CAPÍTULO XII.

LÍMITES DE LAS RAICES DE UNA ECUACIÓN.

Ideas generales.—Teoremas fundamentales.—Métodos de Mac-Laurin, de las agrupaciones, de Newton, de Laguerre, etc.—Aplicaciones.

494. Al comenzar la exposición de los problemas á que da lugar la Resolución de las Ecuaciones en los primeros párrafos del Capítulo anterior, hicimos notar la diferencia entre lo que se entiende por resolución *numérica* y lo que se entiende por *algebraica*. Enumeramos las diversas especies de raíces por estudiar, y finalmente hicimos ver la necesidad de *separarlas* de antemano tanto en cuanto á su naturaleza real ó imaginaria, como en cuanto á su magnitud encerrada entre ciertos números *límites* para no tener sino que *calcularlas* como última operación. Bien comprendidos los conceptos que en la mencionada exposición pretendimos encerrar tan clara y concretamente como fuese posible, se habrán apreciado en todo su valor las ventajas notorias de los Teoremas y métodos que en dicho Capítulo van comprendidos, observando al mismo tiempo que el grande afán de los sabios ha sido llegar á leyes generales para todos los problemas relativos á la Resolución de las Ecuaciones.

Un asunto nos restaría por tratar referente al Capítulo anterior: la separación de las raíces imaginarias; pero como por una parte dicho problema requiere el conocimiento de ciertas ideas luminosas cifradas en un notable teorema de CAUCHY sobre el número de *puntos–raíces*, y por otra con los conocimientos ya adquiridos, se puede calcular el número de raíces reales de una ecuación [1] comprendidas entre dos números dados; al ocuparnos más adelante de las Raíces Imaginarias en particular y en Capítulo aparte, tocaremos esas cuestiones que por ahora debemos omitir.

495. Suponemos, pues, que las raíces reales están separadas, y para emprender su cálculo, desde luego nos importa saber qué valores límites más próximos comprenden á las positivas y qué otros á las negativas. Es decir, necesitamos conocer el límite superior de las positivas, el inferior; el límite superior de las negativas y el inferior correspondiente. Abreviadamente representaremos dichos límites con los símbolos:

$$L_p^s,\ L_p^i,\ L_n^s,\ L_n^i$$

para hacer expedita su escritura.

1 Con el teorema de STURM, por ejemplo.

Consideraremos por ahora las raíces reales de las ecuaciones de coeficientes reales, dejando para más adelante la investigación de el límite superior y del inferior de los módulos de las raíces imaginarias.

496. *Problema general.* Sea una función entera de coeficientes reales.

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots\ldots+A_nx^n+\ldots\ldots+A_{m-1}x+A^m \qquad (745)$$

y supongamos que se conoce el L_p^s que llamamos L.

Si buscamos la transformada cuyas raíces son *recíprocas* de las de la (745) el L_p^s de esta transformada será el L_p^i de las de la ecuación (745).

Si se busca la transformada en $-x$ de la (745) el L_p^s de la transformada será el L_n^s de la (745), y en fin, si se busca la transformada en $-\frac{1}{x}$ de la (745) el L_p^s de esta transformada será el L_n^i de la (745).

Así pues, el problema general estriba en la determinación del L_p^s de una ecuación propuesta.

497. *Teoremas fundamentales.* I. Sea la ecuación anterior (745), $f(x)=0$, en la que suponemos que el primer término es positivo, y para $x=+\infty$ se tiene:

$$f(x)>0$$

Si un cierto número L sustituído en lugar de x produce $f(x)>0$ y todos los números mayores que L hasta llegar á $+\infty$ dan lugar á la misma condición, es evidente que L es un L_p^s de $f(x)=0$ puesto que el primer miembro de esta ecuación *no se anula* ni para L ni para un valor mayor.

Recíprocamente, si L es un L_p^s de $f(x)=0$, sustituído en lugar de x hace adquirir al primer miembro un signo (positivo si A_0 es positivo) que permanece invariable para todo valor mayor de x.

Para demostrar esta recíproca supongamos que en las condiciones expuestas un número $L_1>L$ origina un signo diverso. Según el Capítulo VIII, Segunda Parte, había una raíz cuando menos entre L_1 y L y ya *no* sería L límite superior de las raíces positivas, lo que es contra el supuesto.

