y si $Mx + N$ es residuo de primer grado de la división, debemos igualarlo á cero sustituyendo á x por la raíz en cuestión que puede representarse por:

$$\alpha + r\sqrt{\beta}$$

por consiguiente debe tenerse:

$$(M\alpha + N) + Mr\sqrt{\beta} = 0$$

que origina las condiciones:

$$M\alpha + N = 0, \quad M = 0$$

Ahora bien, si en la relación:

$$f(x) = (x^2 + \nu x + \lambda)\,\varphi(x) + Mx + N$$

se pone por x el valor:

$$\alpha - r\sqrt{\beta}$$

se tendrá:

$$f(\alpha - r\sqrt{\beta}) = M\alpha + N - Mr\sqrt{\beta} = 0$$

$\alpha - r\sqrt{\beta}$ es, pues, también raíz de la propuesta, y esta será divisible por:

$$\alpha - r\sqrt{\beta}$$

Recíprocamente si $f(x)$ es divisible exactamente por $x^2 + \nu x + \lambda$, como se tiene la relación:

$$f(x) = (x^2 + \nu x + \lambda)\,\varphi(x)$$

y como $f(x)$ y $\varphi(x)$ son polinomios cuyos grados respectivos son m y $m - 2$, se infiere que de los diferentes valores de x que anulan á $f(x)$, dos de esos valores *no* podrán anular á $\varphi(x)$, puesto que la ecuación $\varphi(x) = 0$ no puede tener más de $m - 2$ raíces. Esos dos valores anulan, pues, forzosamente al otro factor $x^2 + \nu x + \lambda$. Así pues, si la fracción continua considerada es periódica, la división de $f(x)$ por $x^2 + \nu x + \lambda$ es exacta; y recíprocamente, si esa división es exacta, la fracción continua es periódica.

Si pues resulta periódica la fracción continua, dicha fracción será una de las raíces irracionales de una ecuación de segundo grado fácil de establecer (Capítulo VI).

Conocida dicha raíz de la forma $\alpha + r\sqrt{\beta}$ se conocerá la conjugada:

$$\alpha - r\sqrt{\beta}$$

Dividiendo $f(x)$ entre el producto de los binomios respectivos, se rebajará su grado dos unidades, y la ecuación cociente sustituirá á la propuesta en las subsecuentes investigaciones.

APLICACIONES.

537. I. Sea la ecuación:

$$f(x) = x^3 - 7x + 7 = 0$$

á la que vamos á aplicar los tres métodos.

Tratada de antemano, como ya se ha dicho, se deduce que tiene dos raíces reales positivas inconmensurables: una entre $\frac{4}{3}$ y $\frac{5}{3}$, otra entre $\frac{5}{3}$ y $\frac{6}{3}$, y una raíz real negativa inconmensurable entre -3 y -4. Vamos á calcular la primera raíz comenzando por el método de Newton.

Método de Newton. Como $\frac{4}{3} = 1.33$ y $\frac{5}{3} = 1.67$, si tomamos el término medio 1.5 y sustituimos estas tres cantidades en la ecuación tenemos que 1.33 da signo $+$, 1.67 da signo $-$, y 1.5 da signo $-$; así pues, la raíz está entre 1.33 y 1.5. El número intermedio 1.4 difiere 0.07 de 1.33 y 0.1 de 1.5; así pues, $x = 1.4$ es valor aproximado á $\frac{1}{10}$.

La fórmula típica es:

$$K = -\frac{f(x)}{f'(x)} = -\frac{x^3 - 7x + 7}{3x^2 - 7}$$

para el valor $x = 1.4$ da:

$$K = -\frac{0.056}{1.12} = -0.05$$

Así pues, el valor de x aproximado á centésimas es:

$$x = 1.4 - 0.05 = 1.35$$

Para juzgar de la aproximación presunta sustituiremos 1.35 y 1.36 obteniendo:

Para 1.35, el resultado:	$+$ 0.010375
„ 1.36, „ „	$-$ 0.004544

como estos resultados son de signos contrarios, deducimos que el valor anterior tiene correcta la aproximación hasta las centésimas.

Para obtener una aproximación mayor, sustituiremos el valor 1.35 en la fracción y su derivada y se tendrá:

$$K' = \frac{0.010375}{1.5325} = 0.0068$$

y el nuevo valor de x será:

$$x = 1.35 + 0.0068 = 1.3568$$

como verificación sustituiremos:

1.3568 que da:	$+$ 0.000141586432
1.3569 „ „	0.000006100991

y deduciremos que el valor de x exacto hasta las diezmilésimas es:

$$x = 1.3568$$

El mismo procedimiento se aplicaría para hallar la otra raíz positiva.

