Dando á K los valores:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ \frac{m}{2}$$

resultarán, á causa del doble signo:

$$2\left(\frac{m}{2}+1\right)=m+2$$

resultados que se reducen á m porque los que provienen de suponer:

$$\mathrm{K}=0, \quad \mathrm{K}=\frac{m}{2}$$

no constituyen respectivamente sino uno solo, $+1$ ó -1, puesto que el segundo término se nulifica. Las demás $m-2$ raíces *son imaginarias, conjugadas y recíprocas* (párrafo 257).

Segundo caso. Cuando m es impar y la ecuación es de la forma $y=\sqrt[m]{1}$ basta suponer:

$$\mathrm{K}=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ \frac{m-1}{2}$$

se obtiene por todo:

$$2\left(\frac{m-1}{2}+1\right)=m+1$$

valores, pero se reducen á m porque los dos que origina la suposición $\mathrm{K}=0$ constituyen uno solo que es $+1$, las demás raíces *son imaginarias, conjugadas y recíprocas.*

Tercer caso. Cuando m es par y la ecuación es de la forma $y=\sqrt[m]{-1}$ la fórmula correspondiente es (párrafo 268):

$$\sqrt[m]{-1}=\cos\frac{(2\mathrm{K}+1)\pi}{m}\pm \operatorname{sen}\frac{(2\mathrm{K}+1)\pi}{m}.i \qquad (786)$$

basta sustituir:

$$\mathrm{K}=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ \frac{m}{2}-1$$

y resultan *m valores imaginarios, conjugados y recíprocos.*

Cuarto caso. Cuando m es impar y la ecuación es de la forma $y=\sqrt[m]{-1}$ basta suponer:

$$\mathrm{K}=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ \frac{m-1}{2}$$

Se obtiene entonces:

$$2\left(\frac{m-1}{2}+1\right)=m+1$$

valores que se reducen á m porque los que origina:

$$\mathrm{K}=\frac{m-1}{2}$$

constituyen uno solo, -1; las demás raíces *son imaginarias, conjugadas y recíprocas.*

Nota. Las raíces imaginarias conjugadas corresponden á los valores de K que completan el grado de la ecuación por ejemplo á $\mathrm{K}=1$ y $\mathrm{K}=m-1$. En efecto, eligiendo la ecuación $y=\sqrt[m]{1}$ se tiene:

Para $\mathrm{K}=1$:

$$y=\cos\frac{2\pi}{m}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{m}.i$$

Para $\mathrm{K}=m-1$:

$$y=\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{m}\right)+\operatorname{sen}\left(2\pi-\frac{2\pi}{m}\right).i=\cos\frac{2\pi}{m}-\operatorname{sen}\frac{2\pi}{m}.i$$

que, como se ve, son valores conjugados.

APLICACIONES.

568. I. Sea $y^3-1=0$ que se halla en el segundo caso. En la fórmula (785) ponemos:

$$\mathrm{K}=0,\ 1$$

y tendremos:

$$y=\cos 0\pm\operatorname{sen} 0.i=1$$

$$y=\cos\frac{2\pi}{3}\pm\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}.i=\begin{cases}\cos 120^\circ+\operatorname{sen}120^\circ.i=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}.i\\ \cos 120^\circ-\operatorname{sen}120^\circ.i=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}.i\end{cases}$$

las tres raíces serán:

$$1,\quad -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1},\quad -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1}$$

que son las tres raíces cúbicas de la unidad ya tan conocidas.

II. Sea $y^4-1=0$ que se halla en el primer caso. En la fórmula (785) ponemos:

$$\mathrm{K}=0,\ 1,\ 2$$

y tendremos:

$$\begin{aligned}&y=\cos 0\pm\operatorname{sen} 0.i=1\\ &y=\cos 90^\circ\pm\operatorname{sen} 90^\circ.i=\begin{cases}i\\-i\end{cases} \quad \text{las cuatro raíces son:}\ 1,\ -1,\ +\sqrt{-1},\ -\sqrt{-1}\\ &y=\cos 180^\circ\pm\operatorname{sen}180^\circ.i=-1\end{aligned}$$

III. Sea $y^4+1=0$, que se halla en el tercer caso. En la fórmula (786) haremos:

$$\mathrm{K}=0,\ 1$$

y tendremos:

$$y=\cos 45\pm\operatorname{sen} 45.i=\begin{cases}\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}.i\\ \frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}.i\end{cases}$$

$$y=\cos 135\pm\operatorname{sen} 135.i=\begin{cases}-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}.i\\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}.i\end{cases}$$

Las cuatro raíces serán:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-1},\quad -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-1}$$

IV. Sea $y^5+1=0$ que se halla en el cuarto caso. En la fórmula (786) haremos:

$$K=0,\ 1,\ 2$$

y tendremos:

$$y=\cos 36 \pm \operatorname{sen} 36 \sqrt{-1}, \quad y=\cos 108 \pm \operatorname{sen} 108 \sqrt{-1}, \quad y=-1$$

Los cosenos de 36° y de 108° fácilmente se calcularán con ayuda de una tabla de valores naturales.

