TERCERA PARTE.

ADICIONES COMPLEMENTARIAS.

CAPÍTULO I.

NOCIONES SOBRE EL CÁLCULO DE LAS DIFERENCIAS.

577. Sea una serie de números:

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots,\ y_{m-1},\ y_m \tag{792}$$

Restando cada término del anterior se obtiene:

$$y_1-y_0,\ y_2-y_1,\ y_3-y_2,\ \ldots\ldots,\ y_m-y_{m-1} \tag{793}$$

los términos de (793) son las *diferencias de primer orden* de los términos de (792); así pues,

$$y_1-y_0$$

es la diferencia de y_0; y_2-y_1 la de y_1, etc., y se representan así:

$$\Delta y_0,\ \Delta y_1,\ \ldots\ldots,\ \Delta y_{m-1} \tag{794}$$

esta serie tiene un término menos que la (792).

Buscando las diferencias de primer orden de (794) que son:

$$\Delta y_1-\Delta y_0,\ \Delta y_2-\Delta y_1,\ \ldots\ldots\ldots,\ \Delta y_{m-1}-\Delta y_{m-2}$$

estas son *diferencias segundas* de los términos de (792) y se representan así:

$$\Delta^2 y_0,\ \Delta^2 y_1,\ \ldots\ldots\ldots,\ \Delta^2 y_{m-2} \tag{795}$$

esta serie tiene un término menos que la (794).

Puede pues, formarse ta tabla siguiente que sólo hemos extendido hasta las diferencias de quinto orden:

Números.	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	.
y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	.	.
y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	.	.	.
y_4	Δy_4	.	.	.	.
y_5	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

Dos términos sólo originan una diferencia primera, tres originan dos diferencias primeras y una diferencia segunda, ...; n términos originan $n-1$ diferencias primeras, $n-2$ segundas, ..., una diferencia de orden $n-1$.

578. Podemos desde luego formular las siguientes conclusiones:

1ª *Cada número de la tabla anterior es igual al que le precede verticalmente aumentado del que está escrito á la derecha de este último.*

Se tiene:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0, \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1, \quad y_3 = y_2 + \Delta y_2, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad y_m = y_{m-1} + \Delta y_{m-1}$$

Sumando y reduciendo se obtiene la fórmula fácil de traducir:

$$y_m = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \ldots\ldots\ldots + \Delta y_{m-1}$$

También puede decirse que *cada número es igual al que le sigue verticalmente menos el que está á la derecha del número considerado.*

Se tiene por ejemplo:

$$y_2 = y_3 - \Delta y_2, \quad \Delta y_2 = \Delta y_3 - \Delta^2 y_2, \quad \text{etc.}$$

II. Si se consideran series ilimitadas en ambos sentidos, tales como:

$$\ldots\ldots\ldots, \; y_{-3}, \; y_{-2}, \; y_{-1}, \; y_0, \; y_1, \; y_2, \; y_3, \; \ldots\ldots\ldots$$

las definiciones subsisten, y siendo n positivo, negativo ó nulo, se tiene en general:

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n, \quad \Delta^{p+1} y_p = \Delta^p y_{n-1} - \Delta^p y_n, \quad \text{etc.}$$

APLICACIONES.

579. I. Sean las series:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...; 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, ...;
10, 14, 21, 33, 41, 57, 63, ...

Se tendrá:

N	Δ	Δ^2
1	3	2
4	5	2
9	7	2
16	9	2
25	11	2
36	13	.
49	.	.
.	.	.
.	.	.

,

N	Δ	Δ^2	Δ^3
1	7	12	6
8	19	18	6
27	37	24	6
64	61	30	6
125	91	36	6
216	127	42	6
343	169	48	.
512	217	.	.
729	.	.	.

,

N	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6
10	4	3	2	−11	32	−83
14	7	5	−9	21	−51	.
21	12	−4	12	−30	.	.
33	8	8	−18	.	.	.
41	16	−10	.	.	.	.
57	6	.	.	.	.	.
63	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.

La primera serie es la de los cuadrados, de Δ^3, en adelante las diferencias son nulas.
La segunda serie es la de los cubos, de Δ^4 en adelante las diferencias son nulas.

Fórmulas simbólicas.

