IV. Sea la ecuación:

$$f(x)=x^3-5x-3$$

Debe hallarse aproximando á menos de $\frac{1}{1000000}$: 2.49086 para la raíz positiva, y —1.83425, — 0.65662 para las dos negativas.

V. Tratar la ecuación:

$$f(x)=x^4+4x^3+3x+27=0$$

VI. Tratar la ecuación:

$$f(x)=x^4-7x^3+12x^2-x-7=0$$

CAPÍTULO XV.

RAÍCES IMAGINARIAS.

538. Cuando en una ecuación numérica $f(x)=0$ de coeficientes reales, privada de sus raíces iguales, se ha determinado el número de raíces reales conmensurables é inconmensurables, y dicho número es menor que el grado de la ecuación, concluiremos que las raíces que faltan para completar el grado de la ecuación son imaginarias, las cuales deben ser conjugadas dos á dos (párrafo 365, etc.), y de consiguiente en número par.

Recordando pues, lo relativo á las cantidades imaginarias explicado en el Capítulo VIII de la Primera Parte y en lo que va de la Segunda, pasamos á indicar el método para hallar esta clase de raíces.

539. Llamando $x=a+b\sqrt{-1}$ una raíz imaginaria de la ecuación:

$$f(x)=x^m+Px^{m-1}+\ldots\ldots\ldots+U=0$$

si la sustituimos en dicha ecuación y llamamos M al conjunto de términos independientes y N al factor de $\sqrt{-1}$ el resultado de la sustitución será de la forma:

$$M+N\sqrt{-1}=0$$

que para que sea nulo debe tenerse:

$$M=0, \qquad N=0 \qquad (757)$$

si pues determinamos los valores reales conmensurables é inconmensurables de a y b capaces de satisfacer simultáneamente á las ecuaciones (755) y después sustituimos los valores hallados en la expresión $a+b\sqrt{-1}$ tendremos todas las raíces imaginarias de $f(x)=0$.

Estos cálculos serán muy prolijos, pues para efectuarlos, debemos eliminar una de las incógnitas a y b entre:

$$M=0, \qquad N=0$$

540. Sea por ejemplo la ecuación:

$$f(x)=x^4-3x^2-12x+40$$

sustituyendo $x=a+b\sqrt{-1}$ se obtiene:

$$M=a^4-6a^2b^2+b^4-3a^2+3b^2-12a+40=0,\quad N=2a^3-2ab^2-3a-6=0$$

eliminando á b entre estas dos ecuaciones, resulta:

$$16a^6-24a^4-151a^2-36=0$$

haciendo $a^2=\alpha$:

$$16\alpha^3-24\alpha^2-151\alpha-36=0$$

cuyas raíces son:

$$4,\quad -\tfrac{1}{4},\quad -\tfrac{9}{4}$$

luego a tendrá los valores:

$$\text{Para } \alpha=4,\ -\tfrac{1}{4},\ -\tfrac{9}{4},\ a=\pm 2,\ \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-1},\ \pm\tfrac{3}{2}\sqrt{-1}$$

dos valores reales ± 2 y cuatro imaginarios:

$$\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-1},\quad \pm\tfrac{3}{2}\sqrt{-1}$$

Poniendo $a=2$ en la ecuación $N=0$, resulta:

$$b^2=1 \text{ lo que da para } b:\ b=\pm 1$$

El valor $a=-2$ sustituído en la misma expresión produce $b^2=4$ de donde:

$$b=\pm 2$$

Las cuatro raíces de la propuesta se obtienen combinando los valores reales precedentemente obtenidos:

$$a=\begin{cases} b=+1 \\ b=-4 \end{cases},\quad a=-2\begin{cases} b=+2 \\ b=-2 \end{cases}$$

Luego las raíces serán:

$$\left.\begin{matrix} x=2+\sqrt{-1} \\ x=2-\sqrt{-1} \end{matrix}\right\} 2\pm\sqrt{-1},\quad \left.\begin{matrix} x=-2+2\sqrt{-1} \\ x=-2-2\sqrt{-1} \end{matrix}\right\} -2\pm 2\sqrt{-1}$$

que son las cuatro de la ecuación propuesta.

541. Pero si para la separación de las raíces reales de la ecuación $f(x)=0$, hacemos uso de la ecuación de los cuadrados de las diferencias podremos utilizar ésta para conocer las raíces imaginarias de aquélla más pronto que por el método anterior.

Sean, en efecto: a, b, ..., las raíces reales de $f(x)=0$, y:

$$\alpha\pm\beta\sqrt{-1},\quad \alpha'\pm\beta'\sqrt{-1},\ \ldots\ldots\ldots$$

los diferentes pares de imaginarias.

