Para la aplicación práctica del método se procede así. Se forma la serie:

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots\ldots,\ f^{m-1}(x),\ f^{m}(x)$$

y si se va operando con ella comenzando por $f^{m}(x)$, siendo positivo el primer término de $f(x)$, $f^{m}(x)$ es una *constante positiva*, $f^{m-1}(x)$ es de primer grado y su primer término es *positivo;* se determina, pues, un valor l_0 de x que haga positiva esta función.

Se pasa á $f^{m-2}(x)$ verificando si l_0 la hace positiva, si no la hace positiva se aumenta l_0 hasta cambiarlo en un número l_1 que la haga positiva.

Se pasa á f^{m-3} y si no basta para hacerla positiva, el número l_1 se cambia aumentándolo en el l_2, y así se sigue hasta llegar á la función propuesta y á un número L que la haga positiva y que es el L_p^s.

504. *Ejemplo.* Sea la propuesta y sus derivadas:

$$\begin{aligned} f\ (x)&=x^4-5x^3-6x^2-19x+7\\ f'(x)&=4x^3-15x^2-12x-19\\ f''(x)&=12x^2-30x-12\\ f'''(x)&=24x-30\\ f^{\text{IV}}(x)&=24 \end{aligned}$$

El número 1 hace positivo á $f^{\text{IV}}(x)$ pero hace negativa á $f'''(x)$
" " 2 " " á $f^{\text{IV}}(x)$, $f'''(x)$ pero hace negativa á $f''(x)$

....

" " 5 " " á todas las derivadas, pero hace negativa á $f(x)$
" " 6 aun hace negativa á la propuesta.
" " 7 hace positivas *á todas* y es el L_p^s.

Por el método de Mac-Laurin hubiéramos obtenido............. 20
Por el segundo método hubiéramos obtenido........................ 20
Por el método de Newton obtenemos.................................. 7

Vemos, pues, cuán ventajoso es respecto á los otros.

Recomendamos al lector trate por el de las *agrupaciones* el ejemplo anterior.

505. *Quinto método. Método de Laguerre.*[1] Sabemos que, en general, se tiene la relación demostrada en álgebra:

$$\frac{x^r-1}{x-1}=x^{r-1}+x^{r-2}+\ldots..+x+1$$

de donde:

$$x^r=x^{r-1}(x-1)+x^{r-2}(x-1)+\ldots\ldots+x(x-1)+(x-1)+1$$

Aplicando esta fórmula á los términos positivos de la ecuación propuesta que supondremos de la forma (745), se tiene:

$$\begin{aligned} A_0x^m\ &=A_0x^{m-1}(x-1)+A_0x^{m-2}(x-1)+\ldots\ldots+A_0x(x-1)+A_0(x-1)+A_0\\ A_1x^{m-1}&=A_1x^{m-2}(x-1)+A_1x^{m-3}(x-1)+\ldots\ldots+A_1\\ A_2x^{m-2}&=A_2x^{m-3}(x-1)+A_2x^{m-4}(x-1)+\ldots\ldots+A_2 \end{aligned}$$

etc., etc.

1 En sus "*Nouvelles Annales de Mathématiques*" 1880.

Sumando estos resultados para reconstruir el primer miembro de la (745) resulta:

$$\left.\begin{array}{l|l|l} A_0(x-1)x^{m-1}+A_0 & (x-1)x^{m-2}+A_0 & (x-1)x^{m-3}+\ldots\ldots+A_0\\ \qquad\qquad\quad +A_1 & \qquad\qquad\ \ +A_1 & \qquad\qquad\qquad\qquad +A_1\\ & \qquad\qquad\ \ +A_2 & \qquad\qquad\qquad\qquad +A_2\\ & & \qquad\qquad\qquad\qquad +\ldots\ldots\\ & & \qquad\qquad\qquad\qquad +A_{m-1} \end{array}\right\} \quad (749)$$

Si hubiese algún término negativo como $-A_nx^{m-n}$ habrá uno de la misma forma en el anterior desarrollo (749) que será:

$$(A_0+A_1+A_2+\ldots\ldots)(x-1)x^{m-n}$$

y el coeficiente total respectivo será:

$$[(A_0+A_1+A_2+\ldots\ldots)(x-1)-A_n] \qquad (750)$$

de cuyo signo dependerá el del término de que es coeficiente.

Para que sea positivo, es preciso que se llene la condición:

$$(A_0+A_1+A_2+\ldots\ldots)(x-1)>A_n$$

ó bien:

$$x>1+\frac{A_n}{A_0+A_1+A_2+\ldots\ldots}$$

así pues: *tómese cada coeficiente negativo, divídase por la suma de los positivos que le preceden, agréguese á cada cociente una unidad y el resultado mayor es el* L_p^s.

