Vemos que 3 y 4 son raíces; en definitiva, las cuatro de la ecuación en y son:

$$3,\quad 4,\quad \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-7},\quad \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-7}$$

y las cuatro de la propuesta:

$$\tfrac{3}{2},\quad 2,\quad \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\sqrt{-7},\quad \tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\sqrt{-7}$$

VII. Sea la ecuación:

$$x^4+4x^3-19x^2-46x+120=0$$

Deben encontrarse las raíces:

$$3,\quad 2,\quad -4 \text{ y } -5$$

VIII. Sea la ecuación:

$$x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108=0$$

Se encuentra desde luego que admite las raíces 3 y 2.

Dividiendo esta ecuación entre:

$$(x-3)\,(x-2)=x^2+5x+6$$

se obtiene por cociente:

$$x^3-8x^2+21x-18$$

que igualado á cero origina una ecuación cuyas raíces son 3 y 2.

En fin, dividiendo:

$$x^3-8x^2+21x-18\div(x-3)\,(x-2)$$

resulta por cociente $x-3$, que igualado á cero produce la raíz 3.

En definitiva, la propuesta tiene por raíces:

$$3,\ 3,\ 3,\ 2 \text{ y } 2$$

Como vemos, pueden irse determinando las raíces iguales conmensurables de una ocasión con el procedimiento de las conmensurables desiguales.

Hé aquí por qué dijimos que teóricamente hablando (párrafo 514) propuesta una ecuación debería aplicársele desde luego el método de investigación de las Raíces Conmensurables.

Como las raíces deben ser divisores del último término A_m, si después de reconocer que un número a es raíz de la ecuación se divide $A_m \div a^2$, si el cociente no es exacto esto indica que la raíz entra sólo una vez en la ecuación:

IX Sea la ecuación:

$$x^6+3x^5-36x^4-45x^3+93x^2+132x+140=0$$

Deben encontrarse por raíces:

$$2,\quad 5,\quad -2,\quad -7,\quad -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3},\quad -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$$

522. **Raíces fraccionarias.** Sea la ecuación:

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\dots\dots+A_{m-1}x+A_m=0$$

que supondremos que admite una raíz fraccionaria representada por la *fracción inductible* $\frac{a}{b}$.

Sustituyendo este valor en lugar de x se tiene:

$$A_0\frac{a^m}{b^m}+A_1\frac{a^{m-1}}{b^{m-1}}+A_2\frac{a^{m-2}}{b^{m-2}}+\dots\dots+A_{m-1}\frac{a}{b}+A_m=0$$

Por transformaciones muy sencillas puede escribirse esta ecuación bajo las dos formas siguientes:

$$A_0\frac{a^m}{b}=-(A_1a^{m-1}+A_2a^{m-2}b+\dots\dots+A_{m-1}ab^{m-2}+A_mb^{m-1})$$

$$A^m\frac{b^m}{a}=-(A_0a^{m-1}+A_1a^{m-2}b+A_2a^{m-3}b^2+\dots\dots+A_{m-1}b^{m-1})$$

Los segundos miembros son enteros y los primeros deben serlo, pero como a y b son primos entre sí, resulta:

1º Que b debe dividir á A_0, es decir, que *los denominadores de las raíces conmensurables fraccionarias deben ser divisores del primer coeficiente* A_0 *de la ecuación propuesta que tiene coeficientes enteros.*

2º Que a debe dividir á A_m, es decir, que *los numeradores de las raíces conmensurables fraccionarias deben ser divisores del último coeficiente* A_m *de la propuesta que tiene coeficientes enteros.*

3º Que si el primer coeficiente A_0 es la unidad, los denominadores de las raíces fraccionarias serán tambien la unidad, ó en otros términos, que *toda ecuación cuyos coeficientes son enteros y el del primer término es la unidad, no puede admitir como raíces conmensurables sino números enteros.*

523. **Determinación indirecta de las raíces fraccionarias.** Sea la ecuación propuesta:

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\dots\dots+A_{m-1}x+A_m$$

que supondremos desembarazada de las raíces conmensurables enteras, y que de admitir otras raíces conmensurables sólo serán fraccionarias.

Si se la transforma (Capítulo II. Segunda Parte) en otra que tenga 1 por coeficiente del primer término, la transformada (párrafo 522–3º) sólo admitirá raíces enteras; así pues, se le aplicará el método del párrafo 516, y conocidas sus raíces enteras, la función que expresa la transformación efectuada hará conocer las raíces fraccionarias de la propuesta.

