multiplicando la derivada del primer término de la función por la razón $h$ de la progresión aritmética que forman los valores dados á $x$.

Como $\Delta^2 y$ se deduce de $\Delta y$ como $\Delta y$ se dedujo de $y$ se podrá escribir inmediatamente:

$$\Delta^2 y = m(m-1)A_0 h^2 x^{m-2} + \dots\dots\dots$$

Análogamente:

$$\Delta^3 y = m(m-1)(m-2)A_0 h^3 x^{m-3} + \dots\dots\dots$$

Si se prosigue la operación para formar la diferencia $\Delta^m y$, se habrá tenido que formar el producto $m(m-1)(m-2)\dots\dots 3.2.1$ pues se habrán ido rebajando á $m$: 1 unidad, 2 unidades, 3 unidades, ..., $m-2$ unidades, obteniéndose $m-(m-2)=2$, y $m-1$ unidades, obteniéndose $m-(m-1)=1$, es decir, resultando:

$$m(m-1)(m-2)\dots\dots\dots 3.2.1$$

Después de este coeficiente se escribirá $A_0$ que es invariable; á continuación $h^m$, pues á cada diferencia crece una unidad el exponente de $h$; finalmente, habría que poner $x^{m-m}$, pues á cada diferencia decrece una unidad el exponente de $x$, pero:

$$x^{m-m} = x^0 = 1$$

luego se tendrá:

$$\Delta^m y = m(m-1)(m-2, \dots\dots\dots 3.2.1\,A_0 h^m$$

cantidad constante que puede formarse directamente y desde luego deduciéndola de la función propuesta.

Las diferencias de orden superior á $\Delta^m y$:

$$\Delta^{m+1} y,\ \Delta^{m-2} y,\ \dots\dots\dots$$

son *nulas* evidentemente, puesto que en $\Delta^m y$ no entran sino constantes, y la derivada de una constante es nula.

585. Del teorema anterior resulta una aplicación práctica utilísima. Si se tienen que sustituir en un polinomio de la forma del considerado valores de $x$ en progresión aritmética:

$$\dots\dots\dots,\ x_0-2h,\ x_0-h,\ x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h,\ \dots\dots\dots$$

para deducir los correlativos de $y$:

$$\dots\dots\dots,\ y_{-2},\ y_{-1},\ y_0,\ y_1,\ y_2,\ \dots\dots\dots$$

basta calcular directamente los resultados de la sustitución de $m$ valores consecutivos de $x$, para conocer en seguida por simples adiciones los resultados á que conducirían las sustituciones de los demás valores.

En efecto, conociendo $m$ valores de $y$, se conocen $m-1$ de $\Delta y$, $m-2$ de $\Delta^2 y \dots\dots$, uno solo de $\Delta^{m-1} y$, y se conoce además la diferencia $\Delta^m y$ deducida directa é inmediatamente de la función. Como la diferencia $\Delta^m y$ es constante y tiene cierto valor, con él se puede llenar la columna marcada $\Delta^m$. Conociendo la columna $\Delta^m$ y un valor de la $\Delta^{m-1}$, por simples sumas y restas se podrá llenar la columna $\Delta^{m-1}$, de consiguiente se podrán ir llenando todas hasta llegar á la que da los valores todos de $y$.



Este procedimiento de formar cuadros numéricos tiene gran aplicación en todas las ramas de la ciencia matemática, en Astronomía, en Mecánica Aplicada, en Meteorología, en Física, en Hidráulica, en Ingeniería, etc. Tales cuadros numéricos pueden traducirse después por curvas que vienen entonces á ser diagramas propiamente, relativos á la ley de variacion del fenómeno correspondiente.

## APLICACIONES.

586. I. **Cuadrados y cubos de los números enteros.** La función es: $y=x^2$; por $x$ deben ponerse los números 1, 2, 3, 4, ......, y la razón $h$ valdrá 1. La diferencia segunda es constante é igual á 2:

$$m(m-1)\dots\dots\dots 3.2.1 A_0 h^m = 2$$

Así pues, se llenará la columna N con los números 1 y 4, pues basta conocer (párrafo 585) $m$ sustituciones, y en este caso $m=2$, en la columna $\Delta$ se pondrá la diferencia $4-1=3$ y en la columna $\Delta^2$ se pondrá 2.

