatro raíces son reales:

Según las notas 3ª y 4ª sustituiremos la serie de números 0, 1, 2, 3, ..., -1, -2, -3, ..., y tendremos:

Cuadro de operaciones.			Variaciones.
$x=0$	da	$+, +, -, -, +,$ = ...	2
$x=1$	„	$+, +, -, -, +,$ = ...	2
$x=2$	„	$+, -, -, +, +,$ = ...	2
$x=3$	„	$+, +, +, +, +,$ = ...	0
$x=-1$	„	$-, +, -, -, +,$ = ...	3
$x=-2$	„	$-, -, +, -, +,$ = ...	3
$x=-3$	„	$+, -, +, -, +,$ = ...	4

Fijándonos en los resultados vemos:

Que -3 da 4 v y 3 da 0 v, y como la diferencia entre 4 v y 0 v es 4 v que fué precisamente la qué nos dió la sustitución de $-\infty$ y $+\infty$ entre -3 y 3 están las 4 raíces.

Si ahora nos fijamos en que:

-3 produce 4 v.
-2 „ 3 v.

Diferencia $=1$ v. concluímos que entre -3 y 2 hay *una raíz negativa.*

Como -2 produce 3 v.
-1 „ 3 v.

Diferencia $=0$ v. no hay raíz entre -2 y -1.

Como -1 produce 3 v.
0 „ 2 v.

Diferencia $=1$ v., entre 1 y 0 hay *una raíz negativa.*

Como -0 produce 2 v.
1 „ 2 v.

Diferencia $=0$ v., no hay raíz entre esos números.

Como -1 produce 2 v.
2 „ 2 v.

Diferencia $=0$ v., no hay raíz entre esos números.

Como -2 produce 2 v.
3 „ 0 v.

Diferencia $=2$ v., hay *dos raíces positivas* entre 2 y 3.

Vemos, pues, la inmensa utilidad de este teorema, que podemos decir que da límites para cada raíz, y nos conduce á saber que en la ecuación propuesta hay, por ejemplo, en nuestro caso, dos raíces positivas mayores que 2 y menores que 3, una negativa mayor que -1 y menor que 0, y otra negativa mayor que -3 y menor que -2. Al hablar de la determinación de las raíces inconmensurables, explicamos los métodos que se usan para valuar las raíces que casi nos ha determinado el teorema de Sturm.

III. Sea:

$$x^4-4x^3+x^2+6x+2=0,$$

tenemos:

$$V_0=x^4-4x^3+x^2+6x+2,\ V_1=4x^3-12x^2+2x+6,\ V_2=5x^2-10x-7,\ V_3=x-1,\ V_4=+12$$

Sustituído $x=-\infty$ produce: $+, -, +, -, +,$ = 4 v.
„ $x=+\infty$ „ $+, +, +, +, +,$ = 0 v.

Diferencia............ 4 v.

las cuatro raíces son reales.

Sustituiremos desde -1 que es, como veremos adelante, el límite inferior de las raíces negativas de la propuesta, los números -1, 0, 1, 2, 3, y tendremos:

$x=-1$ da $+, -, +, -, +,$ = 4 v.
$x=\ \ 0$ „ $+, +, -, -, +,$ = 2 v.
$x=\ \ 1$ „ $+, +, -, +, +,$ = 2 v.
$x=\ \ 2$ „ $+, -, -, +, +,$ = 2 v.
$x=\ \ 3$ „ $+, +, +, +, +,$ = 0 v.

deducimos que entre $=-1$ y 0 hay dos raíces negativas y entre 2 y 3 dos positivas.

IV. Sea:

$$8x^3-6x-1=0$$

Tendremos:

$$V_0=8x^3-6x-1,\ V_1=4x^2-1,\ V_2=4x+1,\ V_3=3$$

El valor $x=-\infty$ produce: $-, +, -, +,$ = 3 v.
„ „ $x=+\infty$ „ $+, +, +, +,$ = 0 v.

Diferencia.................. 3 v.

las tres raíces son reales.

Para $x=-1$ tenemos: $-, +, -, +,$ = 3 v.
„ $x=\ \ 0$ „ $-, -, +, +,$ = 1 v.
„ $x=\ \ 1$ „ $+, +, +, +,$ = 0 v.

entre -1 y 0 hay dos raíces negativas, entre 0 y $+1$ una positiva.

V. Sea:

$$x^3-5x^2+8x-1=0$$

que produce:

$$V_0=x^3-5x^2+8x-1,\ \ V_1=3x^2-10x+8,\ \ V_2=2x-31,\ \ V_3=2295$$

El valor $x=-\infty$ produce: $-, +, -, -,$ = 2 v.
„ „ $x=+\infty$ „ $+, +, +, -,$ = 1 v.

Diferencia.................. 1 v.

hay sólo una raíz real y *positiva*, pues que el último término de la ecuación es negativo. (Capítulo VIII. Segunda Parte.)

El valor $x=0$ da: $-, +, -, -,$ = 2 v.
„ „ $x=1$ „ $+, +, -, -,$ = 1 v.