En cuanto á la negativa comprendida entre -3 y -4, hemos explicado que se cambia x en $-x$ en la ecuación, obteniéndose una transformada con una raíz positiva comprendida entre 3 y 4, que encontrada bastará cambiarle el signo para que sea la raíz negativa de la propuesta.

Método de Interpolación. La sustitución de 1.3 produce 0.097, y la de 1.4 da -0.056, luego 1.3 y 1.4 comprenden una raíz.

Habrá que apelar á la fórmula del párrafo 527:

$$K = (\beta - \alpha)\,\frac{f(\alpha)}{f(\alpha) + f(\beta)}$$

Se tiene, haciendo abstracción de los signos:

$$\beta - \alpha = 0.1, \quad f(\alpha) = 0.097, \quad f(\beta) = 0.056$$

así pues, $K = 0.063$; por consiguiente:

$$x = 1.3 + 0.063 = 1.363$$

Pora obtener una segunda aproximación sustituiremos 1.363 en la propuesta y obtendremos — 0.0094.

Así pues, la raíz está comprendida entre 1.3 y 1.363 y tendremos:

$$K_1 = 0.0577$$

Así pues:

$$x = 1.3 + 0.0577 = 1.3577$$

sustituyendo este valor en la propuesta se tiene — 0.001184, de consiguiente, la raíz está comprendida entre 1.3 y 1.3577, y se tendrá:

$$K_2 = 0.0569$$

de donde se concluye que:

$$x = 1.3 + 0.0569 = 1.3569$$

y así sucesivamente.

Comparando este valor con el hallado por el método de Newton, se ve que difieren sólo 0.0001; así pues, el valor de la raíz aproximado á menos de 0,0001 es 1.3568.

El mismo cálculo se aplicaría á las otras dos raíces.

Método de Lagrange. Para hacer que las raíces difieran entre sí más de una unidad, hallaremos la ecuación de los cuadrados de las diferencias entre las raíces de la ecuación propuesta:

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

Esta ecuación es (Capítulo VII. Párrafo 457-2º):

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0$$

designando por z la variable de la transformada.

Haciendo $z = \frac{1}{u}$ se obtiene:

$$\frac{1}{u^3} - \frac{42}{u^2} + \frac{441}{u} - 49 = 0$$

ó bien:

$$u^3 - 9u^2 + \frac{42}{49}u - \frac{1}{49} = 0$$

que puede escribirse así:

$$u^2(u-9) + \frac{42}{49}\left(u - \frac{1}{42}\right) = 0$$

se reconoce que 9 es un *límite superior* de las raíces positivas, y se tendrá una cantidad menor que la más pequeña diferencia entre las raíces de la propuesta tomando:

$$\sqrt{\tfrac{1}{9}} = \tfrac{1}{3}$$

este será, pues, el intervalo de las sustituciones.

Hagamos $x = \frac{x'}{3}$ para evitar las fracciones, porque entonces las diferencias de los valores de x' serán triples de los valores de x, y si éstos son $> \frac{1}{3}$, aquellos serán mayores que 1.

Si pues en la ecuación debiamos sustituir:

$$0, \ \pm\tfrac{1}{3}, \ \pm\tfrac{2}{3}, \ \pm\tfrac{3}{3}, \ \ldots\ldots\ldots$$

en la transformada sustituiremos:

$$0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \ldots\ldots\ldots$$

en general números enteros.

Sustituyendo $x = \frac{x'}{3}$ en la ecuación propuesta $x^3 - 7x + 7 = 0$ se tiene la transformada:

$$x'^3 - 63x' + 189 = 0$$

La propuesta tiene claramente una raíz negativa y una sola comprendida entre — 3 y — 4. Las positivas se separarán por medio de sustituciones sucesivas practicadas en la ecuación:

$$x'^3 - 63x' + 189 = 0$$

Como las raíces de la precedente ecuación están comprendidas entre 3 y 8 bastará sustituir los números 3, 4, ..., 8. Mas como los números 3, 4, 5 y 6 dan los resultados + 27, + 1, — 1, + 27, ya no hay necesidad de llevar más adelante las sustituciones, puesto que los signos de los resultados obtenidos indican dos raíces positivas, comprendidas entre 4 y 5, 5 y 6 respectivamente.

Aplicando pues, el método de Lagrange de aproximación, tendremos la serie de cálculos indicada á continuación, referentes á la raíz comprendida entre 4 y 5.