Para fijar las ideas, nos referiremos al cuadro primero del párrafo 579, en el que supondremos que en la columna N sólo están escritos los números 1 y 4, en la $\Delta$ sólo el número 3, y en la $\Delta^2$ los números 2. Para continuar el cuadro se tiene:

$$\Delta^2 y_0 + \Delta y_0 = \Delta y_1$$

es decir, $2+3=5$ se escribirá 5 abajo de 3; $\Delta y_1 + y_1 = y_2$, es decir, $5+4=9$ y se escribirá 9 abajo de 4; $\Delta^2 y_1 + \Delta y_1 = \Delta y_2$, es decir, $2+5=7$ y se escribirá 7 debajo de 5; $\Delta y_2 + y_2 = y_3$, es decir, $7+9=16$ que se escribirá abajo de 9, etc.

La serie de cubos se formará análogamente.

II. **Suma de los cuadrados de los números enteros.** Los términos con que hay que llenar la columna N son:

$$0^2,\ 0^2+1^2,\ 0^2+1^2+2^2,\ 0^2+1^2+2^2+3^2,\ \dots\dots\dots$$

las diferencias primeras son:

$$1^2,\ \ 2^2,\ \ 3^2,\ \dots\dots\dots$$

es decir, 1, 4, 9, ......, ó sea la serie de los cuadrados de los números enteros. Así pues, los números que llenen la columna $\Delta^2$ serán los que llenan la $\Delta$ en el caso de tratarse de los cuadrados de los números enteros.

III. Entre las aplicaciones más conspicuas de la teoría de que actualmente nos ocupamos, hay que mencionar la determinación del término general de una serie dada. Sea, por ejemplo, la serie de la suma de los cuadrados de los $n$ primeros números.

Para dicha serie, las diferencias terceras $\Delta^3$ son constantes é iguales á 2 y como se conoce $y_0$ y sus $n=3$ diferencias sucesivas se tendrá:

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0$$

es decir:

$$y_n = n + \frac{3n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

como ya sabíamos.

Análogamente puede calcularse la suma de los cubos, terceras, ......, potencias.

IV. Cuál es el término general de la serie: 5, 9, 15, 23, 33, ....... Si formamos el cuadro respectivo vemos que las diferencias segundas son constantes é iguales á 2, y que de las $\Delta^3$ en adelante las diferencias son nulas; así pues, se tendrá para término general de la serie propuesta:

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 = 5 + n(3+n)$$

Suponiendo $n=0$, 1, 2, ......, se obtienen $y_0$, $y_1$, $y_2$, ......, es decir, los términos de la serie.

V. Sea la serie:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, .........

Su término general es:

$$y_n = 1 + \frac{n(3+n)}{2}$$

VI. Sea la serie:

1, 4, 9, 16, 25, .........

Su término general es:

$$y_n = (n+1)^2$$

VII. Cuál es el término general de la serie:

$$0^2,\quad 0^2+1^2,\quad 0^2+1^2+3^2,\quad 0^2+1^2+3^2+5^2,\quad \ldots\ldots\ldots$$

Debe hallarse:

$$y_n = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

Estas fórmulas y las análogas son de gran utilidad para el cálculo de los "Puentes Suspendidos;" entre los autores que más detalladamente se ocupan de la cuestión dando la importancia debida á el rigor en los procedimientos analíticos hay que citar á DEBAUVE (1), DEMANET (2), DE VOS (3).

El "*Cálculo de las Diferencias*" tiene inmensas aplicaciones, en el presente Capítulo sólo nos ocuparemos de dos: la Resolución de las Ecuaciones Numéricas y la Construcción de Tablas Numéricas. En el siguiente nos ocuparemos de la "Interpolación," en la que también interviene; y al estudiar las "Ecuaciones Trascendentes" veremos que á éstas también se aplica.

