Tercer caso.—*Raíces reales, iguales de signos iguales:*

$$\frac{p^2}{4} - q = 0\,, \quad q > 0$$

En este caso, puesto que el radical se nulifica, no hay hipótesis que hacer, las raíces tienen por valor: $-\frac{p}{2}$ si en la propuesta p es positivo y $\frac{p}{2}$ si es negativo.

Cuarto caso.—*Raíces imaginarias:*

$$\frac{p^2}{4} - q < 0\,, \quad q > 0$$

Se tiene entonces $1 > \frac{4q}{p^2}$ y puede suponerse:

$$\frac{4q}{p^2} = \sec^2\varphi$$

Resultará:

$$x_1 = -\frac{p}{2}(1 - \sqrt{1-\sec^2\varphi}) = -\frac{p}{2}(1 - \operatorname{tang}\varphi\sqrt{-1})\,, \quad x_2 = -\frac{p}{2}(1 + \operatorname{tang}\varphi\sqrt{-1})$$

Puede también suponerse:

$$\frac{p^2}{4q} = \cos^2\varphi$$

y entonces resulta:

$$x_1 = -\frac{p}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\cos^2\varphi}}\right) = -\frac{p}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{\cos^2\varphi - 1}}{\cos\varphi}\right) = -\frac{p}{2}(1 - \operatorname{tg}\varphi\sqrt{-1})$$

$$x_2 = -\frac{p}{2}(1 + \operatorname{tg}\varphi\sqrt{-1})$$

550. **Ecuaciones de tercer grado.**—La aplicación de la trigonometría á la resolución algebraica de la ecuación de tercer grado ha obedecido á la necesidad de vencer las dificultades del caso *irreductible;* vamos pues, á comenzar por tratar este caso.

I. Llamando ρ el módulo y φ el argumento que son comunes á las dos imaginarias conjugadas de la fórmula (771) ó bien designando por a la cantidad $\frac{-Q}{2}$ y por $-b^2$ la cantidad:

$$\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}$$

pues que en este caso:

$$\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27} < 0$$

tendremos:

$$\sqrt[3]{\frac{-Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} = (a \pm b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = \rho^{\frac{1}{3}}(\cos\varphi \pm \operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{3} \pm \operatorname{sen}\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1}\right)$$

siendo $\varphi < 180$, é idéntico en valor tomando cualquiera de los dos signos.

Las tres raíces de la ecuación de tercer grado serán:

$$x_1 = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1}\right) + \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1}\right) = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\varphi}{3}$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1}\right) + \frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1}\right) =$$

$$= -2\sqrt[3]{\rho}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\frac{\varphi}{3}\right) = -2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(60 - \frac{\varphi}{3}\right)$$

$$x_3 = \frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{3}\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1}\right) + \frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{3}\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1}\right) =$$

$$= -2\sqrt[3]{\rho}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\frac{\varphi}{3}\right) = -2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right) = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(120 - \frac{\varphi}{3}\right)$$

Ahora bien, puesto que se tiene:

$$\frac{-Q}{2} = \rho\cos\varphi\,, \quad \frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27} = -\rho^2\operatorname{sen}^2\varphi$$

resultará elevando la primera al cuadrado y restando al resultado la segunda:

$$\frac{Q^2}{4} - \frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27} = \rho^2(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi) = \rho^2$$

Así pues:

$$\rho = \sqrt{\frac{-P^3}{27}}$$

sustituyendo, las tres raíces serán:

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{-P}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}, \quad x_2 = -2\sqrt{\frac{-P}{3}}\cos\left(60 - \frac{\varphi}{3}\right), \quad x_3 = 2\sqrt{\frac{-P}{3}}\cos\left(120 - \frac{\varphi}{3}\right)$$

Si la fórmula:

$$\cos\varphi = -\frac{\frac{Q}{2}}{\sqrt{\frac{-P^3}{27}}} = -\frac{Q}{2\sqrt{\frac{-P^3}{27}}}$$

conduce á un valor negativo para $\cos\varphi$ se buscará en las tablas el ángulo φ' suplementario de φ cuyo coseno es igual y de signo contrario al de φ. Conocido φ, los valores de x_1, x_2 y x_3 se conocerán inmediatamente.