Algunos autores dan á este método una forma análoga en su aplicación práctica al de Newton; nosotros hemos preferido demostrarlo como acaba de verse.

APLICACIONES.

506. I. Sea la ecuación:

$$4x^5-8x^4+23x^3+105x^2-80x+11=0$$

Se tiene, según el método de Laguerre:

$$\tfrac{8}{4}+1=3,\ \frac{80}{4+23+105}+1=\tfrac{20}{33}+1 \text{ que es } <3$$

El L_p^s es, pues, 3.

II. Sea la ecuación:

$$x^4-5x^3-6x^2-17x+7=0$$

ya tratada en el párrafo 504.

Según el primer método, el L_p^s es 20.
" " segundo " " " " 20.
" " cuarto " " " " 7.
" " quinto " " " " 20.

Vemos la ventaja del de Newton. Es conveniente que el lector aplique el Tercer método de las *agrupaciones*.

III. Sea la ecuación:

$$x^4-5x^3+37x^2-3x+39=0$$

Primer método: $L_p^s = 5+1=6$
Segundo „ $L_p^s = \sqrt{5}+1=6$
Cuarto „ $L_p^s = 2$
Quinto „ $L_p^s = \frac{3}{38}+1=2$ aproximadamente.

IV. Sea la ecuación:

$$f(x)=x^5+x^4+4x^3-6x^2-7000x+800=0$$

Busquemos sus derivadas:

$$f'\ (x)=5x^4+4x^3-12x^2-12x-1000$$
$$f''\ (x)=20x^3+12x^2-24x-12.$$
$$f'''\ (x)=60x^2+24x-24$$
$$f^{\text{IV}}\ (x)=120x+24$$
$$f^{\text{V}}\ (x)=120.$$

Haciendo $x=7$ todas estas funciones en la propuesta son positivas, luego 7 es el L_p^s.

El primer método da: $7000+1 = 7001$
„ segundo „ „ $\sqrt[5]{7000}+1 > 84$ y < 85
„ quinto „ „ $\frac{7000}{2}+1 = 3501$

507. *Nota.* Como siendo l un L_p^s de $f(x)=0$, la función $f(x)$ (que es >0 para $x=l$) crece sin fin de $x=l$ hasta $x=+\infty$ y en el mismo intervalo (Capítulo VII. Primera Parte) la derivada $f'(x)$ es constantemente positiva, y por consiguiente, no puede anularse; se concluye que l es á la vez L_p^s de las raíces de $f(x)=0$ y de $f'(x)=0$.

Esta deducción se desprende inmediatamente de los conceptos en que se basa el método de NEWTON.

Límite superior de las raíces negativas.

508. Si $f(x)$ es la propuesta y se busca la transformada en $-x$ que llamaremos:

$$f(-x)$$

como las raíces *positivas* de la transformada son las negativas de la ecuación, el L_p^s de las raíces de la transformada será el L_n^s de las de la ecuación.

Por ejemplo, sea la ecuación:

$$x^4-x^3+2x^2-3x-6=0$$

cambiando x en $-x$ resulta:

$$x^4+x^3+2x^2+3x-6=0$$

El método de NEWTON da 2 para L_p^s de esta transformada, de consiguiente, -2 es el L_n^s de la propuesta.

Límite inferior de las raíces positivas.

509. Si buscamos la transformada de $f(x)=0$, cuyas raíces sean recíprocas de las de esta ecuación, el L_p^s *de la transformada será el* L_p^i *de la ecuación propuesta.*

Sea la ecuación:

$$x^4-x^3+2x^2-3x-6=0$$

La transformada en $\frac{1}{x}$ es:

$$6x^4+3x^3-2x^2+x-1=0$$

Como el L_p^s es 2 próximamente, el L_p^i de las raíces de la propuesta será $\frac{1}{2}$.

Límite inferior de las raíces negativas.

510. Buscando la transformada de $f(x)=0$ cuyas raíces sean recíprocas $f(\frac{1}{x})=0$, el L_p^s *de esta ecuación con signo cambiado y sirviendo de denominador á una fracción cuyo numerador es la unidad, será el* L_n^i *de las raíces de la propuesta.*

Sea:

$$x^4-x^3+2x^2-3x-6=0$$

el límite buscado será:

$$L_n^i = -\tfrac{1}{2}$$

511. En resumen, en la ecuación:

$$x^4-x^3+2x^2-3x-6=0$$

se tiene:

$$L_p^s=3,\quad L_n^s=-2,\quad L_p^i=\tfrac{1}{2}\quad L_n^i=-\tfrac{1}{2}$$

La ecuación:

$$3x^3-2x^3-11x+4=0$$

conduce á:

$$L_p^s=5,\quad L_n^s=-5,\quad L_p^i=\tfrac{1}{3},\quad L_n^i=-\tfrac{1}{3}$$

según se ve claramente por el siguiente cuadro de operaciones:

Ecuación: $3x^3-2x^2-11x+4=0$ (a)
Transformada en $-x$: $3x^3+2x^2-11x-4=0$ (b)
„ „ $\frac{1}{x}$: $4x^3-11x^2-2x+3=0$ (c)

La ecuación (a) da: $L_p^s=5$
„ „ (b) „ $L_p^s=5$ luego para la propuesta $L_n^s=-5$
„ „ (c) „ $L_p^s=3$ „ „ „ „ $L_p^i=\frac{1}{3}$, $L_n^i=-\frac{1}{3}$

es decir, los valores antes escritos.

