La raíz emésima será (párrafo 265):

$$y=\sqrt[m]{a+b\sqrt{-1}}=\sqrt[m]{R(\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1})}=\sqrt[m]{R}\left(\cos\frac{\varphi+2K\pi}{m}+\operatorname{sen}\frac{\varphi+2K\pi}{m}.i\right)$$

haciendo $K=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ m-1$ se hallarán los m valores de:

$$\sqrt[m]{a+b\sqrt{-1}}$$

Ecuaciones trinomias.

572. Su resolución, basada en la de las binomias es inmediata. La forma de estas ecuaciones es:

$$y^{2n}+py^n+q=0$$

pues si y^{2n} tuviese coeficiente diverso de 1 bastaría dividir por él todos los términos de la ecuación para obtener la forma expuesta.

Si hacemos $y^n=z$ resulta:

$$z^2+pz+q=0$$

cuyas dos raíces son:

$$\theta=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},\qquad \theta'=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Si:

$$\frac{p^2}{4}>q$$

las raíces serán reales, desiguales de signos iguales.

Si:

$$\frac{p^2}{4}=q$$

las raíces serán reales, iguales y de signos iguales.

Si:

$$\frac{p^2}{4}<q$$

las raíces serán imaginarias.

Sustituyendo en la ecuación $y^n=z$ los valores θ y θ' resulta:

$$y^n-\theta=0,\quad y^n-\theta'=0$$

la resolución de estas dos ecuaciones binomias equivaldría á la de la propuesta.

APLICACIÓN.

573. Sea:

$$y^6-7y^3=45144$$

suponiendo $y^3=z$ se tiene:

$$\theta=\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}+45144}=216,\qquad \theta'=\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{49}{4}+45144}=-209,$$

Así pues:

$$y^3=216,\quad y^3=-209$$

La primera conduce á $y=\sqrt[3]{216}\,\sqrt[3]{1}$
" segunda " " $y=\sqrt[3]{209}\,\sqrt[3]{-1}$

Como se conocen las tres raíces cúbicas de $+1$ y de -1, llamándolas:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \alpha',\ \beta',\ \gamma'$$

se tendrá:

$$y=\alpha\sqrt[3]{216},\ y=\beta\sqrt[3]{216},\ y=\gamma\sqrt[3]{216},\ y=\alpha'\sqrt[3]{209},\ y=\beta'\sqrt[3]{209},\ y=\gamma'\sqrt[3]{209}$$

No faltaría sino sustituir los valores numéricos de:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \alpha',\ \beta',\ \gamma'$$

y efectuar las operaciones indicadas.

Teoremas de Côtes y de Moivre.

574. Las cuestiones que hemos tratado en el presente Capítulo basan otras muchas relativas á la división de la circunferencia en partes iguales, á los polígonos regulares convexos y estrellados, etc.; entre las obras clásicas que pueden consultarse, hay que mencionar las "*Disquisitiones Arithmeticæ*" de Gauss que ha traducido al francés Poullet-Delisle.

Tan sólo nos ocuparemos en esta obra, para finalizar este Capítulo, de dos Teoremas debidos á Côtes y á Moivre que presentan interés y son de deducción inmediata.

575. **Teorema de Côtes.** En el párrafo (569) hemos demostrado las fórmulas:

$$y^m-1=(y-1)(y+1)\prod_{K=1}^{K=\frac{m}{2}-1}\left(y^2-2y\cos\frac{2K\pi}{m}+1\right)\qquad (m\text{ par})$$

$$y^m-1=(y-1)\prod_{K=1}^{K=\frac{m-1}{2}}\left(y^2-2y\cos\frac{2K\pi}{m}+1\right)\qquad (m\text{ impar})$$

En el caso general $y^m-a=0$ tendremos que sustituir por a el valor r^m y quedará $y^m-r^m=0$, siendo r la raíz emésima de a. Así pues, sustituiremos en la primera ecuación por 1 el valor z^2, puesto que el primer miembro de la ecuación $y^m-r^m=0$ cuando m es par se resuelve en factores de segundo grado, y tendremos:

$$y^m-r^m=(y^2-r^2)\prod_{K=1}^{K=\frac{m}{2}-1}\left(y^2+r^2-2y\cos\frac{2K\pi}{m}\right)\qquad (789)$$

La segunda queda así:

$$y^m-r^m=(y-r)\prod_{K=1}^{K=\frac{m-1}{2}}\left(y^2+r^2-2y\cos\frac{2K\pi}{m}\right)\qquad (790)$$

Con un radio $=r$ y con el centro C (figura 41) se describe un círculo, se traza un diámetro B B′, se divide la circunferencia en m partes iguales comenzando por B; sobre el diámetro prolongado se lleva una magnitud $CA=y$ y se une el punto A por líneas rectas con los puntos de división de la circunferencia.

