CAPÍTULO XVI.

RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE LAS ECUACIONES.

ECUACIONES DE TERCERO Y CUARTO GRADO.

Resolución de la ecuación de tercer grado.—Fórmula de CARDAN.—Discusión de la fórmula.—Caso *irreductible.*—Procedimientos trigonométricos para resolver las ecuaciones de segundo y tercer grado.—Aplicaciones.—Resolución de la ecuación de cuarto grado.—Método de DESCARTES.—Método de LAGRANGE.—Fórmula de EULER.—Discusión de BRET.—Aplicaciones.—Método de FERRARI.—Escolio general.—Imposibilidad de resolver algebraicamente las ecuaciones generales superiores al cuarto grado.

546. En el Prólogo de esta obra y en el párrafo 462 hemos apuntado algunas observaciones respecto á la diferencia entre la resolución *numérica* y la resolución *algebraica* de las ecuaciones y hemos dicho que si la primera es aplicable á cualquier grado, la segunda sólo es conocida para sólo los cuatro primeros grados é imposible para los superiores al cuarto grado. El método general para la resolución algebraica de las ecuaciones ha consistido en traer la resolución de la propuesta á la de otra de menor grado llamada *reducida* ó *resolvente* de la propuesta con ayuda de transformaciones, artificios ó sustituciones adecuadas. Conocidas las raíces de la *reducida*, la función que las liga con las de la propuesta, da á conocer las raíces de esta última.

Ahora bien, tal procedimiento sólo ha surtido para los cuatro primeros grados; LAGRANGE, en su "*Traité de la résolution des équations numériques*," y en las "*Mémoires de l'Académie de Berlin*" (1770-1771) ha dado un método uniforme para dicha resolución algebraica, VANDERMONDE en las "*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*" (1771) llegó á igual resultado.

En el presente Capítulo nos ocuparemos de la resolución algebraica de las ecuaciones de tercero y cuarto grado por dos procedimientos diversos: por procedimientos algebraicos y por métodos trigonométricos. Cerraremos el Capítulo indicando algunas consideraciones sobre la ya mencionada imposibilidad de resolver las ecuaciones algebraicas superiores al cuarto grado.

RESOLUCION GENERAL DE LA ECUACION DE TERCER GRADO.

547. **Fórmula de Cardan.** Como siempre se puede hacer desaparecer el segundo término de una ecuación, consideraremos la ecuación propuesta de tercer grado bajo la forma:

$$x^3 + Px + Q = 0 \tag{761}$$

Supongamos la relación:

$$x = u + v \tag{762}$$

Elevando al cubo y simplificando se obtiene:

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0 \tag{763}$$

Las ecuaciones (761) y (763) serán idénticas si se verifican las condiciones:

$$uv = -\frac{P}{3}, \quad u^3 + v^3 = -Q \tag{764}$$

La resolución de la ecuación (761) depende, pues, de la resolución de las (764); hallados en estas ecuaciones los valores u y v se conocerán los de x por la (762).

De la primera de las ecuaciones (764) se deduce:

$$v = -\frac{P}{3u}$$

sustituído este valor de v en la segunda se obtiene:

$$u^3 - \frac{P^3}{27u^3} = -Q \quad \text{ó bien:} \quad u^6 + Qu^3 - \frac{P^3}{27} = 0 \tag{765}$$

Haciendo $u^3 = y$ y sustituyendo en la (765) resulta:

$$u^3 - y = 0, \quad y^2 + Qy - \frac{P^3}{27} = 0 \tag{766}$$

Si en la primera de estas fórmulas designamos por $\sqrt[3]{y}$ el valor aritmético de la raíz cúbica de y, y por α y α^2 las dos raíces cúbicas imaginarias de la unidad (Capítulo III. Primera Parte) obtendremos los tres valores:

$$u = \sqrt[3]{y}, \quad u = \alpha\sqrt[3]{y}, \quad u = \alpha^2\sqrt[3]{y} \tag{767}$$