Las raíces de la ecuación de los cuadrados de las diferencias de las raíces de la propuesta son de cuatro formas.

$(a-b)^2$ cuadrado de la diferencia de dos raíces reales.

$(a-\alpha\mp\beta\sqrt{-1})^2$ cuadrado de la diferencia entre una raíz real y una imaginaria.

$[(\alpha-\alpha')\pm(\beta-\beta')\sqrt{-1}]^2$ cuadrado de la diferencia entre dos raíces imaginarias no conjugadas.

$(2\beta\sqrt{-1})^2$ cuadrado de la diferencia de dos raíces imaginarias conjugadas.

Las raíces de la primera especie siempre son positivas, y las de la cuarta siempre negativas; los de la 2ª y 3ª especie comunmente son imaginarias.

Sin embargo, si se tuviese $a=\alpha$ ó $a=\alpha'$ serían reales y negativas, pero cada una entraría dos veces en la ecuación de los cuadrados de las diferencias.

Luego fuera de estos dos casos la ecuación de los cuadrados de las diferencias tendrá tantas raíces reales negativas como hay pares de raíces imaginarias en la ecuación propuesta.

Llamando: $-r_1$, $-r_2$, ..., las raíces negativas de la ecuación de los cuadrados de las diferencias determinadas por los métodos de las raíces conmensurables ó inconmensurables que ya conocemos, tendremos fuera de los dos casos mencionados los valores.

$$\left.\begin{matrix} -r_1=[(\alpha+\beta\sqrt{-1})-(\alpha-\beta\sqrt{-1})]^2=(2\beta\sqrt{-1})^2=-4\beta^2 \\ -r_2=[(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})-(\alpha'-\beta'\sqrt{-1})]^2=-4\beta'^2 \end{matrix}\right\} \qquad (758)$$

....

....

y de consiguiente:

$$\beta=\tfrac{1}{2}\sqrt{r_1},\quad \beta'=\tfrac{1}{2}\sqrt{r_2} \qquad (207)$$

Sustituyendo estos valores uno tras otro en las ecuaciones:

$$M=0,\quad N=0$$

donde están combinadas juntas las dos incógnitas α y β, debiendo las mismas ecuaciones verificarse para los mismos valores de α que corresponden á cada uno de los valores sustituidos para β, adquirirán en cada sustitución un factor ó un divisor común en α, y los factores comunes ó divisores á las dos ecuaciones en las varias sustituciones igualados á cero, darán diversos valores: α', α'', ..., correspondientes á los:

$$\beta',\ \beta'',\ \ldots\ldots\ldots$$

y así se conocerán las raíces imaginarias:

$$\alpha'\pm\beta'\sqrt{-1},\quad \alpha''\pm\beta''\sqrt{-1},\ \ldots\ldots\ldots$$

de la propuesta.

Este es propiamente el método de LAGRANGE.

542. Observemos, 1º Que cuando los valores β', β'', ..., son desiguales, á cada uno de estos valores de β corresponde uno sólo de α; las dos ecuaciones:

$$M=0,\quad N=0$$

en α, tendrán una sola raíz común y de consiguiente el factor ó divisor común á las dos ecuaciones será de primer grado en α, y se hallará buscando el *máximo común divisor* de los polinomios M y N.

Si entre los valores β', β'', ..., tenemos dos, tres, etc., iguales, es decir, si el valor de β' por ejemplo, es repetido dos, tres, etc., veces, entonces, pues, en la ecuación que estamos considerando á cada uno de los valores iguales de β corresponde uno diferente de α; las dos ecuaciones $M=0$, $N=0$, después de sustituir el valor de β varias veces repetido deberán tener más raíces comunes α y de consiguiente el factor común á ambas ecuaciones será de segundo, tercero ó mayor grado en α y se hallará siempre determinando el máximo común divisor de M y N como sabemos.

