Para $x = \frac{1}{y}$ resulta:

$$y^m + \frac{Ty^{m-1}}{\pm U} + \frac{Sy^{m-2}}{\pm U} + \dots\dots + \frac{Py}{\pm U} + \frac{1}{\pm U} = 0$$

Supongamos que R es el mayor coeficiente de signo contrario á $\pm U$, es claro que $\frac{R}{U}$ será el mayor coeficiente negativo de la transformada.

Según lo antes expresado, podemos tomar como $L_p^s$, según el método de MAC-LAURIN:

$$L_p^s = \frac{R}{U} + 1$$

de consiguiente:

$$L_p^i = \frac{1}{L_p^s} = \frac{U}{U+R}$$

que es lo que expresa lo enunciado.

Por ejemplo, sea la ecuación:

$$x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0$$

obtendremos:

$$L_p^i = \frac{6}{6+2} = \frac{3}{4}$$

En el párrafo 511 obtuvimos $L_p^i = \frac{1}{2}$.

## APLICACIONES.

513. I. Tratar la ecuación:

$$x^6 + 3x^5 - 36x^4 - 45x^3 + 93x^2 + 132x + 140 = 0$$

Debe hallarse:

$$L_p^s = 6, \quad L_n^s = -8, \quad L_p^i = 1, \quad L_n^i = -1$$

II. Averiguar los límites de las raíces de la ecuación:

$$x^7 + 8x^6 + 2x^5 - 10x^4 - 40x^3 + 10x^2 - 14x - 100 = 0$$

III. Averiguar los límites de las raíces de las ecuaciones:

(1) $\quad x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 2 = 0$

(2) $\quad x^5 + x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 5x - 8 = 0$

(3) $\quad x^4 + 11x^2 - 25x - 67 = 0$

# CAPÍTULO XIII.

## RAÍCES CONMENSURABLES.

Consideraciones preliminares.—Raíces enteras.—Método de exclusión de NEWTON.—Método indirecto para determinar las raíces fraccionarias.—Método directo.—Aplicaciones.

514. Supondremos que la propuesta $f(x) = 0$ tiene coeficientes racionales que pueden ser enteros ó fraccionarios. En este segundo caso, se pueden quitar los denominadores que presenta el primer miembro de la ecuación y transformar los coeficientes en números enteros. Así pues, en último análisis, supondremos el caso de coeficientes racionales y enteros.

Teóricamente hablando, propuesta una ecuación habría que aplicarle desde luego el método de investigación de las Raíces Conmensurables que pueda admitir, pues el citado método que pasamos á exponer es sencillo de entenderse y expedito para aplicarse. Si se lograban conocer entonces: una, dos, tres, ...... raíces conmensurables, rebajando la ecuación se tendría después que resolver otra de menor grado. Las raíces conmensurables pueden ser enteras ó fraccionarias.

515. **Raíces enteras.** Sea la ecuación general:

$$f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots\dots + A_{m-1}x + A_m = 0 \tag{751}$$

con coeficientes enteros y racionales.

Sea $a$ un número *entero*, para averiguar si $a$ es raíz de la propuesta, dividamos (Capítulo I. Segunda Parte) $f(x)$ entre $x - a$, lo que conduce al cociente:

$$Q = A_0x^{m-1} + B_1x^{m-2} + B_2x^{m-3} + \dots\dots + B_{m-2}x + B_{m-1} \tag{752}$$

y á una resta R que será nula si $a$ es raíz.

Los coeficientes del cociente (752) según lo explicado (Capítulo I. Segunda Parte), tienen las expresiones:

$$B_1 = A_0a + A_1, \quad B_2 = B_1a + A_2, \quad B_3 = B_2a + A_3, \quad \dots\dots, \quad B_{m-2} = B_{m-3}a + A_{m-2},$$

$$B_{m-1} = B_{m-2}a + A_{m-1}, \quad R = B_{m-1}a + A_m$$

*Si* a *es raíz*, antes recordamos que R debe ser nula, y de consiguiente se tendrá:

$$\frac{A_m}{a} = -B_{m-1} \tag{753}$$

De las anteriores igualdades se obtiene:

$$-B_{m-2} = \frac{A_{m-1} - B_{m-1}}{a}, \quad -B_{m-3} = \frac{A_{m-2} - B_{m-2}}{a}, \quad \ldots\ldots, \quad -B_2 = \frac{A_3 - B_3}{a},$$

$$-B_1 = \frac{A_2 - B_2}{a}, \quad -A_0 = \frac{A_1 - B_1}{a}, \quad \frac{A_0 - A_0}{a} = 0$$