Busquemos la transformada cuyas raíces sean K veces mayores que las de la propuesta; siendo K un número determinado, tendremos:

$$f\left(\frac{x}{K}\right)=A_0\frac{x^m}{K^m}+A_1\frac{x^{m-1}}{K^{m-1}}+\dots\dots+A_{m-1}\frac{x}{K}+A_m=0$$

Como no se alteran las raíces de una ecuación cuando se multiplica su primer miembro por un factor constante, multiplicando por K^m para que los coeficientes sean enteros, resulta:

$$K^mf\left(\frac{x}{K}\right)=A_0x^m+KA_1x^{m-1}+\dots\dots+K^{m-1}A_{m-1}x+K^mA_m=0$$

ó bien dividiendo por A_0 todos los términos:

$$x^m+\frac{KA_1}{A_0}x^{m-1}+\dots\dots+\frac{K_{m-1}\,A_{m-1}}{A_0}x+\frac{K^m\,A_m}{A_0}=0$$

el primer coeficiente es la unidad, pero los demás son fraccionarios; para que sean enteros hay que suponer que K es igual á A_0 ó en general puede ser menor que A_0 pero tal que al entrar en:

$$KA_1,\ K^2A_2,\ \ldots\ldots,\ K^{m-1}A_{m-1},\ K^mA_m$$

origine cocientes enteros.

En el caso de suponer $K = A_0$ se tendría:

$$x_m + A_1x^{m-1} + A_2A_0x^{m-2} + A_3A_2x^{m-3} + \ldots\ldots + A_{m-1}A_0^{m-2}x + A_mA_0^{m-1} = 0$$

Buscando las raíces enteras de esta ecuación y dividiéndolas entre A_0, los cocientes serán las fracciones de la propuesta.

524. **Determinación directa de las raíces fraccionarias.** La determinación de las raíces fraccionarias puede hacerse también directamente siguiendo el procedimiento aplicable á las enteras.

No entraremos en los detalles especiales del procedimiento que ya hemos expuesto en el párrafo 516; tan sólo con un ejemplo tratado de las dos maneras por determinación *directa* y por *indirecta*, aclararemos más las ideas.

APLICACIONES.

525. I. Sea la ecuación:

$$6x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 2 = 0 \qquad \text{(a)}$$

que no tiene raíces conmensurables enteras y que averiguaremos si tiene raíces conmensurables fraccionarias.

Método indirecto. La transformada del párrafo 523 es en este caso:

$$x^4 - \frac{7K}{6}x^3 + \frac{8K^2}{6}x^2 - \frac{7K^3}{6}x + \frac{2K^4}{6} = 0 \qquad \text{(b)}$$

Suponiendo $K = 6$ para que los coeficientes sean enteros, es decir, multiplicando por 6 las raíces de la propuesta, resulta:

$$x^4 - 7x^3 + 48x^2 - 252x + 432 = 0$$

Esta ecuación es completa y de signos alternados; así pues, carece de raíces negativas.

Para la ecuación (a) se tiene:

$$L_p^s = 2,\quad L_p^i = \tfrac{1}{4}$$

Para la ecuación (b), puesto que sus raíces son seis veces mayores que las de la (a), se tiene:

$$L_p^s = 12,\quad L_p^i = \tfrac{3}{2}$$

Los divisores de 432 comprendidos entre estos límites son:

2, 4, 8, 3, 9 y 6

Las funciones $f(+1)$ y $f(-1)$ correspondientes á dicha ecuación (b) son:

$$f(+1) = 222,\quad f(-1) = 740$$

Aplicando el Teorema de Newton se deduce que solamente 3 y 4 pueden ser raíces, así pues, se tendrá:

3,	4
144,	108
− 108,	− 144
− 36,	− 36
+ 12,	+ 12
+ 4,	+ 3
− 3,	− 4
− 1,	− 1
0,	0

Vemos que 3 y 4 son raíces; dividiendo (b) $\div (x-3)(x-4)$ se obtiene la ecuación de segundo grado:

$$x^2 + 36 = 0 \text{ cuyas raíces son: } x = \pm 6\sqrt{-1}$$

Como las raíces de (a) son seis veces menores que las de (b), las raíces de (a) serán:

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \sqrt{-1},\ -\sqrt{-1}$$

Método directo. Como los denominadores de las raíces fraccionarias de (a) deben ser divisores de $A_0 = 6$ y los numeradores deben ser divisores de $A_m = 2$ (párrafo 522) sólo existirán las combinaciones: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

Se tendrá:

$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{2}{3}$
4,	6,	3
− 3,	− 1,	− 4
− 6,	− 3,	− 6
+ 2,	+ 5,	+ 2
+ 4,	+ 15,	+ 3
− 3,	− 8,	− 4
− 6,	− 24,	− 6
0,	− 18,	0

Así pues, son raíces $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$; como antes, se deducirían luego $+\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$ como las dos restantes.