La segunda fórmula (766) da:

$$y = -\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}$$

Sustituyendo este valor de y en las (767) resulta:

$$u = \sqrt[3]{\frac{-Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}, \quad u = \alpha\sqrt[3]{\frac{-Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}, \quad u = \alpha^2\sqrt[3]{\frac{-Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} \tag{768}$$

Conocidos los tres valores de u, fácilmente se conocen los de v por la relación:

$$v = -\frac{P}{3u}$$

y tendremos:

$$v = -\frac{P}{3\sqrt[3]{\frac{-Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}}, \quad v = -\frac{P}{3\alpha\sqrt[3]{\frac{-Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}}, \quad v = -\frac{P}{3\alpha^2\sqrt[3]{\frac{-Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}} \quad (769)$$

Como sabemos que:

$$\sqrt[3]{\frac{-Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} \times \sqrt[3]{\frac{-Q}{2} \mp \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{-P^3}{27}} = -\frac{P}{3}$$

deducimos comparando el primero con el último miembro que:

$$-\frac{P}{3\sqrt[3]{\frac{-Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{2} + \frac{P^3}{2}}}} = \sqrt[3]{\frac{-Q}{2} \mp \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} = v \text{ [1]}$$

Recordando que el producto de las dos primeras raíces cúbicas de la unidad da la tercera raíz $\alpha^3 = 1$ obtendremos las expresiones:

$$v = \sqrt[3]{\frac{-Q}{2} \mp \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}, \quad v = \alpha^2\sqrt[3]{\frac{-Q}{2} \mp \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}, \quad v = \alpha\sqrt[3]{\frac{-Q}{2} \mp \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} \quad (770)$$

para los valores de v. Mas como en general $x = u + v$ y tanto u como v tienen *tres* va-

1 Podemos obtener este resultado más fácilmente; el valor de v que es:

$$v = \frac{P}{3\sqrt[3]{\frac{-Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}}$$

puede transformarse en otro de la misma forma que el de u.

Para esto, elevando al cubo el valor de v se encuentra:

$$v^3 = -\frac{P^3}{27\left(\frac{-Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}\right)}$$

multiplicando los dos términos del quebrado por:

$$-\frac{Q}{2} \mp \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}$$

resulta:

$$v^3 = \frac{-P^3\left(\frac{-Q}{2} \mp \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}\right)}{27\left(\frac{Q^2}{4} - \frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}\right)}$$

ó bien:

$$v = \sqrt[3]{\frac{-Q}{2} \mp \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}$$

Y este valor es de la misma forma que el de u.

Manuel Ramírez.

lores, reuniendo estas determinaciones dos á dos de todas las maneras posibles resultan 9 valores para x, siendo así que sólo debe admitir tres; en virtud de la ecuación condicional: $uv = -\frac{P}{3}$ sólo deberán tomarse los que den por producto $-\frac{P}{3}$.

Si designamos por:

$$A, \ A\alpha, \ A\alpha^2, \ B, \ B\alpha, \ B\alpha^2$$

los tres valores de u y los tres de v; como $AB = -\frac{P}{3}$ por hipótesis y:

$$AB\alpha^3 = AB = -\frac{P}{3}$$

por deducción, solamente se tomarán los valores que den por producto AB ó $AB\alpha^3$. Se tendrán, pues, que despreciar las soluciones $A + B\alpha$, $A\alpha + B$, $A\alpha^2 + B\alpha^2$ cuyos productos son:

$$AB\alpha, \quad AB\alpha \text{ y } AB\alpha^4 = AB\alpha^3.\alpha = AB\alpha$$

Se despreciarán también las soluciones:

$$A + B\alpha^2, \quad A\alpha^2 + B, \quad A\alpha + B\alpha$$

cuyos productos son: $AB\alpha^2$, $AB\alpha^2$ y $AB\alpha^2$, quedando únicamente:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{\frac{-Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} \\ x_2 &= \alpha\sqrt[3]{\frac{-Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} + \alpha^2\sqrt[3]{\frac{-Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} \\ x_3 &= \alpha^2\sqrt[3]{\frac{-Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} + \alpha\sqrt[3]{\frac{-Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} \end{aligned}\right\} \quad (771)$$

después de sustituir por A y B sus valores.

