Si sólo se quisieran los logaritmos con 10 cifras decimales se podrían despreciar en un largo intervalo las diferencias de cuarto órden procediendo como si las diferencias de tercera fuesen invariables. Se formarán, por consiguiente, las columnas de las diferencias terceras, segundas, primeras como ya se sabe, y así se deducirían los logaritmos de los números 10001, 10002, 10003, ..., contenidos en la primera columna partiendo del de 10000 que es 4. Es preciso verificar los resultados, calculando directamente algunos logaritmos de distancia en distancia. Cuando no hay desacuerdo hasta las 10 primeras cifras entre el logaritmo dado por la tabla y el calculado directamente se proseguirá de un modo análogo; cuando hay desacuerdo en la décima cifra es preciso modificar el punto de partida; se calcularán, pues, las diferencias:

$$\Delta y, \quad \Delta^2 y, \quad \Delta^3 y$$

relativas al último número en el que ha sido conveniente detenerse y se procederá con estos nuevos valores como con los primeros.

II. Calcular con 7 decimales exactas, una tabla de logaritmos de senos de 10 en 10 segundos de 72° á 72° 1′ 30″.

Cálculo Inverso de las Diferencias.

592. Sólo con el carácter de un mero complemento y muy lejos de pretender dar una exposición del Cálculo Inverso de las Diferencias, hemos incluído, para terminar este Capítulo, los párrafos que siguen. Como se verá, nuestro objeto esencial es la aplicación del mencionado cálculo á la determinación de las sumas de las series. Así pues, únicamente expondremos los preliminares necesarios para llegar á ese objeto.

593. El cálculo inverso de las diferencias con respecto al directo, desempeña el mismo papel que el Integral respecto al Diferencial. Su fin sintético de integración se manifiesta por el símbolo Σ; el problema general que resuelve es, de consiguiente: *hallar una función* F(x) *tal que su diferencia sea igual á una función dada* f(x).

De consiguiente, las igualdades.

$$F(x+h)-F(x)=f(x), \quad \Delta F(x)=f(x), \quad \Sigma f(x)=F(x)$$

tienen igual significado.

594. Hallada una función particular $F(x)$ tal que se tenga:

$$\Delta F(x)=f(x)$$

puede preguntarse si existe una solución más general; supongamos que esto suceda, sea $\varphi(x)$ la expresión que añadida á $F(x)$ da la solución general y se tendrá:

$$\Delta[F(x)+\varphi(x)]=f(x), \quad \Delta F(x)+\Delta\varphi(x)=f(x)$$

Pero como por hipótesis $\Delta F(x)=f(x)$ se tendrá:

$$\Delta\varphi(x)=0 \quad \text{ó bien} \quad \varphi(x+h)-\varphi(x)=0$$

es decir, $\varphi(x)$ será una función periódica cuyo período es h y por ejemplo de la forma:

$$\psi\left[\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{h}\right], \quad \psi\left[\cos\frac{2\pi x}{h}\right]$$

sujeta únicamente á la condición de recibir el mismo valor tanto para $x=x_0+nh$ como para $x=x_0$ y permaneciendo arbitraria en la amplitud de cada intervalo igual á h [1].

Si x tuviese sólo que recibir por valores los múltiples sucesivos de h, la función $\varphi(x)$ sería sólo una constante.

595. Dado un polinomio algebraico:

$$Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots\ldots+Tx+U \tag{799}$$

siempre podemos hallar una función cuya diferencia sea dicho polinomio.

Hemos visto que la diferencia de un polinomio es otro polinomio algebraico de un grado menor en una unidad, de suerte que el polinomio cuya diferencia es (799) será de la forma:

$$A'x^{m+1}+B'x^m+C'x^{m-1}+\ldots\ldots+T'x+U' \tag{800}$$

siendo A', B', C', ..., T', U', coeficientes indeterminados.

