Los divisores de 2145 menores que 7, comprendidos entre los límites y propios para ensayar son 3 y 5, se tendrá:

3,	5
$-715,$	-429
$-711,$	-425
$-237,$	-85
$-237,$	-85
$-79,$	-17
$-77,$	-15
	-3
	0

Así pues, 5 es raíz, es la base buscada; y en efecto, 23042 equivale en el sistema decimal á:

$$3.5^4 + 2.5^3 + 4.5 + 2 = 2147$$

III. *Determinar la base del sistema en que el número* 81479 *(sistema decimal) se escribe con el conjunto de cifras* 456356 *(sistema buscado).*

Debe hallarse:

$$x = 7$$

IV. Averignar si admite raíces conmensurables enteras ó fraccionarias la ecuación:

$$x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 24 = 0$$

Debe hallarse:

$$2, \quad -3, \quad +\sqrt{2} \text{ y } -\sqrt{2}$$

CAPÍTULO XIV.

RAÍCES INCONMENSURABLES.

Método de aproximación para determinarlas.—Método de interpolación por partes proporcionales.—Método de Newton.—Método de Lagrange.—Aplicaciones.

526. Recapacitando sobre lo que llevamos escrito respecto á la resolución numérica de las ecuaciones, vemos que sólo nos queda por estudiar la determinacion de las raíces inconmensurables y la de las raíces imaginarias; en el presente Capítulo nos ocuparemos desde luego de las primeras.

Como se sabe ya, para emprender el cálculo de las raíces inconmensurables se ha tenido que efectuar una serie de operaciones previas: determinar los límites superior é inferior de las raíces reales de la ecuación, separar las raíces inconmensurables comprendidas entre ellos aplicando el método de Lagrange ó preferentemente el teorema de Sturm, y abreviando en lo posible las operaciones con ayuda de los teoremas de Descartes, Rolle, etc.

Tres métodos pasamos á exponer para la determinación de las raíces inconmensurables: *el de interpolación por partes proporcionales, el de* Newton *y el de* Lagrange.

527. **Método de interpolación por partes proporcionales.** Supongamos que se construye la curva $y = f(x)$ (fig. 37), que corresponde á la ecuación algebraica considerada $f(x) = 0$ y examinémosla en el intervalo de dos sustituciones consecutivas comprendiendo una sola raíz real de la propuesta.

Sean:

$$OP = \alpha, \quad OQ = \beta$$

los valores entre los que está comprendida la raíz de la ecuación; como hay una sola raíz comprendida, la curva AB corta á Ox en un solo punto R y el valor de la raíz será OR. Tracemos la cuerda AB, si la curva coincidiese con su cuerda el valor de la raíz sería OS′; como esto no sucede, el procedimiento consiste en tomar OS por primer valor aproximado de la raíz y operar con OP y OS como ántes se operó con OP y OQ hasta irse acercando al verdadero valor OR.

De la figura se deduce:

$$\frac{PS}{QS}=\frac{PA}{QB}, \quad PS+QS=\beta-\alpha$$

y tomando $f(\alpha), f(\beta)$ en valor absoluto:

$$\frac{PS}{PS+SQ}=\frac{PA}{PA+QB} \quad \text{ó bien} \quad PS=(\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)}{f(\alpha)+f(\beta)} \qquad (755)$$

$$\frac{SQ}{PS+SQ}=\frac{QB}{PA+QB} \quad \text{ó bien} \quad SQ=(\beta-\alpha)\frac{f(\beta)}{f(\alpha)+f(\beta)} \qquad (755')$$

Así pues, para determinar el primer valor O S aproximado de la raíz ó se añade á la sustitución más pequeña α, el valor (755), ó se quita á la sustitución más grande β, el valor (755'). Para proseguir la aproximación, llamemos K y K' los valores (755) y (755'), tendremos, que el primer valor aproximado de la raíz es:

$$\gamma=\alpha+K \quad \text{ó} \quad \gamma=\beta-K'$$

Sustituyendo γ en la propuesta, el primer miembro toma el valor $f(\gamma)$ y se opera una interpolación análoga: entre α y γ si $f(\alpha)$ y $f(\gamma)$ son de signos contrarios, ó entre γ y β si $f(\alpha)$ y $f(\gamma)$ son de signos iguales.