La primera de las ecuaciones (771) á la que se reducen las otras dos quitando los índices á x y dejando á las raíces cúbicas toda su generalidad, se atribuye á TARTAGLIA, pero comunmente se llama *fórmula de* CARDAN, porque este sabio la ha ampliado ventajosamente.[1] VIETA, matemático francés insigne (1540-1603), y ALBERTO GIRARD, geó-

1 Al gran siglo XVI inaugurado por COPÉRNICO pertenecen TARTAGLIA y CARDAN, que son figuras prominentes en la que puede llamarse *Escuela de aritméticos y algebristas italianos del Renacimiento.*

TARTAGLIA (1500) dejó en unos versos mnemotécnicos la solución de la ecuación de tercer grado como conmemoración del triunfo que obtuvo resolviendo dicho problema en la polémica á que lo había retado ANTONIO FIORI, discípulo del bolonés SCIPIÓN FERRO que le había comunicado dicha solución como un secreto. CARDAN (1507-1576), para la composición de su "*Ars magna*" solicitó de TARTAGLIA y obtuvo, después de algunas astucias y pertinaces insistencias, los versos técnicos que contenían la solución del mencionado problema, y más tarde (1540), con el concurso de su discípulo FERRARI, amplió las ideas de TARTAGLIA aplicándolas á la resolución de las ecuaciones de cuarto grado.

Los versos de TARTAGLIA son 27, dispuestos en tres estrofas, cada una de nueve versos ($3 \times 9 = 27 = 3^3$). La primera estrofa contiene la solución del caso $x^3 + px = q$ y dice así:

"Quando che il cubo con le cose appresso
S'agguaglia à qualche número discreto,
Trova mi due altri differenti in esso;
Dapoi terrai questo per consueto
Ch'il lor producto sempre si eguale
Al terzo cubo delle cose netto.
El residuo poi tuo generale
Delli lor latí cubi ben sosttrato,
Vena la tua cosa principale.

metra holandés muerto en 1634, se han ocupado igualmente de estudiarla.

El método expuesto para resolver la ecuación de tercer grado privada de su segundo término, es debido á HUDDE, geómetra holandés (1633–1704).

Como se vé, la fórmula de CARDAN resuelve las tres ecuaciones:

$$x^3+Px+Q=0, \quad x^3+P\alpha x+Q=0, \quad x^3+P\alpha^2x+Q=0$$

Igualando á cero el producto de sus primeros miembros se obtiene la ecuación, resultante de noveno grado:

$$x^9+3Qx^6+(P^3+3Q^2)x^3+Q^3=0$$

después de sustituir por α, α^2 y α^3 sus valores.

La segunda ecuación (765) á la que se reduce la propuesta, es de grado inferior y es la "*ecuación reducida á resolvente.*"

Reemplazando por α y α^2 sus valores, podemos escribir en general:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A+B \\ x_2 &= A\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+B\,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-\frac{A+B}{2}+i\,\frac{(A-B)}{2}\sqrt{3} \\ x_3 &= A\,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}+B\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=-\frac{A+B}{2}-i\,\frac{(A-B)\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (772)$$

recordando que según las notaciones $i=\sqrt{-1}$; además:

$$\alpha=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad \alpha^2=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$$

y que A y B representan los valores generales de u y de v.

Los últimos versos dan á conocer la fecha y el lugar (Venecia) del descubrimiento:

"Questi trovai, ed non con passi tardo
Nel mille cinque cente quatro e trenta
Con fondamenti ben solidi e gogliardi
Nel citta dar mur intorno centa."