Ecuación: $x'^3 - 63x' + 189 = 0$. Haciendo: $x' = 4 + \frac{1}{K}$ se obtiene:

Primera transformada.

$$\left\{\begin{array}{l}
AK^3 + A'K^2 + \dfrac{A''K}{2} + \dfrac{A'''}{2.3} = 0 \\
A = 4^3 - 63.4 + 189 = +1 \\
A' = 3.4^2 - 63 = -15 \\
\frac{1}{2}A'' = 3.4 = +12 \\
\dfrac{1}{2.3}A''' = +1 \\
K^3 - 15K^2 + 12K + 1 = 0 \\
K = 14 \text{ da } -27 \\
K = 15 \ ,, \ +181 \\
K = 14 + \dfrac{1}{K'}
\end{array}\right.$$

Segunda transformada.

$$\left\{\begin{array}{l}
BK'^3 + B'K'^2 + \frac{1}{2}B''K' + \dfrac{1}{2.3}B''' = 0 \\
B = 14^3 - 15.14^2 + 12.14 + 1 = -26 \\
B' = 3.14^2 - 30.14 + 12 = +180 \\
\frac{1}{2}B'' = 3.14^2 - 15 = +27 \\
\dfrac{1}{2.3}B''' = +1 \\
27K'^3 - 180K'^2 - 27K' - 1 = 0 \\
K' = 6 \text{ da } -811 \\
K' = 7 \ ,, \ +251 \\
K' = 6 + \dfrac{1}{K''}
\end{array}\right.$$

Tercera transformada.

$$\left\{\begin{array}{l}
CK''^3 + C'K''^2 + \frac{1}{2}C''K'' + \dfrac{1}{2.3}C''' = 0 \\
C = 27.6^3 - 180.6^2 - 27.6 - 1 = -811 \\
C' = 81.6^2 - 360.6 - 27 = +729 \\
\frac{1}{2}C'' = 81.6 - 180 = +306 \\
\dfrac{1}{2.3}C''' = +27 \\
811K''^3 - 729K''^2 - 306K'' - 27 = 0 \\
K'' = 1 \text{ da } -251 \\
K'' = 2 \ ,, \ -2933 \\
K'' = 1 + \dfrac{1}{K'''}
\end{array}\right.$$

Así pues, la forma de x es:

$$x=4+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\text{etc.}, \ldots\ldots}}}$$

las reducidas son:

$$\frac{4}{1},\quad \frac{57}{14},\quad \frac{346}{85},\quad \frac{403}{99},\ \text{etc.}$$

El error de la 1ª es en menos y además $< \dfrac{1}{1.14} = \dfrac{1}{14}$

„ „ „ „ 2ª „ „ más „ $< \dfrac{1}{14.85} = \dfrac{1}{1190}$

„ „ „ „ 3ª „ „ menos „ $< \dfrac{1}{85.99} = \dfrac{1}{8415}$

„ „ „ „ 4ª „ „ más „ $< \dfrac{1}{99(99+85)} = \dfrac{1}{18216}$

dividiendo entre tres cada una de ellas los valores de x serán:

$$\frac{4}{3},\quad \frac{19}{14},\quad \frac{346}{255},\quad \frac{403}{297}$$

No es conveniente, dado el carácter aproximado de las raíces inconmensurables, quitarlas de la ecuación por medio de la división como si fueran conmensurables.

Si se despreciase el residuo y se igualase á 0 el cociente obtenido con el objeto de determinar las otras raíces, los errores que se produjeran serían pequeños, pero pudiera suceder que las raíces sufrieren graves alteraciones y aun cesaran de ser reales para ser imaginarias ó viceversa. Así, esta simplificación debe usarse con gran reserva.

(Léfebure de Fourcy.)

II. Sea la ecuación:

$$f(x)=x^3-2x-5=0$$

á la que vamos á aplicar los métodos de Newton combinado con el de interpolación por partes proporcionales.

Los límites entre los que está comprendida la única raíz real positiva que admite son 2 y 3. Sustituyendo:

$$2,\ 2.1,\ 2.2,\ \ldots\ldots,\ 2.8,\ 2.9,\ 3$$

resulta:

$$\text{Para } x=\ 2,\quad f(x)=-1$$
$$\text{„}\quad x=2.1,\quad f(x)=-0.061$$

es inútil, pues, sustituir más valores, la raíz está comprendida entre 2 y 2.1.

