CAPÍTULO XVII.

ECUACIONES BINOMIAS Y TRINOMIAS.

Resolución algebraica de las Ecuaciones Binomias.—Resolución trigonométrica.—Divisores de segundo grado.—Teoremas sobre la división de la circunferencia en m partes iguales.—Resolución de la ecuación $y^m - (a + b\sqrt{-1}) = 0$.—Ecuaciones Trinomias.—Teoremas de CÔTES y de MOIVRE.

560. Como complemento á la resolución algebraica de las ecuaciones nos ocupamos en el presente Capítulo de las *ecuaciones binomias* de que tanto se han ocupado GAUSS y LAGRANGE y sobre las que cabe formular leyes fijas. La extensión de que no queremos pasar nos obliga á tratarlas con más brevedad de la que quisiéramos.

561. Las ecuaciones binomias son de la forma:

$$x^m - A = 0 \qquad (784)$$

Como $x^m - A$ y la primera derivada $m\,x^{m-1}$ no admiten factor común, las m raíces de (784) son diferentes.

La ecuación (784) equivale á:

$$x = \sqrt[m]{A}$$

de consiguiente, el radical $\sqrt[m]{A}$ tendrá m valores diversos como ya habíamos hecho notar en el Capítulo III de la Primera Parte.

Si A es de la forma:

$$a + \beta\sqrt{-1}$$

los valores del radical $\sqrt[m]{A}$ serán de esa forma.

Si m es un número compuesto de los factores p, q, r, por ejemplo, se tendrá:

$$x^{pqr} = A$$

que puede descomponerse en:

$$x^p = x', \quad x'^q = x'', \quad x''^r = A$$

en cuyas ecuaciones x', x'' son nuevas incógnitas; conocidos los valores de x'' en función de A, se conocerán los de x', y finalmente los de x. Bajo una forma elemental se tendrá:

$$x'' = \sqrt[r]{A}\,,\ x' = \sqrt[q]{x''} = \sqrt[q]{\sqrt[r]{A}}\,,\ x = \sqrt[p]{x'} = \sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[r]{A}}}$$

fórmula conocida.

562. Llamemos a la *determinación aritmética emésima* de A y supongamos $x = a\,y$, tendremos la ecuación (784) bajo la forma:

$$a^m y^m = a^m \quad \text{ó bien} \quad y^m = 1$$

es decir:

$$y = \sqrt[m]{1}$$

Sustituyendo resulta:

$$x = a\,y = a\sqrt[m]{1}$$

Luego *las raíces emésimas de una cantidad se pueden formar multiplicando cualquiera de ellas por las* m *raíces emésimas de la unidad.*

563. Como por una parte en la ecuación (784) puede tener A signo $+$ ó signo $-$, por otra la resolución de (784) depende de la de otra ecuación binomia en que el término conocido es -1 ó $+1$ respectivamente (párrafo anterior), y además m puede ser par ó impar, la discusión de las ecuaciones binomias podemos cifrarla en el estudio de los cuatro casos siguientes:

PRIMER CASO.—m *impar y la ecuación es:*

$$y^m - 1 = 0$$

En este caso, la ecuación admite evidentemente la única raíz real $y = 1$, pues todo valor positivo diverso de 1 daría resultados mayores ó menores que 1, es decir, $y^m > 1$ ó $y^m < 1$ y todo valor negativo haría negativo á y^m. Las $m-1$ raíces restantes que son imaginarias, dependen de la ecuación que resulta de dividir:

$$y^m - 1 \div y - 1$$

y que es:

$$y^{m-1} + y^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + y + 1 = 0$$

esta *ecuación recíproca* ya sabe resolverse.

SEGUNDO CASO.—m *impar y la ecuación es:*

$$y^m + 1 = 0$$

No puede haber raíces positivas evidentemente, la única raíz real negativa es $y = -1$, las $m-1$ imaginarias restantes están contenidas en la ecuación cociente que origina la división:

$$\frac{y^m + 1}{y + 1}$$

Es más fácil atender á que las raíces de $y^m = -1$ son las de $y^m = 1$ con signo cambiado, pues cambiando y en $-y$ se pasa de una ecuación á la otra.

TERCER CASO.—m *par*, es decir, $m = 2n$ *y la ecuación es:*

$$y^{2n} - 1 = 0$$

Los valores $+1$ y -1 son las únicas raíces reales, las $m-2$ restantes imaginarias dependen de la ecuación que origina la división:

$$\frac{y^{2n}-1}{(y+1)(y-1)}=\frac{y^{2n}-1}{y^2-1}$$

pero pueden también obtenerse atendiendo á que la propuesta puede descomponerse en las dos ecuaciones:

$$y^n-1=0,\quad y^n+1=0$$

CUARTO CASO.—m *par*, es decir, m = 2n *y la ecuación es:*

$$y^{2n}+1=0$$

Todas las raíces son imaginarias, suponiendo $y^2=z$ se puede rebajar la ecuación cambiándola en:

$$z^n+1=0$$

564. NOTAS. Recordando los conceptos del Capítulo III, Primera Parte, se pueden demostrar dos escolios:

1º *Si* α *es una raíz imaginaria de* $y^m-1=0$, α^p *también será raíz* (siendo p un número entero cualquiera positivo ó negativo y m un número primo). Como α es raíz, se tiene: $\alpha^m=1$, de consiguiente:

$$(\alpha^m)^p=1 \quad \text{ó bien} \quad (\alpha^p)^m=1$$

luego α^p es raíz.