2º En los dos casos excepcionales que hemos mencionado, los cuadrados de las diferencias entre dos raíces, no conjugadas de la propuesta pueden ser también negativos, y por consiguiente del número de las raíces negativas de la ecuación de los cuadrados de las diferencias, no puede inferirse el número de los pares de raíces imaginarias que tiene la ecuación dada, pero es fácil conocer si una raíz negativa, por ejemplo $-r_3$ de la ecuación de los cuadrados de las diferencias, es ó no cuadrado de la diferencia entre dos raíces imaginarias conjugadas de la primitiva ecuación; porque sustituido el valor $\frac{1}{2}\sqrt{r_3}$ en lugar de β en M y N, estos polinomios no contendrán ningún factor ó divisor común en α, si el valor $-r_3$ no expresa el cuadrado de la diferencia entre dos raíces imaginarias conjugadas de la ecuación propuesta:

$$f(x)=0$$

534. Ejemplo. Sea:

$$x^3+x-10=0$$

Comparando esta ecuación con: $x^3+Bx+C=0$ tenemos $B=1$, $C=-10$, y la ecuación de los cuadrados de las diferencias siendo para:

$$x^3+Bx+C=0$$

la siguiente (párrafo 398 y 457):

$$x^3+6Bx^2+9B^2x+(4B^3+27C^2)=0$$

se cambia en nuestro caso en:

$$x^3+6x^2+9x+2704=0$$

Como es positivo el último término de esta ecuación transformada de grado impar, tiene por lo menos una raíz real negativa, á la que deben corresponder dos raíces imaginarias de la propuesta. La otra raíz de la propuesta será real positiva por ser negativo el último término.

La raíz real negativa de la transformada es -16, divisor del último término; en cuanto á las dos imaginarias conjugadas $\alpha'\pm\beta'\sqrt{-1}$ para determinarlas se sustituirá la expresión $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ en lugar de x en la ecuación:

$$x^3+x-10=0$$

lo que produce:

$$M=\alpha^3-\alpha(3\beta^2-1)-10=0$$

$$N=3\alpha^2-\beta^2+1=0$$

á las que deben satisfacer los valores de α y β.

Ahora bien, como se tiene $-r=-16$, el valor de β será:

$$\beta=\tfrac{1}{2}\sqrt{r}=\tfrac{1}{2}\sqrt{16}=\pm 2$$

por tanto, sustituído este valor en las dos ecuaciones $M=0$, $N=0$ se cambian en:

$$\alpha^3-11\alpha-10=0 \qquad 3\alpha^2-3=0 \text{ ó bien } \alpha^2-1=0$$

y si se verifican para un mismo valor de α, deberán tener en α un factor ó divisor común.

El divisor común á las dos últimas ecuaciones es el máximo divisor de primer grado $\alpha+1$ de sus primeros miembros, divisor que, igualado á cero, da $\alpha=-1$ y nos conduce á concluir que las dos raíces imaginarias y conjugadas $\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$ de la ecuación propuesta son:

$$-1\pm 2\sqrt{-1}, \quad \begin{cases} -1+2\sqrt{-1} \\ -1-2\sqrt{-1} \end{cases}$$

544. **Límites de los módulos.** Sea la ecuación:

$$\varphi(z)=A_0z^m+A_1z^{m-1}+A_2z^{m-2}+\ldots+A_\mu z^{m-\mu}+\ldots+A_{m-1}z+A_m=P+Qi=0 \qquad (759)$$

y vamos á hallar los límites de los módulos de todas sus raíces reales é imaginarias.

Sea en general:

$$z=r(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha.i), \quad A_\mu=Z_\mu(\cos\omega_\mu+\operatorname{sen}\omega_\mu.i)$$

pudiendo μ variar de 0 á m.

El primer miembro de (759) tendrá la forma:

$$Z_0r^m[\cos(m\alpha+\omega_0)+\operatorname{sen}(m\alpha+\omega_0).i]+Z_1r^{m-1}\{\cos[(m-1)\alpha+\omega_1]+\operatorname{sen}[(m-1)\alpha+\omega_1].i\}$$
$$+\ldots\ldots+Z_mr^{m-n}\{\cos[(m-n)\alpha+\omega_n)+\operatorname{sen}[(m-n)\alpha+\omega_n].i\}+\ldots\ldots+Z_m(\cos\omega_m+\operatorname{sen}\omega_m.i)$$

De consiguiente:

$$P=Z_0r^m\cos(m\alpha+\omega_0)+\ldots\ldots+Z_nr^{m-n}\cos[(m-n)\alpha+\omega_n]+\ldots\ldots+Z_m\cos\omega_m$$

$$Q=Z_0r^m\operatorname{sen}(m\alpha+\omega_0)+\ldots\ldots+Z_nr^{m-n}\operatorname{sen}[(m-n)\alpha+\omega_n]+\ldots\ldots+Z_m\operatorname{sen}\omega_m$$

El módulo de $\varphi(z)$ tiene por valor:

$$\sqrt{P^2+Q^2}$$

y se puede escribir llamándolo R:

$$R^2=[P\cos(m\alpha+\omega_0)+Q\operatorname{sen}(m\alpha+\omega_0)]^2$$
$$+[P\cos(m\alpha+\omega_0)-Q\operatorname{sen}(m\alpha+\omega_0)]^2$$