En el caso de m par como en la figura, las rectas $AB=y-r$, $AB'=y+r$ representan los factores de primer grado del binomio y^m-r^m, su producto representará el factor de segundo grado:

$$AB \times AB' = y^2 - r^2$$

Si m es impar, B′ no será punto de división, y de consiguiente, sólo la recta A B es factor de primer grado $y-r$ y corresponde á la única raíz real de $y^m-r^m=0$.

En cuanto á las otras rectas llevadas á los demás puntos de división, considerando en una y otra hipótesis por ejemplo las dos rectas iguales A M, A M′ atendiendo al triángulo A C M se tiene:

$$AM^2 = AM'.AM' = AC^2 + CM^2 - 2AC.CM \cos ACM$$

es decir:

$$AM.AM' = y^2 + r^2 - 2yr\cos\frac{2\pi}{m}$$

Análogamente:

$$AN.AN' = y^2 + r^2 - 2yr\cos\frac{4\pi}{m}, \quad \text{etc.}$$

Así pues: los productos de las rectas tiradas del punto A á los de división equidistantes de B representan los factores de segundo grado de las fórmulas (789) y (790) que corresponden á las raíces imaginarias conjugadas de $y^m-r^m=0$.

Por lo tanto, ya sea m par ya sea impar concluiremos que el binomio y^m-r^m ó sea: *la diferencia entre las potencias emésimas de dos rectas* C A *y* C B *es siempre igual al producto de todas las rectas que del punto* A *se tiren á los de división de una circunferencia descrita con el radio* CB *y dividida desde el punto* B *como origen en* m *partes iguales.*

Para la ecuación:

$$y^m + r^m = 0$$

se comenzarán las divisiones no del punto B sino de un punto que diste de él el arco $\frac{\pi}{m}$ y se concluirá: *que la suma de las potencias de dos rectas* C A *y* C B′ *es siempre igual al producto de las conducidas del punto* A *á los nuevos puntos de división de la circunferencia.*

Ambas conclusiones pueden condensarse en una: *el producto de las rectas llevadas á las divisiones pares de la circunferencia es igual á la diferencia* y^m-r^m *y el producto de las llevadas á las impares es igual á la suma* y^m+r^m.

Si $r^m=1$, el primer producto será y^m-1 y el segundo y^m+1.

576. **Teorema de Moivre.** Por el párrafo (571) y designando por r la cantidad $\sqrt[m]{R}$ se tienen para valores de las raíces de las ecuaciones:

$$y^m-(a+b\sqrt{-1})=0, \quad y^m-(a-b\sqrt{-1})=0$$

las expresiones:

$$y = r\left(\cos\frac{\varphi+2K\pi}{m} + \operatorname{sen}\frac{\varphi+2K\pi}{m}.i\right)$$

$$y = r\left(\cos\frac{\varphi+2K\pi}{m} - \operatorname{sen}\frac{\varphi+2K\pi}{m}.i\right)$$

En estas expresiones, suponiendo sucesivamente $K=0, 1, 2, \ldots\ldots, m-1$, obtendremos los valores de las m raíces de una y otra, valores que unidos juntos, cada uno de la primera con el correspondiente de la segunda, serán:

$$y=r\left(\cos\frac{\varphi}{m} \pm r\operatorname{sen}\frac{\varphi}{m}.i\right), \quad y=r\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{m} \pm \operatorname{sen}\frac{\varphi+2\pi}{m}.i\right)$$

$$y=r\left(\cos\frac{\varphi+4\pi}{m} \pm \operatorname{sen}\frac{\varphi+4\pi}{m}.i\right), \quad y=r\left(\cos\frac{\varphi+6\pi}{m} \pm \operatorname{sen}\frac{\varphi+6\pi}{m}.i\right), \quad \text{etc.}$$

Así pues, el producto de los primeros miembros de las ecuaciones:

$$y^m-(a+b\sqrt{-1})=0, \quad y^m-(a-b\sqrt{-1})=0$$

se resuelve en m factores reales de segundo grado:

$$\left(y-r\cos\frac{\varphi}{m}-r\operatorname{sen}\frac{\varphi}{m}.i\right)\left(y-r\cos\frac{\varphi}{m}+r\operatorname{sen}\frac{\varphi}{m}.i\right)=y^2+r^2-2yr\cos\frac{\varphi}{m}$$

$$\left(y-r\cos\frac{\varphi+2\pi}{m}-r\operatorname{sen}\frac{\varphi+2\pi}{m}.i\right)\left(y-r\cos\frac{\varphi+2\pi}{m}+r\operatorname{sen}\frac{\varphi+2\pi}{m}.i\right)=$$

$$=y^2+r^2-2yr\cos\frac{\varphi+2\pi}{m}$$

....