II. Si:

$$\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27} = 0$$

dos de las raíces reales serán iguales entre sí.

Tenemos las relaciones:

$$\frac{-Q}{2} = \rho\cos\varphi\,, \quad \frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27} = -\rho^2\operatorname{sen}^2\varphi$$

El segundo valor da:

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = 0$$

luego:

$$\varphi = 0 \text{ ó } \varphi = \pi$$

como el módulo ρ es esencialmente positivo, de la primera ecuación se deduce que φ será igual á cero si Q es negativo y φ será igual á π si Q es positivo.

1º $Q < 0$. Las tres raíces serán:

$$x_1 = 2\sqrt[3]{\frac{-P}{2}}, \qquad x_2 = -\sqrt[3]{\frac{-P}{3}}, \qquad x_3 = -\sqrt[3]{\frac{-P}{3}} = x_2$$

2º $Q > 0$. Las tres raíces serán:

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{-P}{3}}, \quad x_2 = -2\sqrt[3]{\frac{-P}{3}}, \quad x_3 = \sqrt[3]{\frac{-P}{3}} = x_1$$

III.—1º Sea P negativo, y:

$$\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27} > 0$$

de las relaciones (762) y la primera de las (764) se deduce:

$$x = u - \frac{P}{3u}$$

Y si se designa por A el radical:

$$\sqrt[3]{\frac{-Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}$$

se tendrá, puesto que P es negativo:

$$x_1 = A + \frac{P}{3A} = \sqrt{\frac{P}{3}}\left(\frac{A}{\sqrt{\frac{P}{3}}} + \frac{\sqrt{\frac{P}{3}}}{A}\right), \qquad x_2 = \sqrt{\frac{P}{3}}\left(\frac{\alpha A}{\sqrt{\frac{P}{3}}} + \frac{\alpha^2\sqrt{\frac{P}{3}}}{A}\right)$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{P}{3}}\left(\frac{\alpha^2 A}{\sqrt{\frac{P}{3}}} + \frac{\alpha\sqrt{\frac{P}{3}}}{A}\right)$$

El valor:

$$\frac{A}{\sqrt{\frac{P}{3}}}$$

puede ponerse bajo la forma:

$$\frac{A}{\sqrt{\frac{P}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{-\frac{Q}{2}}{\sqrt{\frac{P^3}{27}}} + \sqrt{\frac{\frac{Q^2}{4}}{\frac{P^3}{27}} - 1}}$$

puesto que P negativo.

Se determinará un arco φ que satisfaga la condición:

$$\operatorname{sen} 2\varphi = -\frac{\sqrt{\frac{P^3}{27}}}{\frac{Q}{2}}$$

y se tendrá:

$$\frac{A}{\sqrt{\frac{P}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{\operatorname{sen} 2\varphi} + \sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 2\varphi} - 1}} = \sqrt[3]{\frac{1 - \cos 2\varphi}{\operatorname{sen} 2\varphi}}\ \text{[1]} = \sqrt[3]{\frac{2\operatorname{sen}^2\varphi}{2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}} = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\varphi}$$

De consiguiente:

$$x_1 = \sqrt{\frac{P}{3}}\left(\sqrt[3]{\operatorname{tang}\varphi} + \sqrt[3]{\cot\varphi}\right), \qquad x_2 = \sqrt{\frac{P}{3}}\left(\alpha\sqrt[3]{\operatorname{tang}\varphi} + \alpha^2\sqrt[3]{\cot\varphi}\right),$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{P}{3}}\left(\alpha^2\sqrt[3]{\operatorname{tang}\varphi} + \alpha\sqrt[3]{\cot\varphi}\right)$$