## Resolución de las Ecuaciones Numéricas.

587. Serán muy breves las consideraciones teóricas preliminares que hagamos de la manera como se resuelven las ecuaciones numéricas por medio de las diferencias, un ejemplo desarrollado suplirá lo conciso de dichas consideraciones.

Una ecuación $y=f(x)$ de grado $m$ tiene constante su diferencia *emésima* é inmediatamente calculable, pues vale $1.2.3 \ldots\ldots m A_0 h^m$ siendo $A_0$ el coeficiente de $x^m$ y $h$ la razón de la progresión que forman los valores sustitudos por $x$ (párrafo 584).

(1) A. DEBAUVE. "*Manuel de l'Ingénieur de Ponts et chaussées.*" XI fascículo.
(2) DEMANET. *Cours de Construction.* T. II.
(3) DE VOS. *Cours de Construction.* T. II.



En términos particulares, una ecuación de tercer grado tiene su diferencia tercera constante y fácil de calcularse desde luego; si pues se conoce una diferencia segunda, dos primeras, y para ello tres valores de $f(x)$, es decir, tres valores de $x$, se podrá prolongar el cuadro en ambos sentidos (párrafo 595) y conocer qué valores tomaría $f(x)$ para otros de $x$.

Una ecuación de cuarto grado tiene constante su diferencia cuarta, basta, pues, conocer cuatro valores de $f(x)$ correspondientes á cuatro sustituidos por $x$ para prolongar el cuadro en ambos sentidos. Resulta desde luego que se conocen los valores de $f(x)$ para el número que se quiera de valores de $x$ sin haber efectuado la laboriosa y monótona operación mecánica de sustituir en dicha función $f(x)$, una serie de valores atribuídos á $x$.

Los cambios de signos de las sustituciones darán indicios sobre las raíces y éstas estarán *separadas*. Cuando el no haber número suficiente de cambios de signo obliga á estrechar más las sustituciones, en los ejemplos numéricos, explicaremos cómo se estrechan las sustituciones y cómo se puede servir el calculador de diagramas gráficos para lograr dicho objeto. En una palabra, las raíces podrán ser separadas y calculadas por aproximación.

588. **Ecuaciones de tercer grado.** Antes de tomar un ejemplo entraremos en algunas convenientes consideraciones referentes al tercer grado.

Si la ecuación propuesta es de tercer grado, se tiene:

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x) = \varphi(x)$$

$$\Delta^2 y = \Delta^2 f(x) = \Delta\varphi(x) = \frac{h}{1}\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x) \tag{798}$$

Pero:

$$\varphi'(x) = \frac{h}{1}f''(x) + \frac{h^2}{1.2}f'''(x),\quad \varphi''(x) = \frac{h}{1}f'''(x)$$

luego:

$$\Delta^2 y = \Delta^2 f(x) = h^2 f''(x) + h^3 f'''(x) = \psi(x)$$

$$\Delta^3 y = \Delta^3 f(x) = \Delta\psi(x) = h\psi'(x) = h^3 f'''(x)$$

En resúmen:

$$\Delta y = \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x),\quad \Delta^2 y = h^2 f''(x) + h^3 f'''(x),\quad \Delta^3 y = h^3 f'''(x)$$

Como estas son fórmulas generales subsistirán cuando $\Delta$ sea diez veces menor. Llamando $\delta$ á $\frac{\Delta}{10}$ y poniendo por $h$, $\frac{h}{10}$:

$$\delta y = \frac{h}{10}f'(x) + \frac{h^2}{200}f''(x) + \frac{h^3}{6000}f'''(x),\quad \delta^2 y = \frac{h^2}{100}f''(x) + \frac{h^3}{1000}f'''(x),$$

$$\delta^3 y = \frac{h^3}{1000}f'''(x)$$

Por la inspección de estas formulas se ve que conociendo los valores de las diferencias $\Delta$ se pueden formar $\delta^3 y$, $\delta^2 y$ y $\delta y$, pues: 1º $\delta^3 y$ es la milésima parte de $\Delta^3 y$. 2º $\delta^2 y$ se compone de dos partes: una que es justamente $\delta^3 y$, y otra que es:

$$\frac{h^2}{100} f''(x) = \frac{1}{100}\left[\Delta^2 y - h^3 f'''(x)\right] = \frac{1}{100}(\Delta^2 y - \Delta^3 y)$$

es decir, la centésima parte de la diferencia $\Delta^2 y - \Delta^3 y$, diferencia que, como $\Delta^3 y$ es constante, es la que queda colocada antecediendo á $\Delta^2 y$ en la columna $\Delta^2$.