Se encuentra, pues, en el primer caso:

$$K_1=K\frac{f(\alpha)}{f(\alpha)+f(\gamma)}$$

el segundo valor aproximado de la raíz será, pues:

$$\delta=\alpha+K_1$$

y se continuará análogamente.

528. Este método conduce á varias observaciones geométricas:

1ª Como se supone que α y β son bastante cercanos, de modo que:

$$f'(x)=0 \quad \text{y} \quad f''(x)=0$$

no admitan ninguna raíz real entre α y β, al variar x de α á β las funciones $f'(x)$ y $f''(x)$ *no cambiarán de signo*. Así pues, $f(x)$ será constantemente creciente ó decreciente en el intervalo considerado; $f'(x)$, que es la tangente trigonométrica del ángulo que la tangente á la curva hace con O x, irá constantemente aumentando ó decreciendo; finalmente, la curva A B volteará en dicho intervalo su concavidad hacia el mismo sentido.

2ª Para satisfacer á estas condiciones sólo hay cuatro disposiciones posibles expresadas por las figuras siguientes:

Fig. 37: $f(x)$ decrece, pasa de positiva á negativa, $f'(x)$ es negativa y crece tendiendo á cero, el valor de $f''(x)$ es, pues, constantemente positivo.

Fig. 38: $f(x)$ decrece, pasa de positiva á negativa, $f'(x)$ es negativa y decrece tendiendo á $-\infty$, $f''(x)$ es constantemente negativa.

Fig. 39: $f(x)$ crece, pasa de negativa á positiva, $f'(x)$ es positiva, crece tendiendo á $+\infty$, $f''(x)$ constantemente positiva.

Fig. 40: $f(x)$ crece, pasa de negativa á positiva, $f'(x)$ es positiva, decrece tendiendo á cero, $f''(x)$ constantemente negativa.

529. El valor O S del párrafo 527 está aproximado por *exceso* en el caso de las figuras 37 y 40, y por *defecto* en el caso de las figuras 38 y 39.

Así pues, puede establecerse la regla general:

El valor dado por el presente método es aproximado por exceso cuando $f(x)$ *y* $f''(x)$ *son del mismo signo para la primera sustitución* $x=\alpha$ (por consiguiente, de signos contrarios para $x=\beta$ que es la segunda sustitución); *es aproximado por defecto cuando* $f(x)$ *y* $f''(x)$ *son de signos contrarios para la primera sustitución* $x=\alpha$ (por consiguiente, del mismo signo para la segunda sustitución $x=\beta$).

N. B. Es pues preciso llevar la aproximación en el mismo sentido y atender cuidadosamente á las circunstancias propias del caso propuesto.

Adelante fijaremos las ideas con un ejemplo al que aplicaremos los tres métodos.

530. **Método de Newton.** Newton, en su "*Método de las fluxiones*," expuso el método de que vamos á ocuparnos, Fourier lo complementó indicando caracteres propios para emplearlo con éxito; en la presente obra vamos á concretarnos á lo substancial.

Supongamos que entre los números a y $a+1$ está comprendida la raíz por determinar; desde luego es conveniente procurar conocer de antemano la raíz con $\frac{1}{10}$ de aproximación para comodidad del cálculo. Sea pues α el valor de la raíz con $\frac{1}{10}$ de aproximación. Si en la propuesta se sustituye $x=\alpha+K$, siendo K muy pequeño se obtiene un desarrollo de la forma:

$$f(\alpha)+f'(\alpha)K+f''(\alpha)\frac{K^2}{1.2}+\ldots\ldots\ldots=0$$

de donde se obtiene:

$$K=-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}-\frac{f''(\alpha).K^2}{1.2f'(\alpha)}-\ldots\ldots=0$$