De todo esto se deduce:

1º Que puesto que $R = 0$ conduce á la igualdad (753) en la que el segundo miembro es entero, el primero debe serlo y $a$ para ser raíz debe ser divisor de $A_m$ último término de la ecuación.

2º Que la suma del cociente del último término de la ecuación $A_m$ entre $a$ que es $-B_{m-1}$ con el penúltimo coeficiente $A_{m-1}$ de la ecuación; es decir, que la suma:

$$A_{m-1} - B_{m-1}$$

debe ser exactamente divisible entre $a$.

3º Que las sumas análogamente formadas:

$$A_{m-2} - B_{m-2}, \quad A_{m-3} - B_{m-3}, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad A_2 - B, \quad A_1 - B_1$$

deben ser divisibles entre $a$.

4º Que finalmente, la suma del último cociente obtenido $-A_0$ con el primer coeficiente $A_0$ de la ecuación debe ser cero.

516. De aquí puede, pues, deducirse la regla práctica. *Se buscan los divisores del último término* $A_m$ *comprendidos entre los límites admisibles para las raíces de acuerdo con los conceptos del Capítulo que precede á éste, se divide dicho último término* $A_m$ *entre el número* a *que vá á ensayarse, el cociente obtenido se suma con el coeficiente penúltimo de la ecuación; dicha suma se divide entre el número* a, *el cociente obtenido se suma con el antepenúltimo coeficiente, etc. Finalmente, por último cociente debe hallarse* $-A_0$, *que sumado con el* $A_0$ *primer coeficiente de la ecuación, da por suma 0;* a *pues, será raíz.*

*No será* a *raíz cuando la serie de operaciones da lugar á un cociente fraccionario ó cuando la última división conduce á un cociente que no sea* $-A_0$ *y entonces la suma de este cociente con el primer coeficiente* $A_0$ *de la ecuación no es 0.*

Notas. 1ª Debe observarse que los cocientes obtenidos:

$$-B_{m-1}, \quad -B_{m-2}, \quad -B_{m-3}, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad -B_2, \quad -B_1, \quad -A_0$$

son en *orden inverso* los coeficientes del cociente Q de $f(x)$ entre $x-a$ con *signo cambiado.*

Así pues, á la vez que se descubre la raíz $a$ se conocen los coeficientes del cociente de $f(x) \div x - a$, es decir, la nueva ecuación rebajada y propia para ensayar una nueva raíz entera.

2ª Con objeto de simplificar el trabajo, es conveniente ensayar si $+1$ ó $-1$ verifican la propuesta, pues en el caso afirmativo, desde luego puede rebajarse la ecuación.



517. Como se ve, el método para operar es este: determinación de los límites de las raíces; investigación de cuáles de los números comprendidos entre ellos son divisores del último término, y aplicación de la regla del párrafo 516. En el Capítulo IX, Segunda Parte, nos hemos ocupado de lo relativo á los límites, si pues por una parte fuesen estos lejanos y por otra el número de divisores del último término comprendidos entre ellos fuese crecido, el método sería muy laborioso, y pasamos á exponer el *método de exclusión* de Newton para disminuir el número de divisores por ensayar.

Este método se cifra en los teoremas siguientes:

Teorema I. *Cuando* a *es raíz entera de la ecuación* $f(x) = 0$, *el resultado* $f(S)$ *de la sustitución de un número entero cualquiera* S *en lugar de* x, *es exactamente divisible entre* $S - a$.

En efecto, si $a$ es raíz (Capítulo I. Segunda Parte) se tiene:

$$f(x) = (x - a)\,Q$$

siendo el cociente Q un polinomio de grado $m-1$ y de la forma de $f(x)$. Si se sustituye por $x$ el número entero S y se designa por $Q_{(S)}$ el resultado de la sustitución de S por $x$ en Q resulta:

$$\frac{f(S)}{S - a} = Q_{(S)} \tag{754}$$

que es lo que expresa el anunciado.