Así pues:

$$R^2>[P\cos(m\alpha+\omega_0)+Q\operatorname{sen}(m\alpha+\omega_0)]^2 \qquad (760)$$

Cada una de las raíces de $\varphi(z)$ la reducen á cero, es decir, cada una da á la vez:

$$P=0, \quad Q=0$$

y de consiguiente, $R=0$. Es preciso, pues, hallar entre qué límites debe quedar comprendido el valor del módulo r de z para que no se tenga á la vez $P=0$ y $Q=0$, es decir, para que R quede constantemente superior á cero.

Ahora bien, recordando que en general:

$$\cos a = \cos(-a)$$

se tiene:

$$P\cos(ma+\omega_0)+Q\,\text{sen}\,(ma+\omega_0)=Z_0r^m+\ldots\ldots+Z_nr^{m-n}\cos(na+\omega_0-\omega_n)+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+Z_m\cos(ma+\omega_0-\omega_m)$$

Sea Z el mayor de los módulos:

$$Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\ \ldots\ldots,\ Z_n,\ \ldots\ldots,\ Z_m$$

y añadamos al segundo miembro de la expresión anterior la cantidad idénticamente nula:

$$Z(r^{m-1}+r^{m-2}+\ldots..+r+1)-Z\,\frac{r^m-1}{r-1}$$

Tendremos:

$$P\cos(ma+\omega_0)+Q\,\text{sen}\,(ma+\omega_0)=Z_0r^m+\ldots\ldots+Z_nr^{m-n}\cos(na+\omega_0-\omega_n)+\ldots..$$

$$\ldots\ldots+Z_m\cos(ma+\omega_0-\omega_m)+Z(r^{m-1}+r^{m-2}+\ldots\ldots+r+1)-Z\,\frac{r^m-1}{r-1}$$

Juntando en un término el primero y el último se tiene:

$$P\cos(ma+\omega_0)+Q\,\text{sen}\,(ma+\omega_0)=\frac{Z_0r^m\left(r-1-\frac{Z}{Z_0}\right)+Z}{r-1}+$$

$$+\left\{\begin{array}{l}[Z+Z_1\cos(a+\omega_0-\omega_1)]\,r^{m-1}\\ +[Z+Z_2\cos(2a+\omega_0-\omega_2)]\,r^{m-2}\\ +\ldots..+[Z+Z_m\cos(ma+\omega_0-\omega_m)]\end{array}\right\} \qquad (760)$$

El paréntesis queda positivo para el valor de Z que satisfaga la condición buscada; así pues, sólo basta que el primer término sea positivo para que al ser positivos los dos términos del segundo miembro, lo sea el primer miembro.

Para que el primer término del segundo miembro sea positivo debe tenerse:

$$r>1+\frac{Z}{Z_0}$$

Así pues:

$$1+\frac{Z}{Z_0}$$

ó bien:

$$\frac{Z_0-Z}{Z_0}$$

es un *límite superior* de los módulos de las raíces de la propuesta, porque para todo valor de z cuyo módulo sea igual ó superior á este, el primer miembro de (760') es posi-

tivo y el módulo R de $\varphi(z)$ es forzosamente mayor que cero, según la desigualdad (760).

Buscando la transformada en $\frac{1}{z}$ de $\varphi(z)=0$ y determinando el límite superior de los módulos de sus raíces:

$$\frac{Z_m+Z'}{Z_m}$$

el inverso de este límite:

$$\frac{Z_m}{Z_m+Z'}$$

será un límite inferior de los módulos de las raíces de la propuesta.

545. Mr. Lalanne, Inspector General de Puentes y Calzadas, ha propuesto un ingenioso procedimiento gráfico para resolver las ecuaciones numéricas de cualquier grado en una Memoria insertada en los "*Annales des Ponts et Chaussées*" (1846) y en comunicaciones hechas á la Academia de Ciencias (1875, 1876, (1878).

Mr. Léfebure de Fourcy, en sus "*Leçons d'Algèbre,*" entra en algunas explicaciones sobre el procedimiento.

Para algunos otros detalles respecto á cuestiones sobre cantidades y raíces imaginarias, á las obras ya recomendadas en el curso de la obra, añadiremos: las consideraciones de Sturm y Lionville en el "*Journal de Mathématiques pures et appliquées*" y los trabajos de Lagrange sobre la resolución de las ecuaciones numéricas.