580. *Dados los* $m+1$ *números:* u_0, u_1, u_2, ..., u_m es decir, la primera columna de la tabla general (párrafo 577), *encontrar la expresión general de una diferencia de orden cualquiera relativa á* u_0: $\Delta^n u_0$ *en función de dichos números.* En otras palabras, dada la serie de la primera columna hallar un término cualquiera de la primera línea:

Se tiene:

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0, \quad \Delta u_1 = u_2 - u_1, \quad \Delta u_2 = u_3 - u_2, \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0 = u_2 - 2u_1 + u_0, \quad \Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1 = u_3 - 2u_2 + u_1, \quad \ldots\ldots$$

$$\Delta^3 u_0 = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0 = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0, \quad \ldots\ldots\ldots$$

Los coeficientes de u en los segundos miembros son los del desarrollo de las potencias de un binomio $x-a$, correlativas al índice de Δ; se ve que $\Delta^2 u_0$ origina los coeficientes del cuadrado, $\Delta^3 u_0$ los del cubo, etc. Vamos á demostrar que esta ley es general, es decir, que si es cierta para $\Delta^p u_0$ subsiste para $\Delta^{p+1} u_0$, porque entonces si es cierta para $\Delta^2 u_0$ lo será para $\Delta^3 u_0$, y si es cierta para $\Delta^3 u_0$ lo será para $\Delta^4 u_0$, etc., etc.

Sea pues:

$$\Delta^p u_0 = u_p - C_1^p u_{p-1} + C_2^p u_{p-2} - \ldots\ldots \mp C_{n-1}^p u_{p-n+1} \pm C_n^p u_{p-n} \mp \ldots\ldots\ldots \pm u_0$$

Pues que esta relación es aplicable á una serie de $p+1$ números:

$$u_0, \; u_1, \; u_2, \; \ldots\ldots, \; u_p$$

lo será á la serie:

$$u_1, \; u_2, \; \ldots\ldots, \; u_{p+1}$$

que tiene $p+1$ términos. Aumentando en la fórmula anterior una unidad á cada índice de u_0, pues u_1 ha pasado á ser ahora primer término, resulta:

$$\Delta^p u_1 = u_{p+1} - C_1^p u_p + C_2^p u_{p-1} - \ldots\ldots \pm C_n^p u_{p-n+1} \mp \ldots\ldots \pm u_1$$

Pero se tiene por definición:

$$\Delta^{p+1}u_0 = \Delta^p u_1 - \Delta^p u_0$$

De consiguiente:

$$\Delta^{p+1}u_0 = u_{p+1} \begin{array}{r|r|r|l} - C_1^p & u_p + C_2^p & u_{p-1} - \ldots\ldots \pm C_n^p & u_{p-n+1} \mp \ldots\ldots \mp u_0 \\ -1 & + C_1^p & \pm C_{n-1}^p & \end{array}$$

además, según el Capítulo IV, Primera Parte, se tiene:

$$C_n^{p+1} = C_n^p + C_{n-1}^p$$

Así pues:

$$\Delta^{p+1}u_0 = u_{p+1} - C_1^{p+1}u_p + C_2^{p+1}u_{p-1} - \ldots\ldots \pm C_n^{p+1}u_{p-n+1} \mp \ldots\ldots \mp u_0$$

que es lo que se trataba de demostrar:
Así pues, en general:

$$\Delta^n u_0 = u_n - C_1^n u_{n-1} + C_2^n u_{n-2} - \ldots\ldots \pm u_0$$

ó bien:

$$\Delta^n u_0 = u_n - \frac{n}{1}u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}u_{n-2} - \ldots\ldots \pm u_0$$

que *simbólicamente* puede escribirse:

$$\Delta^n u_0 = (u-1)^n$$

conviniendo en reemplazar en el desarrollo del segundo miembro los exponentes de u por índices correspondientes y el último término 1 por u_0.
Sean los términos:

$$u_0=10,\ u_1=14,\ u_2=21,\ u_3=33,\ u_4=41,\ u_5=57,\ u_6=63$$

calcular $\Delta^5 u_0 = \Delta^5 10$. Se tiene:

$$\Delta^5 10 = (u-1)^5 = u_5 - 5u_4 + 10u_3 - 10u_2 + 5u - u_0 = 32$$

como se ve en efecto en el párrafo 579.