Se tiene en este caso:

$$f(x)=x^3-2x-8,\quad f'(x)=3x^2-2,\quad f''(x)=6x,\quad \alpha=2,\quad \beta=2.1,\quad \beta-\alpha=0.1$$

Como $f(x)$ y $f''(x)$ son de signos contrarios para $x=\alpha=2$ y de signos iguales para $x=\beta=2.1$, se obtendrá un nuevo valor de la raíz aproximado por exceso como lo es β tomando el valor:

$$\beta-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}=2.1-\frac{f(2.1)}{f'(2.1)}=2.1-\frac{0.061}{11.23}=2.1-0{,}005431\ldots\ldots=2.094569\ldots\ldots$$

Para apreciar el mérito de esta primera aproximación, el método de las partes proporcionales da en este caso el valor aproximado por defecto:

$$\beta-(\beta-\alpha)\frac{f(\beta)}{f(\alpha)+f(\beta)}=2.1-0.1\,\frac{0.061}{1+0.061}=2.1-0.005754\ldots\ldots=2.094246\ldots\ldots$$

El promedio aritmético entre ambos resultados es: 2.094407
La semidiferencia „ „ „ „ 0.000161

Así pues, el nuevo valor aproximado de la raíz á menos de $\frac{1}{1000}$ por exceso ó por defecto es 2.094.

El valor 2.094 da $f(x)=-0.006153416$, y como el valor 2.1 da $f(x)=+0.061$, resulta que el valor 2.094 es aproximado por defecto á $\frac{1}{1000}$ y la raíz está comprendida entre 2.094 y 2.095.

Para pasar á la segunda corrección partiremos del valor en exceso 2.095, pues para él $f(x)$ y $f''(x)$ son del mismo signo.

Así pues, tendremos:

$$2.095-\frac{f(2.095)}{f'(2.095)}=2.095-\frac{0.005007375}{11.167075}=2.095-0.00044840\ldots\ldots=2.09455160\ldots\ldots$$

El método de las partes proporcionales da:

$$2.095-0.001\,\frac{f(2.095)}{f(2.094)+f(2.095)}=2.095-0.00044865\ldots\ldots\ldots=2.09455135\ldots\ldots\ldots$$

El promedio aritmético es: 2.09455147 ....
La semidiferencia es: 0.00000012 ....

Así pues, el nuevo valor aproximado de la raíz á menos de 0.000001 por exceso ó por defecto es: 2.094551.

Sustituído este valor en $f(x)$ da:

$$-0.000005374703233849$$

Así pues, es aproximado por defecto, puesto que 2.095 dió signo +.

Prosiguiendo las operaciones hasta obtener doce cifras decimales se tiene:

$$2.094551481542$$

Newton en la obra citada encuentra: 2.09455147.

III. Sea la ecuación que acaba de estudiarse:

$$f(x)=x^3-2x-5$$

Tratarla por el método de Lagrange.

IV. Sea la ecuación:

$$f(x)=x^3-5x-3$$

Debe hallarse aproximando á menos de $\frac{1}{1000000}$: 2.49086 para la raíz positiva, y -1.83425, -0.65662 para las dos negativas.

V. Tratar la ecuación:

$$f(x)=x^4+4x^3+3x+27=0$$

VI. Tratar la ecuación:

$$f(x)=x^4-7x^3+12x^2-x-7=0$$

CAPÍTULO XV.

RAÍCES IMAGINARIAS.

538. Cuando en una ecuación numérica $f(x)=0$ de coeficientes reales, privada de sus raíces iguales, se ha determinado el número de raíces reales conmensurables é inconmensurables, y dicho número es menor que el grado de la ecuación, concluiremos que las raíces que faltan para completar el grado de la ecuación son imaginarias, las cuales deben ser conjugadas dos á dos (párrafo 365, etc.), y de consiguiente en número par.

Recordando pues, lo relativo á las cantidades imaginarias explicado en el Capítulo VIII de la Primera Parte y en lo que va de la Segunda, pasamos á indicar el método para hallar esta clase de raíces.

539. Llamando $x=a+b\sqrt{-1}$ una raíz imaginaria de la ecuación:

$$f(x)=x^m+Px^{m-1}+\ldots\ldots+U=0$$

si la sustituimos en dicha ecuación y llamamos M al conjunto de términos independientes y N al factor de $\sqrt{-1}$ el resultado de la sustitución será de la forma:

$$M+N\sqrt{-1}=0$$

que para que sea nulo debe tenerse:

$$M=0, \qquad N=0 \tag{757}$$

si pues determinamos los valores reales conmensurables é inconmensurables de a y b capaces de satisfacer simultáneamente á las ecuaciones (755) y después sustituimos los valores hallados en la expresión $a+b\sqrt{-1}$ tendremos todas las raíces imaginarias de $f(x)=0$.

Estos cálculos serán muy prolijos, pues para efectuarlos, debemos eliminar una de las incógnitas a y b entre:

$$M=0, \qquad N=0$$