Si suponemos:

$$\sqrt[3]{\operatorname{tang}\varphi} = \operatorname{tang}\psi$$

se tendrá:

$$x_1 = \sqrt{\frac{P}{3}}(\operatorname{tang}\psi + \cot\psi), \qquad x_2 = \sqrt{\frac{P}{3}}(\alpha\operatorname{tang}\psi + \alpha^2\cot\psi),$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{P}{3}}(\alpha^2\operatorname{tang}\psi + \alpha\cot\psi)$$

Si hubiésemos tomado $+\cos 2\varphi$ en lugar de $-\cos 2\varphi$, tang ψ se cambiaría en cot ψ y viceversa, pero no hubiera resultado ningún nuevo valor para x.

Reemplazando α y α^2 por sus valores:

$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \text{ y } -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$$

y recordando que por trigonometría se tiene:

$$\cot\psi + \operatorname{tang}\psi = 2\operatorname{cosec} 2\psi, \quad \cot\psi - \operatorname{tang}\psi = 2\cot 2\psi$$

los valores de x_1, x_2 y x_3 serán:

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{P}{3}}\operatorname{cosec} 2\psi, \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{P}{3}}(\operatorname{cosec} 2\psi + \cot 2\psi\sqrt{-3}),$$

$$x_3 = -\sqrt{\frac{P}{3}}(\operatorname{cosec} 2\psi - \cot 2\psi\sqrt{-3}),$$

2º Sea P positivo y tendremos en general:

$$x = A - \frac{\frac{P}{3}}{A} = \sqrt{\frac{P}{3}}\left(\frac{A}{\sqrt{\frac{P}{3}}} - \frac{\sqrt{\frac{P}{3}}}{A}\right)$$

1 Al extraer la raíz cuadrada puede tomarse indiferentemente $+\cos 2\varphi$ ó $-\cos 2\varphi$.

Pero como:

$$\frac{A}{\sqrt{\frac{P}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{-\frac{Q}{2}}{\sqrt{\frac{P^3}{27}}} + \sqrt{\frac{\frac{Q^2}{4}}{\frac{P^3}{27}} + 1}}$$

Como:

$$\frac{-\frac{Q}{2}}{\sqrt{\frac{P^3}{27}}}$$

puede tener una magnitud cualquiera, pondremos:

$$\cot 2\varphi = \frac{-\frac{Q}{2}}{\sqrt{\frac{P^3}{27}}}$$

De consiguiente:

$$\frac{A}{\sqrt{\frac{P}{3}}} = \sqrt[3]{\cot 2\varphi + \sqrt{\cot^2 2\varphi + 1}} = \sqrt[3]{\frac{1 + \cos 2\varphi}{\operatorname{sen} 2\varphi}} = \sqrt[3]{\cot \varphi} = \cot \psi$$

De consiguiente:

$$x_1 = \sqrt{\frac{P}{3}}\,(\cot \psi - \operatorname{tang} \psi) = 2\sqrt{\frac{P}{3}}\cot 2\psi$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{P}{3}}\,(\cot 2\psi - \operatorname{cosec} 2\psi \sqrt{-3})$$

$$x_3 = -\sqrt{\frac{P}{3}}\,(\cot 2\psi + \operatorname{cosec} 2\psi \sqrt{-3})$$

551. **Otro procedimiento trigonométrico para resolver el caso irreductible.** El caso irreductible puede resolverse con facilidad asimilando su solución al problema de la *trisección del ángulo*.