En este caso, este método es más expedito que el primero.

II. Hay ciertos problemas que conducen á ecuaciones de tercero y cuarto grado, etc., cuyas soluciones enteras son las únicas aceptables por la misma naturaleza de la cuestión, debiendo reputarse como extrañas las soluciones fraccionarias conmensurables ó inconmensurables. Vamos á presentar un problema de este tipo.

Determinar la base de un sistema de numeración en que el número 2147 (sistema decimal) *fuese representado por el conjunto de cifras:* 32042 (sistema buscado).

Sea x la base desconocida que, como se comprende, debe ser entera. Las cifras 32042 tienen por valor relativo en el sistema de numeración de la base x:

$$3x^4,\quad 2x^3,\quad 4x,\quad 2$$

Como 32042 equivale á 2147 tendremos:

$$3x^4 + 2x^3 + 4x + 2 = 2147$$

ó bien:

$$3x^4 + 2x^3 + 4x - 2145 = 0$$

Los divisores de 2145 menores que 7, comprendidos entre los límites y propios para ensayar son 3 y 5, se tendrá:

3,	5
-715,	-429
-711,	-425
-237,	-85
-237,	-85
-79,	-17
-77,	-15
	-3
	0

Así pues, 5 es raíz, es la base buscada; y en efecto, 23042 equivale en el sistema decimal á:

$$3.5^4+2.5^3+4.5+2=2147$$

III. *Determinar la base del sistema en que el número* 81479 *(sistema decimal) se escribe con el conjunto de cifras* 456356 *(sistema buscado).*

Debe hallarse:

$$x=7$$

IV. Averignar si admite raíces conmensurables enteras ó fraccionarias la ecuación:

$$x^4+x^3-10x^2-4x+24=0$$

Debe hallarse:

$$2, \quad -3, \quad +\sqrt{2} \text{ y } -\sqrt{2}$$

CAPÍTULO XIV.

RAÍCES INCONMENSURABLES.

Método de aproximación para determinarlas.—Método de interpolación por partes proporcionales.—Método de Newton.—Método de Lagrange.—Aplicaciones.

526. Recapacitando sobre lo que llevamos escrito respecto á la resolución numérica de las ecuaciones, vemos que sólo nos queda por estudiar la determinacion de las raíces inconmensurables y la de las raíces imaginarias; en el presente Capítulo nos ocuparemos desde luego de las primeras.

Como se sabe ya, para emprender el cálculo de las raíces inconmensurables se ha tenido que efectuar una serie de operaciones previas: determinar los límites superior é inferior de las raíces reales de la ecuación, separar las raíces inconmensurables comprendidas entre ellos aplicando el método de Lagrange ó preferentemente el teorema de Sturm, y abreviando en lo posible las operaciones con ayuda de los teoremas de Descartes, Rolle, etc.

Tres métodos pasamos á exponer para la determinación de las raíces inconmensurables: *el de interpolación por partes proporcionales, el de* Newton *y el de* Lagrange.

527. **Método de interpolación por partes proporcionales.** Supongamos que se construye la curva $y=f(x)$ (fig. 37), que corresponde á la ecuación algebraica considerada $f(x)=0$ y examinémosla en el intervalo de dos sustituciones consecutivas comprendiendo una sola raíz real de la propuesta.

Sean:

$$OP=\alpha, \quad OQ=\beta$$

los valores entre los que está comprendida la raíz de la ecuación; como hay una sola raíz comprendida, la curva AB corta á Ox en un solo punto R y el valor de la raíz será OR. Tracemos la cuerda AB, si la curva coincidiese con su cuerda el valor de la raíz sería OS′; como esto no sucede, el procedimiento consiste en tomar OS por primer valor aproximado de la raíz y operar con OP y OS como ántes se operó con OP y OQ hasta irse acercando al verdadero valor OR.