581. *Dado* u_0 *y sus* m *diferencias sucesivas:* Δu_0, $\Delta^2 u_0$, ..., $\Delta^m u_0$, (es decir, la primera línea horizontal de la tabla) *encontrar la expresión general de uno cualquiera de los* m + 1 *números correspondientes, el número* u_n *por ejemplo.*
Se tiene por definición:

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0,\ \Delta u_1 = \Delta u_0 + \Delta^2 u_0,\ \Delta^2 u_1 = \Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0,\ \ldots\ldots\ldots$$

$$u_2 = u_1 + \Delta u_1 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0,\ \Delta u_2 = \Delta u_1 + \Delta^2 u_1,\ \ldots\ldots\ldots$$

$$u_3 = u_2 + \Delta u_2 = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0,\ \ldots\ldots\ldots$$

Como antes, demostraremos que si para u_p es cierta la ley que se descubre por las anteriores igualdades, lo será para u_{p+1}.
Se tiene:

$$u_p = u_0 + C_1^p \Delta u_0 + C_2^p \Delta^2 u_0 + \ldots\ldots + C_{n-1}^p \Delta^{n-1} u_0 + C_n^p \Delta^n u_0 + \ldots\ldots + \Delta^p u_0$$

Pues que esta fórmula es aplicable á la serie:

$$u_0,\ \Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ \ldots\ldots,\ \Delta^p u_0$$

lo será á la serie:

$$\Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ \Delta^3 u_0,\ \ldots\ldots,\ \Delta^{p+1} u_0$$

Así pues:

$$\Delta u_p = \Delta u_0 + C_1^p \Delta^2 u_0 + C_2^p \Delta^3 u_0 + \ldots\ldots + C_{n-1}^p \Delta^n u_0 + \ldots\ldots + \Delta^{p+1} u_0$$

Pero por definición:

$$u_{p+1} = u_p + \Delta u_p$$

luego:

$$u_{p+1} = u_0 \begin{array}{r|r|r|l} + C_1^p & \Delta u_0 + C_2^p & \Delta^2 u_0 + \ldots\ldots + C_n^p & \Delta^n u_0 + \ldots\ldots + \Delta^{p+1} u_0 \\ +1 & + C_1^p & + C_{n-1}^p & \end{array}$$

ó bien:

$$u_{p+1} = u_0 + C_1^{p+1} \Delta u_0 + C_2^{p+1} \Delta^2 u_0 + \ldots\ldots + C_n^{p+1} \Delta^n u_0 + \ldots\ldots + \Delta^{p+1} u_0$$

Así pues:

$$u_n = u_0 + \frac{n}{1}\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 u_0 + \ldots\ldots + \Delta^n u_0$$

ó *simbólicamente:*

$$u_n = (1+\Delta)^n u_0$$

Sea:

$$u_0=10,\ \Delta u_0=4,\ \Delta^2 u_0=3,\ \Delta^3 u_0=2,\ \Delta^4 u_0=-11,\ \Delta^5 u_0=32$$

así pues:

$$u_5 = 10 + 5.4 + 10.3 + 10.2 + 5(-11) + 32 = 57$$

Vemos que presentan gran analogía las diferencias con las potencias.

582. También presenta el *cálculo de las diferencias* gran analogía con el *cálculo diferencial.* Nos conformaremos con referirnos á algunos principios únicamente.

I. *La diferencia de una suma algebraica es igual á la suma algebraica de las diferencias de los sumandos.*
Se tiene, siendo x, y, z cantidades variables:

$$\Delta(x_0+y_0+z_0) = (x+y+z) - (x_0+y_0+z_0) = (x-x_0) + (y-y_0) + (z-z_0)$$
$$= \Delta x_0 + \Delta y_0 + \Delta z_0$$

II. *La diferencia de la suma de una cantidad y una variable será igual á la diferencia de la variable.* Se tiene:

$$\Delta(a+x) = \Delta x$$

pues a es constante.

III. *La diferencia del producto de una constante por una variable, será igual á la constante por la diferencia de la variable.*
Así pues:

$$\Delta(ax_0) = ax_1 - ax_0 = a(x_1 - x_0) = a\Delta x_0$$

Es inútil enunciar otros principios que el lector puede por sí solo descubrir.