II. Cuando $f(x)=0$ tiene su primer miembro formado de términos todos positivos, *cualquier valor positivo* sustituído en lugar de x da $f(x)>0$, la ecuación *no* admite raíces positivas, lo que está de acuerdo con el teorema de DESCARTES (Capítulo VIII. Segunda Parte); en este caso el L_p^s es cero.

III. Cuando $f(x)$ sólo presenta *una variación*, la ecuación $f(x)=0$ sólo admite *una raíz positiva* (Teor. DESCARTES). En este caso es fácil encontrar un límite superior de esta raíz y probar *que partiendo de* $x=0$, *el primer miembro de la ecuación crece constantemente con* x.

Descompongamos $f(x)$ de tal suerte que juntando los términos positivos y en otro grupo los negativos tenga la forma:

$$f(x)=(A_0x^m+\ldots\ldots+A_nx^n)-(A_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots+A_m)=$$

$$=x^n\left[(A_0x^{m-n}+\ldots\ldots+A_n)-\left(\frac{A_{n-1}}{x}+\ldots\ldots+\frac{A_m}{x^n}\right)\right] \qquad (746)$$

Si x va creciendo desde cero, el primer paréntesis (de los dos que encierra el último paréntesis grande) va aumentando, y el segundo paréntesis va disminuyendo; la diferencia de ambos paréntesis va, pues, creciendo. Como lo propio sucede con x^n desde el momento que un valor positivo de x origina $f(x) > 0$, todo valor mayor satisface la misma condición y se ve que $f(x)$ va creciendo constantemente de $x = 0$ en adelante.

Sólo hay, pues, que sustituir en $f(x)$ y partiendo de cero números crecientes en lugar de x; el primero L para el cual resulte $f(\mathrm{L}) > 0$ es mayor que la única raíz positiva existente.

IV. Si á los primeros términos[1] positivos por suposición del primer miembro de:

$$f(x) = 0$$

se juntan todos los negativos haciendo punto omiso de los demás positivos, el polinomio $f(x)$ quedará descompuesto en dos partes: una que designaremos por $\varphi(x)$ que satisface las condiciones expresadas en el Teorema III y otra $\psi(x)$ formada sólo de términos positivos. Tendremos, pues:

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

Todo valor positivo L de x que llene la condición $f(\mathrm{L}) > 0$ es, por consiguiente, un L_p^s de las raíces positivas de $f(x) = 0$, y desde $x = 0$ en adelante, $f(x)$ crece constantemente.

Límite superior de las raíces positivas de una ecuación.

498. Pasemos, pues, á exponer los métodos más usuales para determinar el L_p^s que es el punto esencial del problema (párrafo 496).

499. *Primer método.—Límite de* Mac-Laurin. En el Capítulo VIII de esta Segunda Parte hemos explicado la manera de determinar este límite; así pues, sólo nos ocuparemos en recordar únicamente el enunciado de la regla que lo cifra, suponiendo que la ecuación propuesta es de la forma de la (745).

Para obtener el L_p^s de una ecuación, se añade una unidad al cociente que resulta de dividir el valor absoluto del mayor coeficiente negativo de la ecuación entre el coeficiente del primer término.

Si pues en la (745) A_n es el mayor coeficiente negativo en valor absoluto, el valor límite de x es:

$$x \overset{=}{>} 1 + \frac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{A}_0} \tag{747}$$

Si en la propuesta fuese 1 el coeficiente del primer término como comunmente hemos supuesto, se tendrá el límite sencillísimo:

$$x \overset{=}{>} 1 + \mathrm{A}_n \tag{747'}$$

Como este límite es por lo general lejano, exponemos los siguientes métodos que conducen á límites más próximos.

[1] Esos términos pueden ser uno solo.

500. *Segundo método.* En este método es condición precisa atender al rango del primer término negativo que figura en la ecuación y suponiendo que dicho rango pasa del segundo para que el límite sea más próximo.

Sea A_n el valor absoluto del mayor coeficiente negativo, $m - p$ la potencia de la variable x, correspondiente al primer término negativo.