Así pues, si α es una raíz imaginaria de $y^m-1=0$, también serán raíces:

$$\alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \ldots\ldots,\ \alpha^{-1},\ \alpha^{-2},\ \alpha^{-3},\ \ldots\ldots$$

Varias de estas potencias entran unas en otras, pues de otro modo la ecuación admitiría más de m raíces.

En efecto, si α es raíz de $y^5-1=0$, por ejemplo, se tiene $\alpha^5=1$, y en consecuencia:

$$\alpha^6=\alpha^5.\alpha=\alpha,\quad \alpha^7=\alpha^6.\alpha^2=\alpha^2,\ \text{etc.}$$

2ª *Si* α *es una raíz imaginaria de* $y^m+1=0$, α^p *es también raíz* (siendo p un número impar cualquiera positivo ó negativo). En efecto, de $\alpha^m=-1$ se deduce:

$$(\alpha^m)^p=-1 \quad \text{ó bien} \quad (\alpha^p)^m=-1$$

luego α^p es raíz.

Así pues:

$$\alpha^1,\ \alpha^3,\ \alpha^5,\ \ldots\ldots;\ \alpha^{-1},\ \alpha^{-3},\ \alpha^{-5},\ \ldots\ldots$$

son raíces de $y^m+1=0$.

APLICACIONES.

565. Vamos á aplicar á casos particulares las ecuaciones:

$$y^m-1=0 \quad \text{é} \quad y^m+1=0$$

I. Sea $m=2$ y tendremos según el signo:

$$y^2-1=0,\quad y^2+1=0$$

la primera tiene por raíces:

$$y=+1,\quad y=-1$$

la segunda tiene por raíces:

$$y=+\sqrt{-1},\quad y=-\sqrt{-1}$$

II. Sea $m=3$ y tendremos:

(1) $y^3-1=0$. Como una de sus raíces es $y=1$ para obtener las otras tendremos:

$$\frac{y^3-1}{y-1}=y^2+y+1$$

cuyas raíces son:

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

luego las tres de la propuesta son:

$$1,\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

(2) $y^3+1=0$. Sus raíces son las de la ecuación anterior con signos cambiados:

$$-1,\ \frac{1-\sqrt{-3}}{2},\ \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$$

III. Sea: $m=4$ y tendremos:

(1) $y^4-1=0$. Se descompone en:

$$y^2-1=0,\quad y^2+1=0$$

y las cuatro raíces serán:

$$+1,\ -1,\ +\sqrt{-1},\ -\sqrt{-1}$$

(2) $y^4+1=0$. Puede resolverse fácilmente apelando al artificio de añadir $2y^2$ á sus dos miembros:

$$y^4+2y^2+1=2y^2,\quad (y^2+1)^2=2y^2,\quad y^2+1=\pm y\sqrt{2}$$

La última ecuación origina dos:

$$y^2+1=y\sqrt{2},\quad y^2+1=-y\sqrt{2}$$

las raíces de la primera son:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-2}$$

las raíces de la segunda son:

$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-2}$$

Podrá también resolverse por el método de las *recíprocas* ó poniéndola bajo la forma $y^2=\pm\sqrt{-1}$ que conduce á dos:

$$y^2=+\sqrt{-1},\quad y^2=-\sqrt{-1}$$

que á su vez originan las soluciones:

$$y=\pm\sqrt{+\sqrt{-1}},\quad y=\pm\sqrt{-\sqrt{-1}}$$

que se traerían á la forma: $\alpha+\beta\sqrt{-1}$. (Capítulo III. Primera Parte.)

Hasta el décimo grado se resolverán las binomias por los casos precedentes ó tratándolas como *recíprocas*.

IV. Sea: $y^5-1=0$. Como $y=1$ es raíz, efectuaremos la división:

$$y^5-1 \div y-1$$

que conduce al cociente:

$$y^4+y^3+y^3+y+1$$

Tratando este cociente por el método de las recíprocas se obtienen las raíces:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \pm \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}, \qquad \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \pm \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}$$

V. Las ecuaciones: $y^7-1=0$, $y^9-1=0$ se resolverán análogamente; las:

$$y^5+1=0, \quad y^7+1=0, \quad y^9+1=0$$

tienen raíces iguales y de signos contrarios á las correspondientes en que 1 tiene signo ménos. Las ecuaciones:

$$y^6-1=0, \quad y^8-1=0, \quad y^{10}-1=0$$

se descompondrán en otras dos de raíces conocidas.