Diferencia.................. 1 v.

luego la raíz está comprendida entre 0 y 1.

VI. Sea:

$$2x^4-13x^2+10x-19=0$$

que produce:

$$V_0=2x^4-13x^2+10x-19,\ \ V_1=4x^3-13x+5,\ \ V_2=13x^2-15x+38$$

es inútil seguir buscando á V_3, V_4 ...... porque las raíces de $V_2 = 0$ son imaginarias, pues se tiene:

$$(15)^2 - 4 \times 13 \times 38, < 0$$

y según los principios del trinomio de segundo grado, V_2 no puede cambiar de signo cualquiera que sea el valor que tome x, basta, pues, considerar V_0, V_1, V_2.

$$\begin{array}{llll} \text{El valor } x = -\infty \text{ da:} & +, -, +, & = & 2 \text{ v.} \\ \text{,, ,, } x = +\infty \text{ ,,} & +, +, +, & = & 0 \text{ v.} \\ \hline & \text{Diferencia.........} & & 2 \text{ v.} \end{array}$$

hay dos raíces reales y dos imaginarias, y como el último término de la ecuación es negativo (Capítulo VIII. Segunda Parte), de las raíces reales una es positiva y la otra negativa.

VII. Sea la ecuación propuesta y las *funciones de* STURM correspondientes:

$$\begin{aligned} V_0 &= x^5 - 36x^3 + 72x^2 - 37x + 72 = 0 \\ V_1 &= 5x^4 - 108x^2 + 144x - 37 \\ V_2 &= 18x^3 - 54x^2 + 37x - 90 \\ V_3 &= 1319x^2 - 2487x - 684 \\ V_4 &= -2960933x + 34935426, \quad V_5 = -m. \end{aligned}$$

El signo de V_5 se determina observando que la raíz de $V_4 = 0$ es evidentemente mayor que la raíz positiva de $V_3 = 0$. [1]

$$\begin{array}{llll} \text{Así } x = -\infty \text{ da} & -, +, -, +, +, -, & = & 4 \text{ v.} \\ \text{,, } x = +\infty \text{ ,,} & +, +, +, +, -, -, & = & 1 \text{ v.} \\ \hline & \text{Diferencia............} & & 3 \text{ v.} \end{array}$$

Sólo hay tres raíces reales.

N. B. Sustituyendo los pares de números: 4 y 5, 5 y 6, -6 y -7, se observa que comprenden cada uno una raíz.

Así las tres raíces reales tienen respectivamente por parte entera 4; 5 y 6 siendo las dos raíces restantes imaginarias.

(Bourdon.)

492. Para mayores detalles sobre el asunto, recomendamos además de las obras de FOURIER y BUDAN ya citadas, el "*Tratado de la resolución de las ecuaciones numéricas*" por LAGRANGE y el "*Suplemento á la teoría de los números*" por LEGENDRE.

493. **Número de raíces imaginarias cuando la serie de Sturm es completa.** Sea la ecuación propuesta de grado m y *supongamos que hay* $m + 1$ *funciones*, es decir, que la serie de STURM es completa: *si los primeros términos de las* $m + 1$ *funciones presentan un número de variaciones igual á un número* $K < m$ *y de consiguiente un número de permanencias igual á* $m - K$, *la propuesta tiene* $2K$ *raíces imaginarias.*

Para $x = +\infty$ subsisten las K variaciones y las $m - K$ permanencias.

1 Según el párrafo 352, si se divide un polinomio x entre un binomio $x - a$, el resto no es otra cosa que el resultado de sustituir en x, a en lugar de x. Así pues, el signo de la resta de la división de $V_3 \div V_4$ debe ser el mismo que resultaría de sustituir en $V_3 = 1319x^2 - 2487x - 684$ el valor de la raíz de la ecuación:

$$V_4 = -2960933x + 34935426,$$

dicho signo es, pues, el de V_5 que es inútil calcular como se ve.

Para $x = -\infty$ se cambiarán en K permanencias y $m - K$ variaciones puesto que los primeros términos de las funciones cambian entonces de dos en dos.

Si pues los primeros términos de las $m + 1$ funciones presentan K variaciones, la serie completa de STURM pierde de $-\infty$ á $+\infty$ un número de variaciones expresado por

$$(m - K) - K = m - 2K$$

Si pues este es el número de raíces reales y m es el total de raíces, habrá $2K$ imaginarias.

APLICACIÓN.

Sea la ecuación y las funciones correspondientes:

$$V_0 = x^4 - x^3 + 2x^2 - 6x + 5 = 0, \quad V_1 = 4x^3 - 3x^2 + 4x - 6$$

$$V_2 = -13x^2 + 68x - 74, \quad V_3 = -792x + 1141, \quad V_4 = +1892293$$

Como el número K de variaciones es $(K = 2) < 4$ el número de raíces imaginarias será $2K = 4$, es decir, todas son imaginarias. Esto es evidente, por otra parte, atendiendo á que $-\infty$ conduce á dos variaciones, lo mismo que $+\infty$.