Se tiene por trigonometría: [1]

$$\operatorname{sen}^3 b = \tfrac{3}{4} \operatorname{sen} b - \tfrac{1}{4} \operatorname{sen} 3b$$

de donde:

$$\operatorname{sen} 3b = 3 \operatorname{sen} b - 4 \operatorname{sen}^3 b$$

y suponiendo $b = \frac{1}{3} a$ resultará:

$$\operatorname{sen} a = 3 \operatorname{sen} \tfrac{1}{3} a - 4 \operatorname{sen}^3 \tfrac{1}{3} a$$

Si designamos $\operatorname{sen} \frac{1}{3} a$ por x tendremos:

$$x^3 - \tfrac{3}{4} x + \frac{\operatorname{sen} a}{4} = 0 \qquad (773)$$

1 TAMBORRELL. "*Trigonometría.*"

Dividiendo por una indeterminada ρ las raíces de la propuesta:

$$x^3 + Px + Q = 0$$

se obtiene:

$$x^3 + \frac{Px}{\rho^2} + \frac{Q}{\rho^3} = 0 \qquad (774)$$

Para que las dos ecuaciones de tercer grado sean idénticas debe tenerse:

$$\frac{P}{\rho^2} = -\frac{3}{4}, \quad \frac{Q}{\rho^3} = \frac{\operatorname{sen} a}{4}$$

que dan los valores:

$$\rho = 2\sqrt{-\frac{P}{3}}, \qquad \operatorname{sen} a = \frac{4Q}{\rho^3} = \sqrt{-\frac{27Q^2}{4P^3}} \qquad (775)$$

Conocidos ρ y sen a, como las raíces de (773) son: [1]

$$\operatorname{sen}\frac{a}{3}, \qquad \operatorname{sen}\frac{a + 2\pi}{3}, \qquad \operatorname{sen}\frac{a + 4\pi}{3}$$

las de la (774) serán:

$$\rho \operatorname{sen}\frac{a}{3}, \qquad \rho \operatorname{sen}\frac{a + 2\pi}{3}, \qquad \rho \operatorname{sen}\frac{a + 4\pi}{3}$$

Dando, pues, á ρ y á sen a los valores (775) se conocerán las raíces de la propuesta.

Ahora bien, para que los valores (775) *sean admisibles*, es preciso, pues, que sen a es real, que ρ lo sea también, es decir, que P sea negativo; además, el cuadrado de sen a debe ser < 1 porque sen a está comprendido entre -1 y $+1$. Debe tenerse, por consiguiente:

$$\frac{-27Q^2}{4P^3} < 1 \qquad \text{ó bien} \qquad \frac{Q^2}{4} < -\frac{P^3}{27}$$

Es decir:

$$\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27} < 0$$

que es justamente la condición del caso *irreductible*.

APLICACIONES.

552. I. Sea la ecuación:

$$x^3 + 3x - 14 = 0$$

en la que $P = +3$, $Q = -14$, y por consiguiente:

$$\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27} = 50 > 0$$

Se presenta, pues el primer caso en que hay una raíz real y dos imaginarias.

TAMBORRELL. "*Trigonometría,*" página 26.

Sustituyendo los valores de P y Q en las fórmulas (771) resulta:

$$x_1 = \sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{50}}, \quad x_2 = \alpha\sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \alpha^2\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}$$

$$x_3 = \alpha^2\sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \alpha\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}$$

Para extraer la raíz cúbica de los binomios:

$$7+\sqrt{50} = 7+5\sqrt{2} \text{ y } 7-\sqrt{50} = 7-5\sqrt{2}$$

nos valdremos de un artificio.

Designemos por ω una cantidad desconocida que satisfaga la relación:

$$7 \pm 5\sqrt{2} = (\omega \pm \sqrt{2})^3 = \omega^3 \pm 3\omega^2\sqrt{2} + 6\omega \pm 2\sqrt{2}$$

Para que subsista esta relación debe tenerse:

$$\omega^2 + 6\omega = 7, \quad 3\omega^2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

De la segunda obtenemos: $\omega^2 = 1$ ó bien $\omega = \pm 1$.