Teorema II. Puesto que hemos admitido la conveniencia de ensayar desde luego $+1$ y $-1$, se conocen $f(+1)$ y $f(-1)$ y se tiene:

$$\frac{f(+1)}{1-a} = Q_{(+1)} \text{ ó bien } \frac{f(+1)}{a-1} = -Q_{(+1)}$$

$$\frac{f(-1)}{1-a} = Q_{(-1)} \text{ ó bien } \frac{f(-1)}{a+1} = -Q_{(-1)}$$

De donde se concluye que: *entre los divisores del último término sólo podrán ser raíces los que disminuidos una unidad dividan á* $f(1)$ *y los que aumentados una unidad dividan á:*

$$f(-1)$$

*exactamente.*

Así pues, se excluirán los que no satisfagan estas condiciones y el número de divisores por ensayar se reduce mucho.

Teorema III. *La ecuación propuesta no admite ninguna raíz entera cuando ninguno de los resultados* $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$ *es divisible por 3.*

Escribiremos la igualdad bajo la forma:

$$\frac{f(S)}{a - S} = -Q_{(S)}$$

De donde se deduce:

$$\begin{aligned} f(1) &= -(a-1)\,Q_{(1)} \\ f(0) &= -\quad a \quad Q_{(0)} \\ f(-1) &= -(a+1)\,Q_{(-1)} \end{aligned}$$

Entre los tres números $a-1$, $a$, $a+1$ hay uno de ellos divisible por 3 puesto que son consecutivos; así pues, lo propio pasará con los tres primeros miembros: $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$ si la ecuación admite una raíz entera $a$.

La recíproca no es cierta; uno de los tres números: $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$ puede ser divisible entre 3 sin que la ecuación admita ninguna raíz entera.

518. Así pues, se determinarán los límites de las raíces, se sustituirán $+1$ y $-1$ para conocer $f(1)$ y $f(-1)$, se determinarán los divisores del último término comprendidos entre los límites y de ellos sólo se escogerán como raíces probables los que queden comprendidos en el caso del Teorema II excluyendo las demás; con dichos factores restantes se ensayará según lo prescrito en el párrafo 516, y se habrán determinado las raíces enteras conmensurables de la propuesta. Rebajándola, su resolución dependerá de la otra de menor grado.

519. El número de divisores N de el último término puede conocerse desde luego, pues (Véase CONTRERAS.—*Aritmética*) se sabe que si: $a, b, c, d, \ldots\ldots$ son los factores primos de un número dado y $p, q, r, s, \ldots\ldots$ las potencias respectivas á que entran elevados, el número de divisores será:

$$N=(p+1)(q+1)(r+1)(s+1)\ \ldots\ldots\ldots$$

incluyendo la 1 y el número dado.

520. En cuanto á la manera práctica de disponer el cálculo para aplicar la regla del párrafo 516, la expondremos con más claridad con ejemplos numéricos.

## APLICACIONES.

521. I. Sea la ecuación:

$$x^3-6x^2+27x-38=0$$

en la que se tiene:

$$L_p^s=3,\quad L_p^i=1$$

y no tiene raíces negativas, pues la transformada en $-x$ no tiene raíces positivas.

Siendo los límites 1 y 3 nos evitamos de emplear desde luego la regla del párrafo 516, ensayando directamente el número 2 por sustitución en la ecuación. Esta sustitución da 0 de resultado, así pues, 2 es raíz conmensurable. Dividiendo la propuesta entre $x-2$ resulta de cociente:

$$x^2-4x+19$$

Igualando á cero este cociente, las dos raíces de la ecuación de segundo grado que así se forma son:

$$2+\sqrt{-15}\ \text{ y }\ 2-\sqrt{-15},$$

luego las tres de la propuesta son:

$$2,\quad 2+\sqrt{-15},\quad 2-\sqrt{-15}$$

II. Sea la ecuación:

$$x^4-14x^3+71x^2-154x+120=0$$

Comenzaremos por averiguar de acuerdo con el Teorema III párrafo 517, si la propuesta puede admitir raíces enteras. Tendremos:

$$f(+1)=+24,\quad f(0)=120,\quad f(-1)=360$$

luego la propuesta sí admite raíces enteras.