Como K es $<\frac{1}{10}$, K^2 es $<\frac{1}{100}$, $K^3<\frac{1}{1000}$, etc. Supongamos por el momento que el conjunto de términos que encierran estas potencias sea $<\frac{1}{100}$, despreciando este conjunto de términos, se tendrá para K un valor aproximado á menos de $\frac{1}{100}$, y que será:

$$K=-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \qquad (756)$$

Así pues, la división:

$$-f(\alpha)\div f'(\alpha)$$

se continuará hasta las centésimas; añadiendo K al valor α, es decir, valiéndose de la fórmula $x=\alpha+K$ se conoce el valor de x aproximado á menos de $\frac{1}{100}$ y que designaremos por β. Escribiremos nuevamente: $x=\beta+K'$ y el valor K' por buscar será $<\frac{1}{100}$. La nueva transformada es:

$$f(\beta)+f'(\beta)K'+f''(\beta)\frac{K'^2}{1.2}+\ldots\ldots\ldots=0$$

de donde:

$$K'=-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

Como $K' < \frac{1}{100}$, las potencias K'^2, K'^3, ..., serán menores respectivamente que $(\frac{1}{100})^2$; si despreciamos las potencias de K'^2 en adelante el valor de K' estará aproximado á menos de $(\frac{1}{100})^2 = \frac{1}{10000}$. Así pues, la división:

$$-f(\beta) \div f'(\beta)$$

se proseguirá hasta hallar cuatro cifras decimales; añadiendo el valor de K' así determinado á β, se obtendrá un valor γ de x, aproximado á menos de $\frac{1}{10000}$.

Se ve pues, que se obtendrán 8 decimales á la tercera corrección, 16 á la cuarta, etc., y el avance será rápido.

Para aplicar con seguridad el método de NEWTON es conveniente cerciorarse en cada operación de si puede contarse con el grado presunto de aproximación.

Sea y uno de los valores aproximados de la raíz, siendo $\frac{1}{10^n}$ el grado de la aproximación presunta. Se sustituirán en el primer miembro de la propuesta los números:

$$y - \frac{1}{10^n}, \quad y, \quad y + \frac{1}{10^n}$$

Si los resultados de las sustituciones son de signos diferentes, y será el valor aproximado de la raíz, con una aproximación de $\frac{1}{10^n}$ por exceso ó por defecto. Si los resultados son del mismo signo, la aproximación será exagerada, y se tomará entonces como valor precedente en la serie de aproximaciones sucesivas, otro más aproximado, con una aproximación marcada, por ejemplo, por la fracción:

$$\frac{1}{2(10)^{n-1}}$$

Se ensayará el nuevo valor como el precedente, y así sucesivamente hasta que los resultados de las tres sustituciones sucesivamente sean de signos diferentes.

Si por ejemplo nos referimos al valor β que se ha supuesto aproximado á $\frac{1}{100}$ se sustituirán:

$$\beta - \frac{1}{100}, \quad \beta, \quad \beta + \frac{1}{100},$$

si el resultado de la sustitución de $\beta - \frac{1}{100}$ ó $\beta + \frac{1}{100}$, es de signo contrario al de β, β estará aproximado á $\frac{1}{100}$; si los resultados son de signos iguales se tomará un valor más aproximado que α, en lugar de una aproximación á una décima se buscará una aproximación á una media décima, etc.

531. **Interpretación geométrica del método de Newton.** Nos referimos á la figura 37, en la que $OP = \alpha$ y $OQ = \beta$ son los valores que comprenden la raíz O R en donde la curva corta á:

$$Ox, \quad AP = f(\alpha), \quad BQ = f(\beta)$$

Si por A trazamos la tangente A T, la ecuación de dicha tangente será:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

siendo $f'(\alpha)$ la tangente trigonométrica del ángulo A T x.

Haciendo $y = 0$ en la anterior ecuación se obtiene la abscisa O T que llamaremos γ y cuyo valor será:

$$\gamma = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

La cantidad $-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ que se debe añadir á α para tener á γ es justamente la que llamamos K en el párrafo 530; en efecto, se ve por la figura que $\gamma = OT$ es un primer valor aproximado de O R.

El valor $x = \gamma$ conduce pues á la nueva ordenada T A', trazando por A' la tangente A' T' se obtiene para ecuación de esta línea:

$$y - f(\gamma) = f'(\gamma)(x - \gamma)$$

Suponiendo $y = 0$ y llamando δ á la abscisa O T' se tiene:

$$OT' = \delta = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}$$

valor más aproximado aún á O R, etc.