Rara determinarlos busquemos la diferencia de (800) expresando que es igual el polinomio (799), lo que nos hará igualar los coeficientes de las mismas potencias de x, conduciéndonos á las relaciones:

$$A'=\frac{A}{(m+1)h}, \quad B'=\frac{B}{mh}-\frac{A}{2}, \quad C'=\frac{C}{(m-1)h}-\frac{B}{2}+\frac{mAh}{2.2.3}, \quad \text{etc.}$$

Supongamos por ejemplo que el polinomio dado sea x^m, haciendo:

$$A=1, \quad B=C=\ldots\ldots=0$$

y resultará:

$$\Sigma x^m=\frac{x^{m+1}}{(m+1)h}-\frac{x^m}{2}+\frac{mhx^{m-1}}{2.2.3}-\ldots\ldots+\text{Const} \quad {}^{(2)} \tag{801}$$

Haciendo sucesivamente $m=0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$, obtendremos:

$$\Sigma x^0, \quad \Sigma x^1, \quad \Sigma x^2, \quad \Sigma x^3, \quad \ldots\ldots$$

y para $h=1$ resultará:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma x^0=\dfrac{x}{1}+\text{const}, \quad \Sigma x^1=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{2}+\text{const}, \quad \Sigma x^2=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{6}+\text{const} \\ \Sigma x^3=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^2}{4}+\text{const}, \quad \Sigma x^4=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x}{30}+\text{const}, \quad \text{etc.} \end{array}\right\} \tag{802}$$

(1) Evidentemente la expresión considerada conduce á:

$$\psi\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{h}+2\pi\right), \quad \psi\left(\cos\frac{2\pi x}{h}+2\pi\right)$$

(2) Multiplicando por h los dos miembros de (801) y buscando el límite se encuentra la fórmula conocida:

$$\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+\text{const}$$

La fórmula (801) que sirve de punto de partida calculada con 10 términos es:

$$\Sigma x^m = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \dfrac{x^m}{2} + \dfrac{1.mh}{2.3.2} x^{m-1} - \dfrac{1}{6.5} \dfrac{m(m-1)(m-2)h^3 x^{m-3}}{2.3.4} \\ + \dfrac{1}{6.7} \dfrac{m(m-1)(m-2)....(m-4)h^5 x^{m-5}}{2.3.4.5.6} x^{m-5} - \dfrac{3}{10.9} \dfrac{m(m-1)....(m-6)}{2.3.4...8} h^7 x^{m-7} \\ + \dfrac{5}{6.11} \dfrac{m(m-1)....(m-8)}{2.3....10} h^9 x^{m-9} - \dfrac{691}{210.13} \dfrac{m(m-1)....(m-10)}{2.3......12} h^{11} x^{m-11} \\ + \dfrac{35}{2.15} \dfrac{m(m-1)....(m-12)}{2....14} h^{13} x^{m-13} - \dfrac{3617}{30.17} \dfrac{m(m-1)....(m-14)}{2....16} h^{15} x^{m-15} + ... \\ .... + \text{constante.} \end{array} \right.$$

596. Las analogías del Cálculo Directo de Diferencias respecto al Diferencial se repiten aquí con el Inverso respecto al Integral. Tomemos unos ejemplo:

(1) Se tiene $\Delta u + \Delta v + \Delta w = \Delta(u+v+w)$ luego:

$$\Sigma(\Delta u + \Delta v + \Delta w) = u + v + w = \Sigma \Delta u + \Sigma \Delta v + \Sigma \Delta w$$

(2) Se tiene $a\Delta u = \Delta au$, luego:

$$\Sigma a \Delta u = au = a \Sigma \Delta u$$

(3) Podrán integrarse de este modo todas las funciones racionales algebraicas y enteras cuando es constante el incremento de la variable. Sea por ejemplo:

$$y = \mathrm{A}x^3 + \mathrm{B}x^2 + \mathrm{C}x + \mathrm{D}$$

se tendrá:

$$\Sigma(\mathrm{A}x^3 + \mathrm{B}x^2 + \mathrm{C}x + \mathrm{D}) = \mathrm{A}\Sigma x^3 + \mathrm{B}\Sigma x^2 + \mathrm{C}\Sigma x + \mathrm{D}\Sigma x^0$$

$$= \frac{\mathrm{A}}{4h} x^4 - \frac{3\mathrm{A}h - 2\mathrm{B}}{6h} x^3 + \frac{\mathrm{A}h^2 - 2\mathrm{B}h + 2\mathrm{C}}{4h} x^2 + \frac{\mathrm{B}h^2 - 3\mathrm{C}h + 6\mathrm{D}}{6h} x + \text{constante}$$

(4) Sea la función trascendente:

$$\Delta a^x = a^x(a^h - 1)$$

se tendrá:

$$a^x = \Sigma a^x (a^h - 1) = (a^h - 1)\Sigma a^x$$

de donde:

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^h - 1}$$

(5) Sea la función: $\cos \mathrm{A} - \cos \mathrm{B} = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\mathrm{A} - \mathrm{B}) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\mathrm{A} + \mathrm{B})$, que da:

$$\Delta \cos x = \cos(h + x) - \cos x = -2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} h \operatorname{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right) \text{ de donde } \operatorname{sen}(x + \tfrac{1}{2}h) = -\frac{\Delta \cos x}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} h}$$

y por consiguiente:

$$\operatorname{sen} x = -\frac{\Delta \cos(x - \frac{1}{2}h)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} h}$$

Integrando resulta:

$$\Sigma \operatorname{sen} x = -\frac{\cos(x - \frac{1}{2}h)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} h} + \text{constante}$$

Procediendo de un modo análogo resultará:

$$\Sigma \cos x = \frac{\operatorname{sen}(x - \frac{1}{2}h)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} h} + \text{constante.}$$

597. La importancia capital de la expresión Σu es su aplicación á la suma de las series, y los analistas le han dado formas muy elegantes.

Sea la serie:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_x$$

en la que se pasa de un término á otro dando á x valores enteros, que crecen una unidad.

Hagamos á $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_x = \mathrm{V}_x$ y podremos considerar á V_x como el término de rango x en la serie:

$$u_1 + (u_1 + u_2) + (u_1 + u_2 + u_3) + \ldots\ldots\ldots + (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_x) + \ldots\ldots\ldots$$

De consiguiente, pues V_{x+1} es el término de rango $x+1$ se tendrá:

$$\mathrm{V}_{x+1} - \mathrm{V}_x = \Delta \mathrm{V}_x = u_{x+1} \quad \text{luego} \quad \mathrm{V}_x = \Sigma u_{x+1} + \mathrm{C}$$

no siendo C, en este caso, sino una nueva constante pues $h = 1$ y los valores dados á h son enteros.

Ahora bien, V_x es la suma de términos: $u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_x$ que representamos por $\mathrm{S}(u_x)$, luego:

$$\mathrm{S}(u_x) = \Sigma u_{x+1} + \mathrm{C}$$

598. Sean por ejemplo las series:

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + x, \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + x^2, \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + x^3, \quad \ldots\ldots,$$

$$1^m + 2^m + 3^m + \ldots\ldots + x^m$$

Tendremos:

$$\mathrm{S}(x) = \Sigma(x+1) + \mathrm{C}, \quad \mathrm{S}(x^2) = \Sigma(x+1)^2 + \mathrm{C}, \quad \mathrm{S}(x^3) = \Sigma(x+1)^3 + \mathrm{C}, \quad \ldots\ldots\ldots,$$

$$\mathrm{S}(x^m) = \Sigma(x+1)^m + \mathrm{C}$$

Calcularemos $\Sigma(x+1)$, $\Sigma(x+1)^2$, ..., $\Sigma(x+1)^m$, cambiando x en $x+1$ en las fórmulas (802), la constante se determinará observando que todos los segundos miembros se reducen á 1 para $x=1$, es decir, $\mathrm{C}=0$; de consiguiente:

$$\mathrm{S}(x) = \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(x+1)}{2} = \frac{x(x+1)}{2}$$

$$\mathrm{S}(x^2) = \frac{(x+1)^3}{3} - \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(x+1)}{6} = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}, \quad \text{etc.}$$

fórmulas ya conocidas y que hemos aplicado en la *Suma de Pilas de Balas* (Capítulo IV, Primera Parte).

599. Estas fórmulas pueden obtenerse por otro procedimiento que las da con los segundos miembros descompuesto en factores.