V. Calcular las raíces de las ecuaciones:

$$y^5-1=0, \quad y^9+1=0, \quad y^8+1=0, \quad y^{10}-1=0, \quad y^{11}-1=0, \quad \text{etc.}$$

VI. Calcular las raíces de la ecuación $y^3-9=0$ aproximadas hasta la cuarta cifra decimal:

Se tiene:

$$y=\sqrt[3]{9}\ \sqrt[3]{1}$$

La raíz cúbica de 9 con cuatro cifras decimales es: 2.0801; las tres raíces cúbicas de 1 son:

$$1, \quad -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1}, \quad -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1}$$

de consiguiente:

$$y=2.0801, \quad y=-1.0400+1.0400\sqrt{3}\sqrt{-1}, \quad y=-1.0400-1.0400\sqrt{3}\sqrt{-1}$$

La raíz cuadrada de 3 es con cuatro cifras decimales: 1.7321, de consiguiente:

$$y=2.0801, \quad y=-1.0400+1.8014\sqrt{-1}, \quad y=-1.0400-1.8014\sqrt{-1}$$

Como comprobación las elevaríamos al cubo.

VII. Calcular las raíces de:

$$y^3-27=0 \quad \text{é} \quad y^3+27=0, \quad \text{etc.}$$

569. **Divisores de segundo grado.** La fórmula (785) se descompone en las dos expresiones:

$$y=\cos\frac{2K\pi}{m}+\operatorname{sen}\frac{2K\pi}{m}.i, \quad y=\cos\frac{2K\pi}{m}-\operatorname{sen}\frac{2K\pi}{m}.i$$

Multiplicándolas se obtiene:

$$y^2-2y\cos\frac{2K\pi}{m}+1=0 \tag{787}$$

De un modo análogo la fórmula (786) se puede descomponer en factores de la forma:

$$y^2-2y\cos\frac{(2K+1)}{m}\pi+1=0 \tag{788}$$

Las fórmulas (787) y (788) encierran todos los divisores reales de segundo grado de las ecuaciones binomias:

$$y^m-1=0, \quad y^m+1=0$$

Haciendo variar á K de 0 á $\frac{m}{2}$ ó $\frac{m-1}{2}$ para la primera, según que m sea par ó impar, y de 0 á $\frac{m}{2}-1$ ó $\frac{m-1}{2}$ para la segunda según que m sea par ó impar.

Sin embargo, debemos tener cuidado de tomar no los resultados sino la raíz cuadrada de los resultados:

$$(y-1)^2 \quad \text{é} \quad (y+1)^2$$

que originan las sustituciones:

$$K=0, \qquad K=\frac{m}{2}$$

pues ambas introducen dos factores iguales $+1$ y -1 respectivamente.

Según esto se tiene:

$$\text{Ecuación:} \quad y^m-1=0$$

Para m par:

$$y^m-1=(y-1)\left(y^2-2y\cos\frac{2\pi}{m}+1\right)\left(y^2-2y\cos\frac{4\pi}{m}+1\right)\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\left(y^2-2y\cos\frac{2(\frac{m}{2}-1)\pi}{m}+1\right)(y+1)$$

Para m impar:

$$y^m-1=(y-1)\left(y^2-2y\cos\frac{2\pi}{m}+1\right)\left(y^2-2y\cos\frac{4\pi}{m}+1\right)\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\left(y^2-2y\cos\frac{(m-1)\pi}{m}+1\right)$$

ó *simbólicamente:*

$$y^m-1=(y-1)(y+1)\prod_{K=1}^{K=\frac{m}{2}-1}\left(y^2-2y\cos\frac{2K\pi}{m}+1\right),$$

$$y^m-1=(y-1)\prod_{K=1}^{K=\frac{m-1}{2}}\left(y^2-2y\cos\frac{2K\pi}{m}+1\right)$$

$$\text{Ecuación:} \quad y^m+1=0$$

Para m par:

$$y^m+1=\left(y^2-2y\cos\frac{\pi}{m}+1\right)\left(y^2-2y\cos\frac{3\pi}{m}+1\right)\left(y^2-2y\cos\frac{5\pi}{m}+1\right)\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\left(y^2-2y\cos\frac{(m-1)\pi}{m}+1\right)$$

Para m impar:

$$y^m+1=\left(y^2-2y\cos\frac{\pi}{m}+1\right)\left(y^2-2y\cos\frac{3\pi}{m}+1\right)\left(y^2-2y\cos\frac{5\pi}{m}+1\right)\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\left(y^2-2y\cos\frac{(m-1)\pi}{m}+1\right)(y+1)$$