3º $\delta y$ se compone de tres partes, una:

$$\frac{h^3}{6000} f'''(x)$$

que es la sexta parte de $\delta^3 y$, otra:

$$\frac{h^2}{200} f''(x)$$

que es la mitad de:

$$\frac{h^2}{100} f''(x)$$

que formó parte de $\delta^2 y$, y otra: $\frac{h}{10} f'(x)$ que es la décima parte de $hf'(x)$ que vale:

$$hf'(x) = \Delta y - \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x)$$

En resumen, designando por $y_0$ el valor de la función $f(x)$ que sirve de punto de partida y por $y_{-1}$ el valor que le precede verticalmente en la Tabla formada correspondiente al símbolo $\Delta$ se tendrá:

$$\delta y_0 = \frac{\Delta^3 y_0}{6000} + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{200} + \frac{1}{10}\left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{6}\right), \quad \delta^2 y_0 = \frac{\Delta^3 y_0}{1000} + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{100},$$

$$\delta^3 y_0 = \frac{\Delta^3 y_0}{1000}$$

Estas fórmulas permiten pasar de las diferencias $\Delta$ correspondientes á un valor cualquiera de la razón $h$ á las diferencias $\delta$ que corresponden á uno diez veces menor.

## APLICACIÓN.

589. I. Sea la ecuación:

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

Si sustituimos por $x$ los valores $-1$, $0$, $+1$, el primer miembro se cambia en 13, 7, 1; así pues, las diferencias primeras son $-6$, las segundas 0 y las terceras son 6 (párrafo 584):

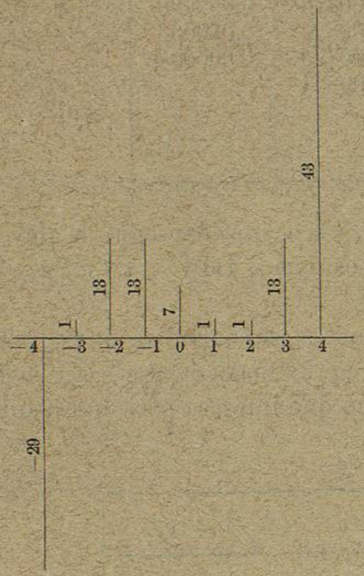
| $x$ | $y$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3$ |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 13 | $-6$ | 0 | 6 |
| 0 | 7 | $-6$ | | 6 |
| 1 | 1 | | | 6 |
| | | | | 6 |
| | | | | 6 |
| | | | | 6 |



Completando el cuadro:

| $x$ | $y$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ |
|---|---|---|---|---|
| $-4$ | $-29$ | 30 | $-18$ | 6 |
| $-3$ | 1 | 12 | $-12$ | 6 |
| $-2$ | 13 | 0 | $-6$ | 6 |
| $-1$ | 13 | $-6$ | 0 | 6 |
| 0 | 7 | $-6$ | 6 | 6 |
| 1 | 1 | 0 | 12 | 6 |
| 2 | 1 | 12 | 18 | |
| 3 | 13 | 30 | | |
| 4 | 43 | | | |
| 5 | | | | |

De acuerdo con los valores de $y$ hay una raíz negativa comprendida entre $-3$ y $-4$ y como la regla de DESCARTES expresa que sólo existe una; es inútil buscar otras raíces negativas; positivas puede haber dos, pero es preciso cerrar la amplitud de las sustituciones para hallarlas.