Es claro que el primer miembro de $f(x)$ (fórmula 745) será para todo valor positivo de x igual ó mayor que el del polinomio.

$$\mathrm{A}_0 x^m + \mathrm{A}_1 x^{m-1} + \ldots\ldots - \mathrm{A}_n (x^{m-p} + x^{m-p-1} + \ldots\ldots + x + 1)$$

Si pues un valor de x hace positiva esta expresión, con mayor motivo llenará la condición $f(x) > 0$.

Ahora bien, el paréntesis que multitiplica á A_n equivale al cociente.

$$\frac{x^{m-p+1} - 1}{x - 1}$$

ya se haga la deducción de acuerdo con los teoremas de la división de polinomios (Contreras.—*Álgebra.*), ya se considere dicho paréntesis como una progresión geométrica (Contreras.—*Álgebra*).

Basta, pues, determinar un valor positivo de x, partiendo del cual se tenga:

$$\mathrm{A}_0 x^m - \mathrm{A}_n \frac{x^{m-p+1} - 1}{x - 1} > 0$$

Suponiendo *a priori* $x > 1$ é incorporando el entero á la forma de quebrado, se tiene:

$$\mathrm{A}_0 x^m (x - 1) - \mathrm{A}_n (x^{m-p+1} - 1) > 0$$

ó bien:

$$\mathrm{A}_0 x^m (x - 1) - \mathrm{A}_n x^{m-p+1} + \mathrm{A}_n > 0$$

Esta relación será satisfecha si se tiene:

$$\mathrm{A}_0 x^m (x - 1) - \mathrm{A}_n x^{m-p+1} > 0$$

ó bien:

$$\mathrm{A}_0 x^{m-p+1} \left[x^{p-1}(x - 1) - \frac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{A}_0} \right] > \text{ó} = 0$$

Como todo valor positivo de x hace positivo al factor $\mathrm{A}_0 x^{m-p+1}$ pueden dividirse por él ambos miembros de la desigualdad y la condición se reduce á:

$$x^{p-1}(x - 1) - \frac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{A}_0} > \text{ó} = 0$$

Ahora bien, para $x > 1$ se tiene por otra parte:

$$x^{p-1}(x - 1) > (x - 1)^{p-1}(x - 1) > (x - 1)^p \tag{748}$$

Sustituyendo, pues, $(x - 1)^p$ en lugar de $x^{p-1}(x - 1)$ se tiene:

$$(x - 1)^p - \frac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{A}_0} > \text{ó} = 0$$

De donde:

$$x > ó = 1 + \sqrt[p]{\frac{A_n}{A_0}}$$ [1]

Así pues: *siendo* p *la diferencia entre el grado de la ecuación y el de su primer término negativo, si se añade una unidad á la raíz de índice* p *del cociente del valor absoluto del mayor coeficiente negativo de la ecuación entre el coeficiente del primer término, el número que resulta es un* L_p^s *de la propuesta.*

Si el primer término de la ecuación tiene 1 por coeficiente el límite será:

$$x > ó = 1 + \sqrt[p]{A_n}$$

Si el primer término negativo es el segundo de la ecuación se tiene $p = 1$ y resulta el límite de Mac-Laurin.

EJEMPLOS.

501. Aplicando el método expuesto anteriormente á las ecuaciones siguientes, se tiene:

1º $x^4 - 5x^3 + 37x^2 - 3x + 39 = 0$	$L_p^s = 5 + 1 = 6$
2º $x^5 + 7x^4 - 12x^3 - 49x^2 + 52x - 13 = 0$	$L_p^s = \sqrt{49} + 1 = 8$
3º $x^4 + 11x^2 - 25x - 67 = 0$	$L_p^s = \sqrt[3]{67} + 1 > 4$ y < 5
4º $x^3 - 2x^2 - 11x + 4 = 0$	$L_p^s = \frac{11}{3} + 1 > 4$ y < 5
5º $x^5 - 8x^4 + 23x^3 + 10x^2 - 20x + 11 = 0$	$L_p^s = 20 + 1 = 21$
6º $x^7 + 8x^6 + 2x^5 - 10x^4 - 40x^3 + 10x^2 - 14x - 100 = 0$	$L_p^s = \sqrt[3]{100} + 1 > 5$ y < 2