Sustituyendo estos valores en la primera, sólo $\omega = +1$ la satisface; así pues, tendremos:

$$7 \pm 5\sqrt{2} = (\omega \pm \sqrt{2})^3 = (1 \pm \sqrt{2})^3 \text{ ó bien } \sqrt[3]{7 \pm 5\sqrt{2}} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Así pues, los valores de x_1, x_2 y x_3 serán:

$$x_1 = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 2$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}(1+\sqrt{2}) + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}(1-\sqrt{2}) = -1+\sqrt{-6}$$

$$x_3 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}(1+\sqrt{2}) + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}(1-\sqrt{2}) = -1-\sqrt{-6}$$

II. Sea:

$$x^3 - 6x^2 + 3x + 20 = 0$$

Para quitarle el segundo término sustituiremos en lugar de x el valor:

$$x + \tfrac{6}{3} = x + 2$$

lo que dará:

$$x^3 - 9x + 10 = 0$$

cuyas raíces son las de la propuesta disminuidas dos unidades.

En la transformada se tiene:

$$\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27} = -2 < 0$$

habrá, pues, tres raíces reales, es justamente el caso irreductible.

Se tendrá:

$$x_1 = \sqrt[3]{-5+\sqrt{-2}} + \sqrt[3]{-5-\sqrt{-2}}, \quad x_2 = \alpha\sqrt[3]{-5+\sqrt{-2}} + \alpha^2\sqrt[3]{-5-\sqrt{-2}}$$

$$x_3 = \alpha^2\sqrt[3]{-5+\sqrt{-2}} + \alpha\sqrt[3]{-5-\sqrt{-2}}$$

Nos valdremos de un artificio para hallar la forma real de las raíces y supongamos para ello la relación:

$$-5 \pm \sqrt{-2} = (\omega \pm \sqrt{-2})^3 = \omega^3 \pm 3\omega^2\sqrt{-2} - 6\omega \mp 2\sqrt{-2}$$

que nos da las condiciones:

$$\omega^3 - 6\omega = -5, \quad 3\omega^2\sqrt{-2} - 2\sqrt{-2} = \sqrt{-2}$$

De la segunda se deduce $\omega^2 = 1$, es decir, $\omega = \pm 1$.

Como de estos valores sólo $+1$ verifica á la primera tendremos:

$$x_1 = (1+\sqrt{-2}) + (1-\sqrt{-2}) = 2$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}(1+\sqrt{-2}) + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}(1-\sqrt{-2}) = -1+\sqrt{6}$$

$$x_3 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}(1+\sqrt{-2}) + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}(1-\sqrt{-2}) = -1-\sqrt{6}$$

Añadiendo dos unidades á cada una, las raíces de la propuesta, son:

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 1+\sqrt{6}, \quad x_3 = 1-\sqrt{6}$$

N. B. En este caso, como los binomios afectados del radical son cubos perfectos, hemos podido *algebraicamente* evitar las formas imaginarias. En el Capítulo III, Primera Parte, hemos expuesto el criterio para conocer cuándo un binomio es cubo perfecto y cómo puede en este caso extraérsele la raíz.

III. Resolver trigonométricamente la ecuación:

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

Se tiene:

$$\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27} < 0$$

en este caso, que es por consiguiente el *irreductible*.

Las fórmulas por aplicar son (párrafo 550):

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{-P}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}, \quad x_2 = -2\sqrt{\frac{-P}{3}}\cos\left(60 - \frac{\varphi}{3}\right), \quad x_3 = 2\sqrt{\frac{-P}{3}}\cos\left(120 - \frac{\varphi}{3}\right)$$

$$\rho = \sqrt{\frac{-P^3}{27}}, \quad \cos\varphi = -\frac{Q}{2\rho}$$

Comenzaremos por calcular á φ para lo cual tendremos:

$$\rho = \sqrt{\frac{343}{27}}, \quad \cos\varphi = -\frac{7}{2\rho}$$

Como $\cos\varphi$ resulta negativo, buscaremos el ángulo suplementario:

$$\varphi' = 180 - \varphi$$