En cuanto á la estrofa que al principio hemos puesto, su interpretación es esta: "cuando el cubo con las *cosas* es igual á un número ($x^3+px=q$) es preciso hallar otros dos z é y diferentes en lo mismo, es decir, tener $z-y=q$; su producto zy debe ser igual al cubo del tercio de las *cosas*, $zy=\frac{1}{27}p^3$. Se tiene pues:

$$z-y=q, \quad zy=\tfrac{1}{27}p^3$$

de donde resulta:

$$z^2-qz=\tfrac{1}{27}p^3, \quad y^2+qy=\tfrac{1}{27}p^3$$

Tomando cuenta á la usanza de la época de sólo las raíces positivas:

$$z=\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}, \quad y=\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}-\tfrac{1}{2}q$$

La significación de los tres últimos renglones de la estrofa á que nos referimos expresa que se busque el residuo de las raíces cúbicas (restando la menor de la mayor) para obtener la *cosa;* es decir:

$$x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$$

(MONTUCLA.—"*Histoire des mathématiques.*")
(HOEFER.—"*Histoire des mathématiques.*")

548. **Discusión de la fórmula de Cardan.** Pueden hacerse tres hipótesis en esta fórmula que vamos á examinar:

I. Supongamos que:

$$\frac{Q^2}{4}+\frac{P^3}{27}>0$$

condición que se verifica cuando el coeficiente del segundo término de la ecuación (767) es positivo, ó bien cuando es negativo y el cubo de su tercera parte es menor que el cuadrado de la mitad del tercer término; en este caso, *las raíces de la ecuación son: una real y dos imaginarias.*

En efecto, en nuestra hipótesis los dos radicales que constituyen el segundo miembro de la primera ecuación (771) son reales y tiene cada uno cierto valor que designaremos respectivamente por A y B como ántes.

Así pues, atendiendo á las fórmulas (772) se deduce que en el caso supuesto, *la ecuación tiene una raíz real* x_1 *y dos imaginarias* x_2 *y* x_3, *siendo la raíz real positiva ó negativa, según que el término* Q *sea negativo ó positivo.*

II. Supongamos:

$$\frac{Q^2}{2}+\frac{P^3}{27}=0$$

lo que tiene lugar en la ecuación (760) cuando el coeficiente del segundo término es negativo y el cubo de su tercera parte es igual en valor absoluto al cuadrado de la mitad del término Q; en este caso, las raíces *serán las tres reales y entre ellas dos iguales.*

En este caso, los valores A y B de las radicales serán iguales y se tendrán las expresiones:

$$x_1=A+B=2A, \quad x_2=-A, \quad x_3=-A$$

las tres raíces son reales; además, x_1 será positiva, y x_2, x_3 negativas cuando Q sea negativo, y viceversa, cuando Q sea positivo, x_1 será negativa y x_2, x_3 serán positivas.

III. Supongamos, por último:

$$\frac{Q^2}{4}+\frac{P^3}{27}<0$$

hipótesis que se verifica en la ecuación cuando el coeficiente del segundo término es negativo y el cubo de su tercera parte es numéricamente mayor que el cuadrado de la mitad del tercer término, en este caso, las raíces de la ecuación (761) serán *reales y desiguales entre sí.*

En la hipótesis actual, cada uno de los dos radicales cúbicos de que se compone el segundo miembro de la primera fórmula (771) tiene valor imaginario, lo que se infiere inmediatamente de la expresión de la primera raíz emésima del binomio imaginario:

$$a+b\sqrt{-1}$$

Si pues designamos por $A+B\sqrt{-1}$ el valor del primer radical, y por $A-B\sqrt{-1}$ el valor imaginario conjugado del segundo radical, se tendrán para valores de las tres raíces de la ecuación propuesta de tercer grado, los siguientes *reales y desiguales:*

$$x_1=(A+B\sqrt{-1})+(A-B\sqrt{-1})=2A, \quad x_2=-(A+B\sqrt{3}), \quad x_3=-(A-B\sqrt{3})$$

Notemos que en el presente caso las tres raíces aunque reales se presentan bajo una forma encubierta por cantidades imaginarias, no pueden reducirse *algebraicamente* á una forma real compuesta de un número finito de términos y por este caso se ha denominado IRREDUCTIBLE.

Nos explicaremos más: vamos á ensayar poner *efectivamente* los radicales cúbicos que entran en la fórmula de CARDAN bajo la forma $A + Bi$ que teóricamente hemos supuesto.