O *simbólicamente:*

$$y^m+1=\prod_{K=0}^{K=\frac{m}{2}-1}\left(y^2-2y\cos\frac{(2K+1)\pi}{m}+1\right),$$

$$y^m+1=(y+1)\prod_{K=0}^{K=\frac{m}{2}-1}\left(y^2-2y\cos\frac{(2K+1)\pi}{m}+1\right)$$

Careciendo de segundo término las ecuaciones binomias propuestas, la suma de las raíces es cero:

Sea la ecuación:

$$y^m-1=0$$

Si en la fórmula:

$$y=\cos\frac{2K\pi}{m}+\operatorname{sen}\frac{2K\pi}{m}.i$$

hacemos en general $K=1, 2, \ldots\ldots, m$, obtendremos las m raíces; como su suma es nula, tendremos:

$$\left(\cos\frac{2\pi}{m}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{m}.i\right)+\left(\cos\frac{4\pi}{m}+\operatorname{sen}\frac{4\pi}{m}.i\right)+\ldots\ldots+(\cos 2\pi+\operatorname{sen} 2\pi.i)=0$$

Para que esta suma sea nula, debe tenerse:

$$\cos\frac{2\pi}{m}+\cos\frac{4\pi}{m}+\cos\frac{6\pi}{m}+\ldots\ldots+\cos\frac{2(m-1)\pi}{m}+\cos 2\pi=0$$

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{m}+\operatorname{sen}\frac{4\pi}{m}+\operatorname{sen}\frac{6\pi}{m}+\ldots\ldots+\operatorname{sen}\frac{2(m-1)\pi}{m}+\operatorname{sen} 2\pi=0$$

ó *simbólicamente:*

$$\sum_{K=1}^{K=m}\cos\frac{2K\pi}{m}=0,\qquad \sum_{K=1}^{K=m}\operatorname{sen}\frac{2K\pi}{m}=0$$

lo que nos dice que: *si dividimos una circunferencia en* m *partes iguales y tomamos uno de los puntos de división por origen de los arcos, la suma de los senos y la suma de los cosenos de los arcos determinados en estas divisiones son nulas.*

La ecuación:

$$y^m+1=0$$

conduciría á las expresiones:

$$\cos\frac{\pi}{m}+\cos\frac{3\pi}{m}+\cos\frac{5\pi}{m}+\ldots\ldots+\cos\frac{(2m-1)\pi}{m}=0$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{m}+\operatorname{sen}\frac{3\pi}{m}+\operatorname{sen}\frac{5\pi}{m}+\ldots\ldots+\operatorname{sen}\frac{(2m-1)\pi}{m}=0$$

O *simbólicamente:*

$$\sum_{K=0}^{K=m-1}\operatorname{sen}\frac{(2K+1)\pi}{m}=0,\qquad \sum_{K=0}^{K=m-1}\operatorname{sen}\frac{(2K+1)\pi}{m}=0$$

lo que nos dice que: *si dividimos una circunferencia en* m *partes iguales, la suma de los senos y la de los cosenos de los arcos que principiando en uno de los puntos de división terminen en los puntos medios de los arcos de división, son iguales á cero.*

APLICACIONES.

570. I. Sea:

$$y^3-1=0$$

y vamos á resolverla por sus divisores de segundo grado.

La fórmula correspondiente conduce á:

$$y^3-1=(y-1)\left(y^2-2y\cos\frac{2\pi}{3}+1\right)=(y-1)(y^2-2y\cos 120+1)$$

$$=(y-1)(y^2+y+1)=(y-1)[y-(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1})][y-(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1})]$$

II. Sea:

$$y^3+1=0$$

se tendrá:

$$y^3+1=(y^2-2y\cos 60^\circ+1)(y+1)=(y^2-y+1)(y+1)=$$

$$=[y-(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1})][y-(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1})](y+1)$$

III. Sea:

$$y^6+1=0$$

y tendremos:

$$y^6+1=(y^2-2y\cos 30+1)(y^3-2y\cos 90+1)(y^2-2y\cos 150+1)$$

$$=(y^2-y\sqrt{3}+1)(y^2+1)(y^2+y\sqrt{3}+1)=$$

$$=\left[y-\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{-1}}{2}\right)\right]\left[y-\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{-1}}{2}\right)\right](y-\sqrt{-1})(y+\sqrt{-1})$$

$$\left[y-\left(\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{-1}}{2}\right)\right]\left[y-\left(\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{-1}}{2}\right)\right]$$

Resolución de la ecuación: $y^m-(a+b\sqrt{-1})=0$

571. La expresión:

$$a+b\sqrt{-1}$$

es de la forma:

$$a+b\sqrt{-1}=R(\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1})$$