Los resultados hasta ahora obtenidos dan lugar á la figura adjunta. La curva que une estos puntos, no pudiendo ser cortada sino en 3 puntos, por una paralela al eje de las $x$, á este eje no puede cortarlo sino entre los puntos 1 y 2; así pues, entre $x=1$ y $x=2$ debemos sustituir valores que disten 0.1. Para $x=1$ se tiene $y=1$; además, para crecimientos de $x$ iguales á una unidad, se tiene:

$$\Delta y = 0, \quad \Delta^2 y = 12, \quad \Delta^3 y = 6$$

siendo $\frac{1}{10}$ el crecimiento se tendrá:

$$\delta^3 y = 0.006, \quad \delta^2 y = 0.066, \quad \delta y = -0.369$$

y por medio de estos valores podremos formar la siguiente tabla:

| $x$ | $y$ | $\delta y$ | $\delta^2 y$ | $\delta^3 y$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $-0.369$ | 0.066 | 0.006 |
| 1.1 | 0.631 | $-0.303$ | 0.072 | 0.006 |
| 1.2 | 0.328 | $-0.231$ | 0.078 | 0.006 |
| 1.3 | 0.097 | $-0.153$ | 0.084 | 0.006 |
| 1.4 | $-0.056$ | $-0.069$ | 0.090 | 0.006 |
| 1.5 | $-0.125$ | 0.021 | 0.096 | 0.006 |
| 1.6 | $-0.104$ | 0.117 | 0.102 | 0.006 |
| 1.7 | $+0.013$ | 0.219 | 0.108 | 0.006 |
| 1.8 | 0.232 | 0.327 | 0.114 | |
| 1.9 | 0.559 | 0.441 | | |
| 2 | 1 | | | |

Esta tabla muestra que $y$ cambia de signo cuando $x$ pasa de 1.3 á 1.4 y de 1.6 á 1.7; así pues, á $\frac{1}{10}$ de aproximación las raíces valdrán 1.3 y 1.6.

Para obtener las raíces á $0.01 = \frac{1}{100}$ se tiene para la raíz $> 1.3$ y $< 1.4$:

$$x = 1.3,\ y = 0.097,\ \Delta y = -0.153,\ \Delta^2 y = 0.084,\ \Delta^3 y = 0.006$$

Aplicando las fórmulas conocidas:

$$\delta^3 y = 0.000006\ \ \delta^2 y = 0.000786,\ \delta y = 0{,}018909$$

Así pues, se podrá formar la tabla:

| $x$ | $y$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ |
|---|---|---|---|---|
| 1.3 | 0.097000 | −0.018909 | 0.000786 | 0.000006 |
| 1.31 | 0.078091 | −0.018123 | 0.000792 | 0.000006 |
| 1.32 | 0.059968 | −0.017331 | 0.000798 | 0.000006 |
| 1.33 | 0.042637 | −0.016533 | 0.000804 | 0.000006 |
| 1.34 | 0.026104 | −0.015729 | 0.000810 | 0.000006 |
| 1.35 | 0.010375 | −0.014919 | 0.000816 | 0.000006 |
| 1.36 | −0.004544 | −0.014103 | 0.000822 | 0.000006 |
| 1.37 | −0.018647 | −0.013281 | 0.000828 | 0.000006 |
| 1.38 | −0.031928 | −0.012453 | 0.000834 | |
| 1.39 | −0.044381 | −0.011619 | | |
| 1.4 | −0.056000 | | | |

Se aplicaría el procedimiento á la raíz $> 1.6$ y $< 1.7$, y si se quisiera seguir la aproximación á $\frac{1}{1000}$ se procedería análogamente; la raíz positiva $> 1.6$ y $< 1.7$ á $\frac{1}{1000}$ de aproximación tiene por valor: 1.692.