Las ecuaciones:

$$y^6+1=0, \quad y^8+1=0, \quad y^{10}+1=0$$

pueden tratarse como recíprocas ó resolverse partiendo de las correspondientes en que 1 lleva signo menos.

Las ecuaciones cuyo grado es múltiple de 2, 3, 5, 7, ..., se resolverán análogamente.

La ecuación $y^{11}-1=0$ fué tratada por VANDERMONDE en una Memoria incluída en las de la Academia de Ciencias (1771); la expresión hallada para la raíz es extremadamente complicada y puede decirse que imposible de reducir á la forma:

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}$$

por métodos algebraicos exactos.

GAUSS en 1801 publicó un ingenioso procedimiento para resolver todos los casos de $y^m-1=0$. LAGRANGE se ocupó más tarde del problema en su "*Résolution des équations numériques.*" Los grandes matemáticos de lo que puede llamarse Algebra Trascendente, ABEL en primer término, han sujetado al rigor de su análisis el estudio de las ecuaciones que ahora nos ocupan.

La resolución obvia de las *Ecuaciones Binomias* se efectúa con ayuda de la Trigonometría como vamos á ver.

RESOLUCION TRIGONOMETRICA DE LAS ECUACIONES BINOMIAS.

566. Como en la Primera Parte Capítulo VIII nos ocupamos detalladamente de la forma trigonométrica de las cantidades imaginarias, y en párrafos como el 268 hicimos ya el estudio de las raíces imaginarias de la unidad; con objeto de evitar repeticiones inútiles, tan sólo concretaremos las ideas ya expuestas en lo que se refiere á las ecuaciones binomias bajo forma de conclusiones.

Sea $y^m=A$ la ecuacion binomia propuesta, cuya forma general trigonométrica es:

$$y^m=A=\rho(\cos\omega+\operatorname{sen}\omega\,.\,i) \tag{785}$$

Según la fórmula de MOIVRE se tendrá (párrafo 265):

$$x=\rho^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\varphi+2K\pi}{m}+\operatorname{sen}\frac{\varphi+2K\pi}{m}\,.\,i\right)$$

y dando á K, m valores consecutivos (por ejemplo los m valores: 0, 1, 2, 3, ..., $m-1$), se obtendrán las m raíces distintas de la ecuación (785).

Siendo K un número entero indeterminado, se puede escribir siendo K y K_1 números enteros cualesquiera:

$$x=\rho^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\varphi+2K\pi+2K_1\pi-2K_1\pi}{m}+\operatorname{sen}\frac{\varphi+2K\pi+2K_1\pi-2K_1\pi}{m}\,.\,i\right)$$

que puede ponerse bajo la forma (párrafo 260.–III):

$$x=\rho^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\varphi+2K_1\pi}{m}+\operatorname{sen}\frac{\varphi+2K_1\pi}{m}\,.\,i\right)\times\left(\cos\frac{2(K-K_1)\pi}{m}+\operatorname{sen}\frac{2(K-K_1)\pi}{m}\,.\,i\right)$$

Como se tienen (párrafos 264, 265, 268) las dos ecuaciones:

$$\sqrt[m]{A}=\rho^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\varphi+2K_1\pi}{m}+\operatorname{sen}\frac{\varphi+2K_1\pi}{m}\,.\,i\right), \quad \sqrt[m]{1}=\cos\frac{2(K-K_1)\pi}{m}+\operatorname{sen}\frac{2(K-K_1)\pi}{m}\,.\,i$$

resultará:

$$x=\sqrt[m]{A}\;\sqrt[m]{1}$$

es decir: *Para obtener todas las raíces de* (785) *se multiplicará una cualquiera de ellas por las* m *raíces emésimas de la unidad.* Esta conclusión concuerda con la que en el párrafo formulamos siguiendo el método algebraico.

567. Vemos pues, que el estudio de la ecuación:

$$x^m-A=0$$

depende del de la ecuación $x^m-1=0$, es decir, del estudio de las raíces imaginarias de la unidad positiva, como para $x^m+A=0$ resultaría conclusión análoga con respecto á -1, podemos, como en el párrafo 563 ocuparnos de cuatro casos generales.

1º m *par y la ecuación es:* $y^m-1=0$ ó bien $y=\sqrt[m]{1}$
2º m *impar y la ecuación es:* $y^m-1=0$ ó bien $y=\sqrt[m]{1}$
3º m *par y la ecuación es:* $y^m+1=0$ ó bien $y=\sqrt[m]{-1}$
4º m *impar y la ecuación es:* $y^m+1=0$ ó bien $y=\sqrt[m]{-1}$

PRIMER CASO. Cuando m es par y la ecuación por estudiar es de la forma:

$$y=\sqrt[m]{1}$$

los valores de $\sqrt[m]{1}$ los da la fórmula (párrafo 268):

$$\sqrt[m]{1}=\cos\frac{2K\pi}{m}\pm\operatorname{sen}\frac{2K\pi}{m}\,.\,i$$