En efecto, sea el producto:

$$U=x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+nh)$$

Fácilmente hallaremos que:

$$\Delta U=(n+1)h[(x+h)(x+2h)\ldots\ldots\ldots(x+nh)]$$

Luego:

$$U=\Sigma(n+1)h[(x+h)(x+2h)\ldots\ldots\ldots(x+nh)] \qquad (803)$$

reemplazando U por su valor y sacando fuera del signo la constante $(n+1)h$, se obtiene:

$$\Sigma[(x+h)(x+2h)\ldots\ldots\ldots(x+nh)]=\frac{1}{(n+1h)}[x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+nh)]$$

que suponiendo $h=1$ se cambia en:

$$\Sigma[(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+n)]=\frac{1}{n+1}[x(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+n)]$$

Haciendo en esta fórmula $n=1, 2, \ldots\ldots$, determinaremos á:

$$\Sigma(x+1)=\frac{x(x+1)}{2}, \quad \Sigma(x+1)(x+2)=\frac{x(x+1)(x+2)}{3}, \quad \text{etc.}$$

Para obtener á:

$$\Sigma(x), \quad \Sigma[x(x+1)], \quad \Sigma[x(x+1)(x+2)], \quad \text{etc.,}$$

bastará cambiar en la fórmula anterior x en $x-1$ y resultará:

$$\Sigma(x)=\tfrac{1}{2}(x-1)x, \quad \Sigma[x(x+1)]=\tfrac{1}{3}(x-1)x(x+1),$$
$$\Sigma[x(x+1)(x+2)]=\tfrac{1}{4}(x-1)x(x+1)(x+2), \quad \text{etc.}$$

Para determinar á $\Sigma(x+1)^2$, $\Sigma(x+1)^3$, etc., tendremos:

$$\Sigma(x+1)^2=\Sigma[x(x+1)+(x+1)]=\Sigma x(x+1)+\Sigma(x+1)$$
$$\Sigma(x+1)^3=\Sigma[x(x+1)^2+(x+1)^2]=\Sigma x(x+1)^2+\Sigma(x+1)^2=$$
$$=\Sigma x(x+1)(x+2-1)+\Sigma(x+1)^2=\Sigma x(x+1)(x+2)-\Sigma x(x+1)+$$
$$+\Sigma(x+1)^2, \quad \text{etc.}$$

Así sucesivamente iremos transformando las expresiones:

$$\Sigma(x+1)^4, \quad \Sigma(x+1)^5, \quad \text{etc.}$$

y hallaremos:

$$\Sigma(x+1)=S(x)=\frac{x(x+1)}{2}$$

$$\Sigma(x+1)^2=S(x^2)=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$$

$$\Sigma(x+1)^3=S(x^3)=\frac{x^2(x+1)^2}{4} \quad \text{etc.}$$

Obsérvese que la última fórmula desarrollada entraña la igualdad:

$$S(x^3)=[S(x)]^2 \quad \text{ó bien} \quad 1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+x^3=(1+2+3+\ldots\ldots+x)^2$$

ya hecha notar en el párrafo 80–III de la Primera Parte.

APLICACIONES.

600. I. Sea la serie:

3, 7, 11, 15, 19, 23

Su término general determinado como ya se sabe es: $T=3+4n$.

Para hallar el *término sumatorio* S, ó sea la suma de la serie, se tendrá, siendo a_n el símbolo del término general:

$$S=\Sigma a_n+C=\Sigma(4n+3)+C=4\Sigma n+3\Sigma n^\circ+C=\frac{4(n^2-n)}{2}+3n+C=2n^2+n+C$$

Como cuando $n=0$, $S=0$ se tendrá $C=0$, luego:

$$S=2n^2+n$$

en el presente caso $n=6$ luego $S=78$.

II. La serie 1, 7, 13, 19, 25, conduce á:

$$T=1+6n, \quad S=3n^2-2n$$

III. Sean las tres series siguientes, que son de las de números figurados:

(1), 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...; (2), 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...; (3), 1, 4, 10, 20, 35, ...

La serie (1) conduce á:

$$T=n+\frac{n(n-1)}{2}, \quad S=\frac{n(n+1)}{2}$$

La serie (2) conduce á:

$$T=1+2n+\frac{n(n-1)}{2}, \quad S=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

La serie (3) conduce á:

$$T=1+3n+\frac{3n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \quad S=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$$

IV: Sean las series de los cuadrados y los cubos:

(1), 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...; (2), 1, 8, 27, 64, 125, 216, ...

La serie (1) conduce á:

$$T=(n+1)^2, \quad S=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

La serie (2) conduce á:

$$T=(n+1)^3, \quad S=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$$

Si en la serie (1), por ejemplo, se pide la suma de 6 términos contando de 16 en adelante, tendremos que la suma de los términos anteriores á 16 y no pedida debía ser nula, luego haciendo $n=3$ se debería tener $S=0$ lo que da para la constante el valor:

$$C=-14$$

así pues, la suma pedida sería:

$$S=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{n}{6}-14$$

que para $n=6$ es $S_4^6=77$.