La raíz puede obtenerse por aproximación de este modo: supongamos que se trata de la $> 1.6$ y $< 1.7$ y se ha formado la tabla que la da aproximada á $\frac{1}{1000}$. En dicha tabla que el lector formará y de la que damos la fracción que interesa para nuestro razonamiento, las diferencias segundas son muy pequeñas:

| $x$ | $y$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ |
|---|---|---|---|---|
| 1.69 | −0.003191000 | 0.001573371 | 0.000010146 | 0.000000006 |
| 1.691 | −0.001617629 | 0.001583517 | 0.000010152 | 0.000000006 |
| 1.692 | −0.000034112 | 0.001593669 | 0.000010158 | 0.000000006 |
| 1.693 | +0.001559557 | 0.001603827 | 0.000010164 | 0.000000006 |
| 1.694 | 0.003163384 | 0.001613991 | 0.000010170 | 0.000000006 |

Puede hacerse un razonamiento análogo al de las tablas de logaritmos. Considerando que dichas diferencias son nulas ó que los valores de $y$ son proporcionales á los de $x$. Cuando $x$ aumenta 0.001 y pasa de 1.692 á 1.693 la variación de $y$ es: 0.001593669, para que la variación de $y$ sea 0.000034112, es decir, que $y$ sea 0, la variación $\delta$ de $x$ debe satisfacer la relación:

$$\frac{\delta}{0.001} = \frac{0.000034112}{0.001593669} \quad \text{de donde} \quad \delta = 0.0000214$$

Así pues, $x$ valdrá 1.6920214, pero como la diferencia segunda no es rigurosamente nula sino un poco mayor que 0.00001, puede influir sobre la sétima cifra decimal; así pues, la raíz será 1.692021.



II. Analizar la ecuación:

$$y = 9x^3 - 24x^2 + 16x - 0.001 = 0$$

Debe hallarse que á $\frac{1}{100}$ de aproximación una raíz es $> 1.32$ y $< 1.33$; y la otra:

$$> 1.34 \text{ y } < 1.35$$

## Construcción de Tablas Numéricas.

590. La consideración de las diferencias es muy útil para la construcción de Tablas numéricas de cualquiera clase. En efecto, en una serie de números muy próximos y cuya formación está sujeta á una ley regular las diferencias tienden á ser iguales á medida que su orden es más grande. Llegando á cantidades muy pequeñas se podrá, partiendo de cierto orden, suponerles en un cierto intervalo un valor invariable y construir la tabla como si se tratase de los valores de un polinomio. Aclararemos esta explicación con un ejemplo conocido.

591. I. Sea:

$$y = \log x$$

De acuerdo con el párrafo 583 y con el Cap. VII de la Primera Parte, tendremos:

$$\Delta y = \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \mathrm{M}\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \ldots\ldots\right) = \log e\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3}\right) - \ldots\ldots$$

$$\Delta^2 y = \log\left(1 + \frac{2h}{x}\right) - 2\log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = -\mathrm{M}\left(\frac{h^2}{x^2} - \frac{2h^3}{x^3} + \ldots\ldots\right) =$$

$$= -\log e\left(\frac{h^2}{x^2} - \frac{2h^3}{x^3} + \ldots\ldots\right)$$

$$\Delta^3 y = \log\left(1 + \frac{3h}{x}\right) - 3\log\left(1 + \frac{2h}{x}\right) + 3\log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \mathrm{M}\left(\frac{2h^3}{x^3} - \ldots\ldots\right) =$$

$$= \log e\left(\frac{2h^3}{x^3} - \ldots\ldots\right)$$

Pero se tiene para el módulo relativo M:

$$\mathrm{M} = \log e = 0.434294481903251\ \ldots\ldots$$

Si se toma por punto de partida $x = 10000$ y $h = 1$ resulta:

$$\Delta y = \mathrm{M}\left(\frac{1}{10^4} - \frac{1}{2.10^8} + \frac{1}{3.10^{12}} - \ldots\ldots\right) = 0.000043427276863$$

$$\Delta^2 y = \mathrm{M}\left(\frac{1}{10^8} - \frac{2}{10^{12}} + \ldots\ldots\right) = 0.000000004342076$$

$$\Delta^3 y = \mathrm{M}\left(\frac{2}{10^{12}} - \ldots\ldots\right) = 0.000000000000868$$