Como se tiene de acuerdo con la aritmética:

| | |
|---|---|
| 120 | 2 |
| 60 | 2 — 4 |
| 30 | 2 — 8 |
| 15 | 3 — 6 — 12 — 24 |
| 5 | 5 — 10 — 20 — 40 — 15 — 30 — 60 — 120 |
| 1 | |

los divisores de 120 son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120, es decir, son 16 divisores como desde luego pudo haberse deducido de la fórmula:

$$N=(3+1)(1+1)(1+1)=16$$

derivada de esta igualdad:

$$120=23\times 3\times 5$$

Busquemos los límites de las raíces según el método de NEWTON:

$$\begin{aligned}
f\ (x)&=x^4-14x^3+71x^2-154x+120\\
f'\ (x)&=4x^3-42x^2+142x-154\\
f''\ (x)&=12x^2-84x+142\\
f'''(x)&=24x-84\\
f^{\text{IV}}(x)&=24
\end{aligned}$$

$$L_p^s=5,\quad L_p^i=1$$

no admite raíces negativas, de consiguiente, entre los 16 divisores ántes escritos, sólo tomaremos éstos: 2, 3, 4, 5, y como se ve desde luego, excluimos 12. Para averiguar si aún es posible reducir más su número, aplicaremos el método de *exclusion* de NEWTON, valiéndonos para ello de $f(+1)$ y $f(-1)$. Tenemos, como antes ya vimos:

$$f(+1)=+24,\quad f(-1)=360$$

Escribiremos las hileras siguientes:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Divisores: | 2, | 3, | 4, | 5 |
| Aumentando 1: | 3, | 4, | 5, | 6 |

Como 3, 4, 5 y 6 dividen á 360 que es $f(-1)$ hay que ensayar con 2, 3, 4 y 5 la regla del párrafo 516.

Efectuaremos el cálculo disponiéndolo como á continuación expresamos:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ecuación: | $x^4-14x^3+71x^2-154x+120$ | | | | |
| Divisores de 120 admisibles: | | 2, | 3, | 4, | 5 |
| Cocientes: | $\frac{A_m}{a}=-B_{m-1}$ : | 60, | 40, | 30, | 24 |
| Sumas: | $A_{m-1}B_{m-1}$ : | $-94$, | $-114$, | $-124$, | $-130$ |
| Cocientes: | $\frac{A_{m-1}-B_{m-1}}{a}=-B_{m-2}$ : | $-47$, | $-38$, | $-31$, | $-26$ |
| Sumas: | $A_{m-2}-B_{m-2}$ : | $+24$, | $+33$, | $+40$, | $+45$ |
| Cocientes: | $\frac{A_{m-2}-B_{m-2}}{a}=-B_{m-3}$ : | $+12$, | $+11$, | $+10$, | $+9$ |
| Sumas: | $A_{m-3}-B_{m-3}$ : | $-2$, | $-3$, | $-4$, | $-5$ |
| Cocientes: | $\frac{A_{m-3}-B_{m-3}}{a}=-B_{m-4}=-A_0$ : | $-1$, | $-1$, | $-1$, | $-1$ |
| Sumas: | $A_{m-4}-B_{m-4}=A_0-A_0$ : | 0, | 0, | 0, | 0 |

Así pues, los cuatro números 2, 3, 4 y 5 son las cuatro raíces conmensurables de la propuesta:

N. B. 1ª Aconsejamos al lector que analice cada cuestión aplicándole los conceptos explicados en lo que va de esta Segunda Parte sobre la naturaleza de las raíces de una ecuación, los casos en que puede con anticipación presumirse, etc., etc.

2ª Si los resultados de sustituir $+1$ y $-1$ en $f(x)$ son 0, es decir, si:

$$f(+1)=0,\quad f(-1)=0$$

según el Teorema I párrafo 517, se supondrá $x=2$, $x=-2$ y los números:

$$f(+2),\quad f(-2)$$

que resulten de sustituir en la ecuación 2 y $-2$, deben ser divisibles entre $a-2$ y $a+2$. Puede igualmente dividirse la propuesta entre $(x+1)(x-1)=x^2-1$ aplicando al cociente el procedimiento general.