Diferencias de las funciones.

583. Sea una función cualquiera de x, $y=f(x)$. Si designamos por h el incremento que damos á la variable x para pasar de la magnitud x á la $x+h$ tendremos:

$$\Delta y=\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$$

esta expresión es la *diferencia primera de* $f(x)$.
Si en $\Delta f(x)$ se cambia x en $x+h$ resulta:

$$\Delta^2 y=\Delta^2 f(x)=\Delta[f(x+h)-f(x)]=\Delta f(x+h)-\Delta f(x)$$

que es la *diferencia segunda* de $f(x)$.
Finalmente la expresión:

$$\Delta^{n+1} y=\Delta^n f(x+h)-\Delta^n f(x)$$

será la *diferencia de orden* $n+1$.
Sea por ejemplo $y=a^x$:
La diferencia primera será:

$$\Delta y=a^{x+h}-a^x=a^x(a^h-1)$$

La diferencia segunda será:

$$\Delta^2 y=a^x(a^h-1)^2$$

La diferencia tercera será:

$$\Delta^3 y=a^x(a^h-1)^3$$

....

La diferencia enésima será:

$$\Delta^n y=a^x(a^h-1)^n$$

Sea por ejemplo $y=\log x$.
La diferencia primera será:

$$\Delta y=\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

La diferencia segunda será:

$$\Delta^2 y=\log\left(1+\frac{2h}{x}\right)-2\log\left(1+\frac{h}{x}\right) \text{ (1)}$$

(1) Este valor resulta así:

$$\Delta^2 y=\Delta[\log(x+h)-\log x]=\Delta\log(x+h)-\Delta\log x=\log(x+2h)-\log(x+h)-[\log(x+h)-\log x]$$
$$=\log(x+2h)-2\log(x+h)+\log x=\log(x+2h)-\log x-2[\log(x+h)-\log x]=$$
$$=\log\left(1+\frac{2h}{x}\right)-2\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

La expresión $\Delta^3 y$ resulta análogamente.

La diferencia tercera será:

$$\Delta^3 y=\log\left(1+\frac{3h}{x}\right)-3\log\left(1+\frac{2h}{x}\right)+3\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

....

La diferencia enésima será:

$$\Delta^n y=\log\left(1+\frac{nh}{x}\right)-n\log\left(1+\frac{(n-1)h}{x}\right)+\ldots\ldots-(-1)^n n\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

Diferencias de las funciones enteras.

584. Sea la función entera de x:

$$y=f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots\ldots+A_{m-1}x+A_m$$

Si representamos por h una constante, tomamos la cantidad x_0 arbitrariamente y le damos á x los valores en progresión aritmética:

$$\ldots\ldots,\ x_0-2h,\ x_0-h,\ x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h,\ \ldots\ldots \qquad (796)$$

Los valores correlativos de y podemos representarlos por:

$$y_{-2},\ y_{-1},\ y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots$$

Tendremos en términos generales (párrafo 583):

$$\left.\begin{aligned}
y&=f(x)\\
\Delta\ y&=f(x+h)-f(x)\\
\Delta^2 y&=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)\\
\Delta^3 y&=f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)
\end{aligned}\right\} \qquad (797)$$

....

Si sustituimos en estas relaciones por x los valores (796) obtendremos los valores sucesivos de la función y de sus diferencias de diversos órdenes.
Ahora bien, vamos á demostrar que:
Cuando en una función entera de x *de grado* m *y de la forma:*

$$y=f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots\ldots+A_{m-1}x+A_m$$

se sustituyen números en progresión aritmética, la diferencia de orden m *de la función es una cantidad constante que se puede deducir inmediatamente de la función propuesta.*
Aplicando á la segunda igualdad (797) la fórmula de Taylor se tiene la expresión:

$$\Delta y=f(x+h)-f(x)=\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots\ldots\ldots+\frac{h^m}{1.2.3\ldots\ldots m}f^m(x)$$
$$=mA_0hx^{m-1}+\ldots\ldots\ldots$$

Así pues, Δy es un polinomio entero del grado $m-1$ cuyo primer término se forma