El método de Mac-Laurin hubiera dado:

6, 50, 68, 5, 21, 101

Aplicando ambos métodos á la ecuación:

$$2x^6 + 3x^5 + 10x^4 - 7x^3 - 12x^2 + x - 4 = 0$$

el de Mac-Laurin daría por límite $1 + \frac{12}{2} = 7$, y el segundo método daría:

$$1 + \sqrt[3]{\tfrac{12}{2}} = 1 + \sqrt[3]{6} > 2 \text{ y } < 3$$

502. *Tercer método de las agrupaciones.* Este método, basado en lo expuesto en el párrafo 497-III, conduce á un éxito más ó menos plausible según la manera más ó menos

1 Para aclarar más la deducción con otras palabras, si en el primer momento de la desigualdad (748) sustituimos por $x^{p-1}(x-1)$ el valor:

$$\frac{A_n}{A_0}$$

que da la precedente, tendremos:

$$\frac{A_n}{A_0} = (x-1)^p$$

de donde:

$$x = 1 + \sqrt[p]{\frac{A_n}{A_0}}$$

como anteriormente resultó para el caso de la igualdad.

perspicaz con que se aplica. Si se supone descompuesta la ecuación en *grupos de términos* de tal suerte que cada grupo comience por un término positivo y presente sólo una variación, cada grupo tomado separadamente constituirá una ecuación si se le iguala á cero. Si se llega á hallar un valor de x que haga positivos todos los grupos, este valor será el L_p^s de las raíces de la propuesta.

Sea la ecuación:

$$x^4 - 5x^3 + 37x^2 - 3x + 39 = 0$$

la escribiremos de esta manera:

$$x^3(x-5) + 37x\left(x - \tfrac{3}{37}\right) + 39 = 0$$

sustituyendo por x el número 5 ú otro mayor que 5 se obtiene un resultado positivo; así pues, el L_p^s es 5, más cercano, como se ve, que 6, que hallamos en el párrafo 501.

La segunda ecuación del párrafo 501 se puede descomponer así.

$$x^2(x^3 - 49) + 7x^3\left(x - \tfrac{12}{7}\right) + 52\left(x - \tfrac{1}{4}\right) = 0$$

como todo número mayor que 4 da resultado positivo, 4 es el L_p^s.

Sea la ecuación:

$$2x^6 + 3x^5 + 10x^4 - 7x^3 - 12x^2 + x - 4 = 0$$

que tratamos en el párrafo 501 y que podemos descomponer así:

$$(2x^6 + 3x^5) + x^2(10x^2 - 7x - 12) + (x - 4) = 0$$

El primer grupo es siempre positivo, el segundo de 2 en adelante, y el tercero de 4 en adelante; así pues, 4 es el L_p^s.

Si nos valemos del artificio de añadir y quitar x al primer miembro, resulta:

$$(2x^6 + 3x^5) + x(10x^3 - 7x^2 - 12x - 1) + (2x - 4) = 0$$

en donde vemos que 2 es el L_p^s.

503. *Cuarto método. Método de Newton.*[1] Sea $f(x) = 0$ la propuesta que supondremos de grado m; consideremos el primer miembro de la propuesta y sus m derivadas, es decir, la serie:

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots\ldots,\ f^{m-1}(x),\ f^m(x)$$

Si un valor positivo l *sustituído en lugar de* x *hace positivas todas estas funciones, es decir, positivos todos los términos de la serie anterior,* l *es un límite superior de las raíces positivas de:*

$$f(x) = 0$$

Por la fórmula de Taylor se tiene:

$$f(l+h) = f(l) + \frac{h}{1} f'(l) + \frac{h^2}{1.2} f''(l) + \ldots\ldots + \frac{h^m}{1.2.3 \ldots\ldots m} f^m(l)$$

como por supuesto son positivos los términos del segundo miembro, resulta *cualquiera que sea* h (siendo positivo):

$$f(l+h) > 0$$

se ve también que partiendo de $x = l$ en adelante $f(x)$ va creciendo constantemente.

1 Indicado en su "*Aritmética Universal.*"