OBSERVACIONES.

1ª La figura 37 conduce á una función decreciente, pues la ordenada pasa de $f(\alpha)$ positiva á $f(\beta)$ negativa; $f'(x)$ es pues negativa, y A T al hacer un ángulo obtuso con O x encuentra á este eje á la derecha de P.

Como la curva está arriba de la tangente, $f''(x)$ es positiva, y el punto R está á la derecha de T. Así pues, T está comprendido entre P y R, y O T da un valor más aproximado á O R que á O P y además es *por defecto.* Lo mismo sucederá con las tangentes A' T', ...

Si se hubiese llevado la tangente por B cortaría á O x á la izquierda de R y la distancia entre R y dicho punto de intersección podrá ser mayor que la distancia R P, la aproximación sería *ilusoria* y la secuela de cálculos contraproducente.

Se tiene pues:

Fig. 37: $f(\alpha)$ *positiva*, $f(\beta)$ negativa, $f'(x)$ negativa, $f''(x)$ *positiva;* por el punto F(α) debe tirarse la tangente que conduce al valor aproximado por defecto:

$$\gamma = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

el cociente $\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ es negativo por serlo $f'(\alpha)$; llamando, pues, K su valor absoluto resulta:

$$\gamma = \alpha + K$$

Fig. 38: $f(\alpha)$ positiva, $f(\beta)$ *negativa*, $f'(x)$ negativa, $f''(x)$ *negativa*, la tangente se llevará por $f(\beta)$ obteniéndose:

$$\gamma = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}, \quad \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

es positiva, y llamando K su valor absoluto resulta:

$$\gamma = \beta - K$$

valor aproximado por exceso.

Fig. 39: $f(\alpha)$ negativa, $f(\beta)$ *positiva*, $f'(x)$ positiva, $f''(x)$ *positiva*, la tangente se llevaría por el punto $f(\beta)$. Finalmente:

$$\gamma = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \beta - K$$

valor aproximado por exceso.

Fig. 40: $f(\alpha)$ *negativa*, $f(\beta)$ positiva, $f'(x)$ positiva, $f''(x)$ *negativa*, la tangente se trazará por $f(\alpha)$;

$$\beta = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha + \mathrm{K}$$

aproximado por defecto.

En resúmen, *se llevará la tangente por aquel de los dos puntos en el que* $f(x)$ *y* $f''(x)$ *sean del mismo signo.* Esta conclusión no es sino la traducción geométrica de la regla de Fourier.

532. **Método de Lagrange.** Este método indicado por Lagrange en su "*Traité de la résolutión des équations numériques*" es más laborioso que el de Newton, pero conduce directamente á una aproximación cierta. Como cambiando x en $-x$ las raíces positivas de la transformada en $-x$ son las negativas de la ecuación, nos referiremos sólo á la investigación de las raíces positivas.

533. Sean p y $p+1$ dos números enteros consecutivos que comprenden una sola raíz real x de la ecuación propuesta de grado m: $f(x)=0$.

Para aproximarse á la raíz supondremos que $x=p+\frac{1}{y}$, sustituyendo este valor en $f(x)=0$ se tendrá una transformada que llamaremos $\mathrm{Y}=0$ también de grado m. El valor de y que se necesita para obtener la raíz buscada, debe ser positivo y >1. Es claro que y sólo puede admitir un valor de esta naturaleza, pues de lo contrario, habría más de un valor de x comprendido entre p y $p+1$, lo que es contra el supuesto. Si pues se sustituyen en $\mathrm{Y}=0$ los números 1, 2, 3, ..., se tienen que obtener dos de estos resultados de signos contrarios; los números que los originen comprenderán á y y el menor de estos números límites será la parte entera de y. Llamémosla q y hagamos $y=q+\frac{1}{y'}$. Se tendrá una transformada en $z=0$ que tendrá una raíz única >1, cuya parte entera se conocerá sustituyendo los números 1, 2, 3, ...; sea r esta parte entera, y se tendrá:

$$y' = r + \frac{1}{y''}$$

Prosiguiendo análogamente y sustituyendo unos en otros estos valores resulta:

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{y + \text{etc.}}}}$$

Así pues, el valor de la raíz entera expresado en forma de fracción continua y podrá aproximarse hasta donde se quiera; pero para no calcular inútilmente, conforme se deduzcan los números p, q, r, ..., es conveniente formar las reducidas respectivas, y cuando se lleguen á tener dos tales que la unidad dividida entre el producto de sus denominadores origina una fracción menor que el error tolerado, la primera de estas reducidas será el valor de la raíz con la aproximación pedida. Para facilitar el cálculo de las transformadas en y, y', etc., observaremos lo siguiente: si se sustituye: $x=p+\frac{1}{y}$ en $f(x)=0$ y se designan por P, P$'$, P$''$, ..., los resultados de sustituir p en lugar de x en $f(x)$ y sus derivadas $f'(x)$, $f''(x)$, ..., la transformada puede escribirse así:

$$\mathrm{P} + \mathrm{P}'\frac{1}{y} + \frac{\mathrm{P}''}{2}, \frac{1}{y^2} + \frac{\mathrm{P}'''}{2.3}, \frac{1}{y^3} + \ldots\ldots\ldots = 0$$

ó bien:

$$\mathrm{P}y^m + \mathrm{P}'y^{m-1} + \tfrac{1}{2}\mathrm{P}''y^{m-2} + \frac{1}{2.3}\mathrm{P}'''y^{m-3} + \ldots\ldots\ldots = 0$$

forma por la que se ve claramente cómo se deducen fácilmente de $f(x)$ los coeficientes de la transformada.

Análogamente $\mathrm{Z}=0$ será de la forma:

$$\mathrm{Q}y'^m + \mathrm{Q}'y'^{m-1} + \tfrac{1}{2}\mathrm{Q}''y'^{m-2} + \frac{1}{2.3}\mathrm{Q}''y'^{m-3} + \ldots\ldots\ldots = 0$$

cuyos coeficientes se deducen fácilmente, como se ve, sustituyendo q en lugar de y en Y y sus derivadas.

534. Fourier, en las "*Mémoires de l'Institut*" (1827) y Mr. Vincent en las "*Mémoires de la Société des Sciences de Lille*" (1834), y en el "*Journal de Mathématiques pures et apliquées*" (1836), se han ocupado, entre otros, de este método con empeñosa persistencia ampliando por decirlo así sus miras y sus alcances (párrafo 483).

535. Si los dos números enteros p y $p+1$ comprendiesen varias raíces reales de

$$f(x)=0$$

la transformada $\mathrm{Y}=0$ tendrá varias raíces >1.

Supongamos que p y $p+1$ comprenden dos raíces; estas dos raíces estarán expresadas por:

$$x = p + \frac{1}{y}$$

debiendo y admitir dos valores reales >1. Si estos dos valores tienen la misma parte entera q se tendrá:

$$y = q + \frac{1}{y'}$$

debiendo y' tener dos valores reales >1, etc.

Pero si los dos valores de y tienen partes enteras diversas q y q', se tendrá á la vez:

$$y = q + \frac{1}{y'}, \qquad y = q' + \frac{1}{y'}$$

y en cada una de estas igualdades sólo admitirá y' un valor real positivo >1, se tendrá el cálculo, pues, en las condiciones anteriores.

Deben pues, para mayor facilidad separarse las raíces de la propuesta rigurosamente para no tener que aplicar el método sino en el caso general de que entre dos números haya sólo una raíz.

536. Si al efectuar el desarrollo de x en fracción continua se reproducen los mismos cocientes varias veces y en el mismo orden, podrá presumirse que el valor de que se trata tiene por expresión una fracción continua y periódica.

Para averiguarlo, formaremos la ecuación de segundo grado:

$$x^2 + \nu x + \lambda = 0$$

que corresponde á la fracción continua periódica *supuesta*. Esta ecuación debe tener una raíz común con $f(x)=0$ de manera que los primeros miembros tendrán un divisor común de primer grado.

Dividamos pues:

$$f(x) \div x^2 + \nu x + \lambda$$