512. Puede aún determinarse el L_p^i *dividiendo el último término negativo entre la suma de este término y el mayor coeficiente de signo contrario á este término.*

Sea la ecuación:

$$x^m+Px^{m-1}+\ldots\ldots+Sx^2+Tx\pm U=0$$

que para más sencillez suponemos con 1 por coeficiente del primer término.

Para $x=\frac{1}{y}$ resulta:

$$y^m+\frac{Ty^{m-1}}{\pm U}+\frac{Sy^{m-2}}{\pm U}+\ldots\ldots+\frac{Py}{\pm U}+\frac{1}{\pm U}=0$$

Supongamos que R es el mayor coeficiente de signo contrario á $\pm U$, es claro que $\frac{R}{U}$ será el mayor coeficiente negativo de la transformada.

Según lo antes expresado, podemos tomar como L_p^s, según el método de MAC-LAURIN:

$$L_p^s=\frac{R}{U}+1$$

de consiguiente:

$$L_p^i=\frac{1}{L_p^s}=\frac{U}{U+R}$$

que es lo que expresa lo enunciado.

Por ejemplo, sea la ecuación:

$$x^4-x^3+2x^2-3x-6=0$$

obtendremos:

$$L_p^i=\frac{6}{6+2}=\frac{3}{4}$$

En el párrafo 511 obtuvimos $L_p^i=\frac{1}{2}$.

APLICACIONES.

513. I. Tratar la ecuación:

$$x^6+3x^5-36x^4-45x^3+93x^2+132x+140=0$$

Debe hallarse:

$$L_p^s=6,\quad L_n^s=-8,\quad L_p^i=1,\quad L_n^i=-1$$

II. Averiguar los límites de las raíces de la ecuación:

$$x^7+8x^6+2x^5-10x^4-40x^3+10x^2-14x-100=0$$

III. Averiguar los límites de las raíces de las ecuaciones:

(1) $\quad x^4-x^3+x^2-2x+2=0$

(2) $\quad x^5+x^4+3x^3-6x^2-5x-8=0$

(3) $\quad x^4+11x^2-25x-67=0$

CAPÍTULO XIII.

RAÍCES CONMENSURABLES.

Consideraciones preliminares.—Raíces enteras.—Método de exclusión de NEWTON.—Método indirecto para determinar las raíces fraccionarias.—Método directo.—Aplicaciones.

514. Supondremos que la propuesta $f(x)=0$ tiene coeficientes racionales que pueden ser enteros ó fraccionarios. En este segundo caso, se pueden quitar los denominadores que presenta el primer miembro de la ecuación y transformar los coeficientes en números enteros. Así pues, en último análisis, supondremos el caso de coeficientes racionales y enteros.

Teóricamente hablando, propuesta una ecuación habría que aplicarle desde luego el método de investigación de las Raíces Conmensurables que pueda admitir, pues el citado método que pasamos á exponer es sencillo de entenderse y expedito para aplicarse. Si se lograban conocer entonces: una, dos, tres, ... raíces conmensurables, rebajando la ecuación se tendría después que resolver otra de menor grado. Las raíces conmensurables pueden ser enteras ó fraccionarias.

515. **Raíces enteras.** Sea la ecuación general:

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots\ldots+A_{m-1}x+A_m=0 \tag{751}$$

con coeficientes enteros y racionales.

Sea a un número *entero*, para averiguar si a es raíz de la propuesta, dividamos (Capítulo I. Segunda Parte) $f(x)$ entre $x-a$, lo que conduce al cociente:

$$Q=A_0x^{m-1}+B_1x^{m-2}+B_2x^{m-3}+\ldots\ldots+B_{m-2}x+B_{m-1} \tag{752}$$

y á una resta R que será nula si a es raíz.

Los coeficientes del cociente (752) según lo explicado (Capítulo I. Segunda Parte), tienen las expresiones:

$$B_1=A_0a+A_1,\quad B_2=B_1a+A_2,\quad B_3=B_2a+A_3,\quad \ldots\ldots,\quad B_{m-2}=B_{m-3}a+A_{m-2},$$

$$B_{m-1}=B_{m-2}a+A_{m-1},\quad R=B_{m-1}a+A_m$$