$$\left(y-r\cos\frac{\varphi+(2m-2)\pi}{m}-r\operatorname{sen}\frac{\varphi+(2m-2)\pi}{m}.i\right)\left(y-r\cos\frac{\varphi+(2m-2)\pi}{m}+r\operatorname{sen}\frac{\varphi+(2m-2)\pi}{m}.i\right)=$$

$$=y^2+r^2-2yr\cos\frac{\varphi+(2m-2)\pi}{m}.$$

y tendremos la ecuación idéntica:

$$[y^m-(a+b\sqrt{-1})][y^m-(a-b\sqrt{-1})]=\prod_{K=0}^{K=m-1}\left(y^2+r^2-2yr\cos\frac{\varphi+2K\pi}{m}.i\right)$$

Por otra parte se tiene:

$$[y^m-(a+b\sqrt{-1})]\,[y^m-(a-b\sqrt{-1})]=[y^m-r^m(\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi.i)]$$

$$[y^m-r^m(\cos\varphi-\operatorname{sen}\varphi.i)]=y^{2m}-2y^mr^m\cos\varphi+r^{2m}$$

Por consiguiente:

$$y^{2m}-2y^mr^m\cos\varphi+r^{2m}=\prod_{K=0}^{K=m-1}\left(y^2+r^2-2yr\cos\frac{\varphi+2K\pi}{m}.i\right) \qquad (791)$$

Para explicar la significación geométrica de esta fórmula: con el centro C (figura 42) y el radio r tracemos un círculo y después el diámetro B D, tomemos sobre su prolongación una magnitud $AC = y$. Comenzando en el punto B tomemos sobre la circunferencia un arco $BE = \varphi$ y otro $BM = \frac{\varphi}{m}$. Finalmente, comenzando por M dividamos la circunferencia en m partes iguales MM', $M'M''$, etc., y del punto A llevemos las rectas AM, AM', AM'', etc., á los puntos correspondientes de división así como del punto C los radios CM, CM', etc.

Los triángulos AMC, $AM'C$, $AM''C$, etc., dan las relaciones:

$$AM^2 = y^2 + r^2 - 2yr\cos\frac{\varphi}{m}$$

$$AM'^2 = y^2 + r^2 - 2yr\cos\frac{\varphi + 2\pi}{m}$$

$$AM''^2 = y^2 + r^2 - 2yr\cos\frac{\varphi + 4\pi}{m}, \text{ etc.}$$

luego la fórmula (791) se cambiará en:

$$y^{2m} - 2y^m r^m + r^{2m} = \mathop{\mathbf{P}}_{K=0}^{K=m-1}\left(y^2 + r^2 - 2yr\cos\frac{\varphi + 2K\pi}{m}.i\right) = AM^2.AM'^2.AM''^2 \ldots\ldots$$

Es decir: descrita una circunferencia con un radio r y tomada sobre la prolongación de un diámetro una magnitud $CA = y$; si del punto B se mide un arco $\frac{\varphi}{m}$ y desde la extremidad de este arco se divide la circunferencia en m partes iguales, *el producto de los cuadrados de todas las rectas conducidas de A á los puntos de división será igual al trinomio:* $y^{2m} - 2y^m r^m \cos\varphi + r^{2m}$. Si el segundo término del trinomio es positivo, vamos á averiguar qué conclusión se deduce.

Cambiemos φ en $\varphi + \pi$ en la fórmula (791) y tendremos:

$$y^{2m} + 2y^m r^m \cos\varphi + r^{2m} = \mathop{\mathbf{P}}_{K=0}^{K=m-1}\left(y^2 + r^2 - 2yr\cos\frac{\varphi + (2K+1)\pi}{m}\right) \qquad (791')$$

Consideremos la figura anterior: tomaremos un arco $\varphi + \pi = BMM_1$; partiendo del punto otro arco:

$$\frac{\varphi + \pi}{m}$$

si comenzando por la extremidad de este arco dividimos la circunferencia en m partes iguales los puntos de división serán las mitades de los arcos MM', $M'M''$, etc. Se tendrán en los triángulos ACm etc.:

$$Am^2 = y^2 + r^2 - 2yr\cos\frac{\varphi + \pi}{m}$$

$$Am'^2 = y^2 + r^2 - 2yr\cos\frac{\varphi + 3\pi}{m}, \quad \text{etc.}$$

de consiguiente:

$$y^{2m} + 2y^m r^m \cos\varphi + r^{2m} = Am^2.Am'^2.Am''^2 \ldots\ldots$$

Luego: *el producto de los cuadrados de las rectas conducidas de A á los puntos medios de los arcos que se obtienen en la división del caso anterior, será igual al trinomio:*

$$y^{2m} + 2y^m r^m \cos\varphi + r^{2m}$$

Reuniendo ambas conclusiones: *Si en la circunferencia de centro C y radio r inscribimos un polígono de 2m lados, determinando como se ha dicho los puntos A y B, el binomio:*

$$y^{2m} - 2y^m r^m \cos\varphi + r^{2m}$$

estará representado geométricamente por el cuadrado del producto de las distancias de M á los vértices de rango impar del polígono, y el trinomio:

$$y^{2m} + 2y^m r^m \cos\varphi + r^{2m}$$

estará representado por el cuadrado del producto de las distancias de M á los vértices de rango par.