Las tres raíces x_1, x_2, x_3 de la ecuación $x^3 + Px + Q = 0$ son:

$$x_1 = 2A, \quad x_2 = -A - B\sqrt{3}, \quad x_3 = -A + B\sqrt{3}$$

Se sabe además que por las leyes de la composición de las ecuaciones:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = P, \quad x_1x_2x_3 = -Q$$

La primera evidentemente está satisfecha; en cuanto á las otras, se cambian en:

$$A^2 + B^2 = -\frac{P}{3}, \quad 2A^3 - 6AB^2 = Q$$

Eliminando á B^2 entre estas ecuaciones resulta:

$$2A^3 - 6A\left(-\frac{P}{3} - A^2\right) = Q \quad \text{ó bien} \quad A^3 + \frac{P}{4}A - \frac{Q}{8} = 0$$

La naturaleza de las raíces de esta ecuación en A depende de la función:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{Q}{8}\right)^2 + \frac{1}{27}\left(\frac{P}{4}\right)^3$$

es decir, de la función:

$$27\,\frac{Q^2}{64} + 4\,\frac{P^3}{64}$$

ó aun todavía de la función $4P^3 + 27Q^2$ que, en rigor, equivale á la:

$$\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}$$

Se recae, pues, en la función primordial que caracteriza la naturaleza de las raíces de la propuesta; la dificultad, pues, de calcular x se repite para calcular A (ó á B si es que en vez de eliminar á B se hubiera eliminado á A). Este caso, pues, se ha llamado con justicia IRREDUCTIBLE, ningún método algebraico exacto lo resuelve. Sólo queda el recurso de que pues se tiene:

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{-Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}$$

podría buscarse el desarrollo:

$$\left(-\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

teniendo presente que la parte real sería el valor de A y el coeficiente de i sería el valor de B. Los procedimientos trigonométricos han expeditado la dificultad de este verdadero *callejón sin salida*[1] y es preferible aplicarlos como vamos á ver.

1 Los matemáticos franceses dicen *impasse*, palabra adoptada por VOLTAIRE en lugar de *cul-de-sac*.

PROCEDIMIENTOS TRIGONOMETRICOS.

549. Para aprovechar la ocasión que se presenta de manifestar las ventajas que al álgebra ha traído la trigonometría, comenzaremos por aplicar los elementos de esta ciencia á la resolución de las ecuaciones de segundo grado.

Ecuaciones de segundo grado. Sea la ecuación:

$$x^2 + px + q = 0$$

PRIMER CASO.—*Raíces reales, desiguales y de signos iguales:*

$$q > 0, \quad \frac{p^2}{4} - q > 0$$

Se tiene:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{p}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right)$$

Bajo esta forma, las condiciones que deben cumplirse son:

$$q > 0, \qquad 1 > \frac{4q}{p^2}$$

Puede pues, suponerse:

$$\operatorname{sen}^2\varphi = \frac{4q}{p^2}$$

que da para φ un valor real calculable por logaritmos y se tendrá:

$$x = -\frac{p}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\varphi}\right) = -\frac{p}{2}\left(1 \mp \cos\varphi\right)$$

Las dos raíces serán:

$$x_1 = -\frac{p}{2}(1 - \cos\varphi) = -p\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}\varphi, \quad x_2 = -\frac{p}{2}(1 + \cos\varphi) = -p\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi$$

Si q fuese nulo únicamente se tendría: $x_1 = 0, x_2 = -p$.

SEGUNDO CASO.—*Raíces reales desiguales de signos diversos.*

$$q < 0, \quad \frac{p^2}{4} - q > 0$$

En este caso q es negativo, $-\frac{4q}{p^2}$ es positivo, y puede suponerse:

$$\operatorname{tang}^2\varphi = \frac{4q}{p^2}$$

Así pues se tendrá:

$$x_1 = -\frac{p}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\varphi}\right) = -\frac{p}{2}\left(\frac{\cos\varphi - 1}{\cos\varphi}\right) = \frac{p}{2}\left(\frac{1 - \cos\varphi}{\cos\varphi}\right) = \frac{p\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\varphi}\right) = -\frac{p}{2}\left(\frac{\cos\varphi + 1}{\cos\varphi}\right) = -\frac{p\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi}$$

Si $q = 0$ sólo se tendría:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -p$$