III. Sea la ecuación:

$$x^4-9x^3+23x^2-20x+15=0$$

en la que $L_p^s=6$, $L_p^i=1$, no tiene raíces negativas.

Los divisores de 15 son: 1, 3, 5, 15.

Excluimos á 15, pues pasa del límite, y á 1 porque no verifica la ecuación pues:

$$f(+1)=10$$

quedan, pues, 3 y 5.

Si les disminuimos una unidad, se cambian en 2 y 4, como 4 *no* divide á 10 y 2 *sí* lo divide, 3 es la *única* raíz probable.

Ensayándola se tiene:

| Raíz: | 3 |
|---|---|
| Cociente: | 5 |
| Suma: | $-15$ |
| Cociente: | $-5$ |
| Suma: | $+18$ |
| Cociente: | $+6$ |
| Suma: | $-3$ |
| Cociente: | $-1$ |
| Suma: | 0 |

así pues, 3 es la única raíz conmensurable.

Como se comprende, en este caso vale más sustituir directamente 3 en la ecuación para ver si la verifica.

Conocida la raíz 3 el cociente de la propuesta entre $x-3$ será según el párrafo 516, Nota 1ª:

$$x^3-6x^2+5x-5$$

Para aplicar á este polinomio igualado á cero, el procedimiento, tendremos:

$$L_p^s=6,\quad L_p^i=1$$

no tiene raíces negativas.

Los divisores de 5 son 1 y 5; como $f(1)=-5$ y $f(5)=-5$, las raíces de esta ecuación, es decir, las tres restantes de la propuesta *no* son conmensurables.

IV. Sea la ecuación:

$$x^3-7x^2+36=0$$



Aplicando lo explicado, sólo quedan por ensayar los números: 6, 3 y $-2$. Así pues, se tiene:

| 6, | 3, | $-2$ |
|---|---|---|
| 6, | 12, | $-18$ |
| 6, | 12, | $-18$ |
| 1, | 4, | $+9$ |
| $-6$, | $-3$, | $+2$ |
| $-1$, | $-1$, | $-1$ |
| 0, | 0, | 0 |

Así pues, 6, 3 y $-2$ son las tres raíces.

N. B. Comprobar la conclusión con lo que se ha dicho sobre la naturaleza de las raíces de una ecuación de tercer grado en el Capítulo VIII, Segunda Parte, por ejemplo.

V. Sea la ecuación:

$$2x^3-12x^2+13x-15=0$$

Aplicando los conceptos expuestos sólo quedan por ensayar los números 5 y $-3$, y se tiene:

| 5, | $-3$ |
|---|---|
| $-3$, | $+5$ |
| $+10$, | $+18$ |
| $+2$, | $-6$ |
| $-10$, | $-18$ |
| $-2$, | $+6$ |
| 0, | 8 |

Así pues, sólo 5 es raíz conmensurable.

El cociente del primer miembro de la propuesta entre $x-5$ (párrafo 516, Nota 1ª), despues de igualarlo á cero es:

$$2x^3-2x+3=0$$

cuyas raíces son:

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-5} \text{ y } \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-5}$$

Así pues, las tres de la propuesta serán:

$$5,\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-5} \text{ y } \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-5}$$

VI. Sea la ecuación:

$$4x^4-11x^2+7x-6=0$$

y supongamos que quiere operarse teniendo el primer término 1 por coeficiente. Suponiendo: $x=\frac{y}{2}$ resulta la ecuación:

$$y^4-11y^2+14y-24=0$$

Aplicando la regla conocida sólo hay que ensayar 3, 2 y $-4$; así pues, se tiene:

| 3, | 2, | $-4$ |
|---|---|---|
| $-8$, | $-12$, | $+6$ |
| $+6$, | $+2$, | $+20$ |
| $+2$, | $+1$, | $-5$ |
| $-9$, | $-10$, | $-16$ |
| $-3$, | $-5$, | $+4$ |
| $-3$, | $-5$, | $+4$ |
| $-1$, | $\times$, | $-1$ |
| 0, | $\times$, | 0 |