Si en la serie (2) quisiéramos conocer la suma de 64 á 216 se tendrá:

$$S_4^6=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{2}-36=405$$

601. **Integración por partes.** Para terminar daremos una idea general de la integración por partes. Sean P y U dos funciones cualesquiera y se supondrá:

$$\Sigma P Q=Q\Sigma P+Z \tag{804}$$

siendo Z una función incógnita de la misma variable.

Tomando la diferencia de cada miembro de (804) resulta:

$$PQ=(Q+\Delta Q)\Sigma(P+\Delta P)-Q\Sigma P+\Delta Z$$

desarrollando, reduciendo y despejando á ΔZ se obtiene:

$$\Delta Z=-\Delta Q\Sigma(P+\Delta P) \quad \text{de donde} \quad Z=-\Sigma\Delta Q\Sigma(P+\Delta P)$$

Sustituyendo en (804) y reduciendo, resulta:

$$\Sigma P Q=Q\Sigma P-\Sigma\Delta Q\Sigma(P+\Delta P) \tag{805}$$

ó bien designando $\Sigma(P+\Delta P)$ por P_1 en:

$$\Sigma P Q=Q\Sigma P-\Sigma\Delta Q\Sigma P_1 \tag{806}$$

Cambiando (806) Q en Δ Q, P en ΣP, y observando que:

$$\Sigma P_1+\Delta\Sigma P_1=\Sigma(P_1+\Delta P_1)=\Sigma P_2$$

resulta:

$$\Sigma\Delta Q\Sigma P_1=\Delta Q\Sigma^2 P_1-\Sigma\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2$$

y la fórmula (806) será:

$$\Sigma P Q=Q\Sigma P-\Delta Q\Sigma^2 P_1+\Sigma\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2 \tag{807}$$

Cambiando en (805) Q en Δ^2 Q, P en $\Sigma^2 P_2$, y observando que:

$$\Sigma^2 P_2+\Delta\Sigma^2 P_2=\Sigma^2 P_3$$

resulta:

$$\Sigma\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2=\Delta^2 Q\Sigma^3 P_2-\Sigma\Delta^3 Q\Sigma^3 P_3$$

y la fórmula (807) será:

$$\Sigma P Q=Q\Sigma P-\Delta Q\Sigma^2 P_1+\Delta^2 Q\Sigma^3 P_2-\Sigma\Delta^3 Q\Sigma^3 P_3$$

lo que conduce á la elegantísima expresión dada por Taylor en las "*Transacciones Filosóficas:*"

$$\Sigma P Q=Q\Sigma P-\Delta Q\Sigma^2 P_1+\Delta^2 Q\Sigma^3 P_2-\Delta^3 Q\Sigma^4 P_3+\Delta^4 Q\Sigma^5 P_4-\text{etc.}$$

Si por P_1, P_2, P_3, ..., se ponen sus valores en función de P y se efectúan las integraciones posibles se llega á la fórmula:

$$\Sigma P Q=Q\Sigma P-\Delta Q(\Sigma^2 P+\Sigma P)+\Delta^2 Q(\Sigma^3 P+2\Sigma^2 P+\Sigma P)-\Delta^3 Q(\Sigma^4 P+3\Sigma^3 P+$$
$$+3\Sigma^2 P+\Sigma P)+\text{etc.}$$

presentada por Condorcet en su "*Essai sur l'application de l'analyse á la probabilité des décisions.*" Esta fórmula se detiene siempre que Q conduce á diferencias constantes de orden cualquiera; y si P es susceptible de un número suficiente de integraciones sucesivas, se llega á la integral exacta de la función P Q.

(Lacroix.)

La fórmula anterior en virtud de notaciones que claramente se entienden podría escribirse *simbólicamente.*

$$\Sigma P Q=Q\Sigma P+\mathop{\mathrm{S}}_{n=1}^{n=n}(-1)^n\Delta^n Q\mathop{\mathrm{S}}_{m=0}^{m=n}\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots\ldots m}\Sigma^{n-m+1}P$$

admitiendo que para $m=0$ el coeficiente de $\Sigma^{n-m+1}P$ se reduce á 1 y haciendo $n=1$ á $n=n$ para ir obteniendo los términos sucesivos que incluye la fórmula.