CAPÍTULO II.

LA INTERPOLACIÓN.

Consideraciones preliminares.—Fórmula de NEWTON.—Fórmula de LAGRANGE.—Aplicaciones.

602. La Interpolación tiene por objeto incluir entre los términos de una serie, otros nuevos, sujetos á la misma ley. A veces el problema es fácil cuando se conoce la ley de los términos de la serie, como sucede en Algebra Elemental cuando se quiere interpolar un cierto número de medios entre dos números dados pertenecientes á una progresión aritmética ó geométrica. Cuando la ley de los términos de la serie es desconocida, el problema de la interpolación es indeterminado, y para resolverlo es necesario imponer á los términos desconocidos una condición que haga desaparecer la indeterminación. Esta condición es á menudo que las *diferencias de un cierto orden sean nulas.* Al hablar de la formación de Tablas numéricas hemos supuesto por ejemplo que el crecimiento de los logaritmos era proporcional al de los numeros, y partiendo de este supuesto, considerar la diferencia primera como constante y la segunda como nula.

El problema de la interpolación puede enunciarse así:

Conociendo los valores: $u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$, *de una función que corresponden á valores* $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, *de la variable; admitiendo que para crecimientos iguales cualesquiera de* x, *las diferencias* $(n+1)^{\text{ésimas}}$ *de la función sean iguales á cero, encontrar los valores de esta función que corresponden á un valor de* x *comprendido entre* x_0 *y* x_n.

Dos fórmulas desarrollaremos, la de NEWTON que supone equidistantes los valores dados á la variable y la de LAGRANGE que es general.

Fórmula de Newton.

603. Se tiene (párrafo 581) la fórmula:

$$u_n = u_0 + \frac{n}{1}\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1.2.3\ldots n}\Delta^n u_0 \quad (808)$$

Pues que los valores de x: $x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n$, son equidistantes, formarán la serie:

$$x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h,\ \ldots\ldots\ldots,\ x_0+nh$$

que da para la función los correlativos:

$$u_0,\ u_1,\ \ldots\ldots\ldots,\ u_n$$

El último valor de x, x_n para el cual u es conocido, tiene por valor x_0+nh de consiguiente:

$$n = \frac{x_n - x_0}{h}$$

Sustituyendo este valor en (808) resulta:

$$\left.\begin{aligned} u_n = u_0 + \frac{x_n-x_0}{h}\Delta u_0 + \left(\frac{x_n-x_0}{h}\right)\left(\frac{x_n-x_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \ldots\ldots + \left(\frac{x_n-x_0}{h}\right) \\ \left(\frac{x_n-x_0}{h}-1\right)\ldots\ldots\left(\frac{x_n-x_0}{h}-n+1\right)\frac{\Delta^n u_0}{1.2.3\ldots\ldots n} \end{aligned}\right\} \quad (809)$$

Reemplazando en el segundo miembro x_n por la letra indeterminada x, se obtendrá una función $f(x)$ cuya expresión será:

$$\left.\begin{aligned} f(x) = u_0 + \frac{x-x_0}{h}\Delta u_0 + \left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \ldots\ldots + \left(\frac{x-x_0}{h}\right) \\ \left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\ldots\left(\frac{x-x_0}{h}-n+1\right)\frac{\Delta^n u_0}{1.2.3\ldots\ldots n} \end{aligned}\right\} \quad (810)$$

que es la fórmula de interpolación de NEWTON.

Vamos á averiguar si la función $f(x)$ responde á las condiciones impuestas y puede representar la función buscada u.

1º En efecto, sustituyendo en lugar de x el valor intermedio $x_0+ph, (p<n)$, en la fórmula (810) se tendrá:

$$x = x_0 + ph \quad \text{luego} \quad p = \frac{x-x_0}{h}$$

y la fórmula será:

$$\left.\begin{aligned} f(x_0+ph) = u_0 + p\Delta u_0 + p(p-1)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \ldots\ldots + p(p-1)(p-2)\ldots\ldots \\ \ldots\ldots(p-p+1)\frac{\Delta^p u_0}{1.2\ldots\ldots p} \end{aligned}\right\} \quad (811)$$

Los términos siguientes desaparecen, pues, del término $(p+1)^{\text{ésimo}}$, en adelante entra $(p-p)$ en los factores del numerador. Así pues, el segundo miembro de (811) es la expresión de u_p, y de consiguiente, la función $f(x)$ se cambia en u_p cuando:

$$x = x_0 + ph$$

llena, pues, las condiciones del enunciado.

La función $f(x)$ que según la ecuación (810) se reduce á u_0 para $x=x_0$ (ó para $p=0$) y á u_n para $x=x_u$ (ó para $p=n$), se cambia en $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots, u_{n-1}$ para:

$$p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ n-1$$

Se ve, además, que $f(x)$ es un polinomio en x de grado n (pues su último término entraña n factores de primer grado en x) cuya diferencia de órden n es constante.

Así pues, las condiciones necesarias del problema están satisfechas.

2º La función $f(x)$ es la única que llena estas condiciones, porque suponiendo otra $\varphi(x)$, como las diferencias de órden $n+1$ deben ser nulas, el grado de $\varphi(x)$ no puede sobrepasar á n; además, $\varphi(x)$ toma los mismos valores que $f(x)$ para los $n+1$ valores atribuídos á la variable, y de consiguiente, la diferencia $f(x)-\varphi(x)$ debe anularse $n+1$ veces, ó en otros términos, la ecuación $f(x)-\varphi(x)=0$ debe admitir á lo menos $n+1$ raíces:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$$

lo que exige, puesto que es del grado n, que su primer miembro sea idénticamente nulo, es decir, que las funciones f y φ sean idénticas.

604. Si se supone Δ^2 muy pequeño, la fórmula será:

$$u=u_0+\frac{(x-x_0)}{h}\Delta u_0=u_0+\mathrm{Z}\Delta u_0$$

poniendo Z por:

$$\frac{x-x_0}{h}$$

De esta hipótesis resulta:

$$\frac{x-x_0}{h}=\mathrm{Z}=\frac{u-u_0}{\Delta u_0}.$$

El crecimiento de la función se *supone*, en este caso, proporcional al de la variable; así se opera según hemos dicho cuando se buscan los logaritmos de los *números* ó de las magnitudes trigonométricas *no inscritas* en las Tablas:

Si Δ^3 es muy pequeño:

$$u=u_0+\mathrm{Z}\Delta u_0+\frac{\mathrm{Z}(\mathrm{Z}-1)}{1.2}\Delta^2 u_0, \quad \text{etc.}$$

605. **Representación exacta de una función entera por la fórmula de Newton.** La fórmula de Newton determina *exactamente* toda función entera de x, de grado m, de la que se conocen $m+1$ valores correspondiendo á $m+1$ de la variable x que van en progresión aritmética. Hay entonces *identidad* entre la función $f(x)$ dada por la fórmula de Newton y la función desconocida (párrafo 603, 2ª observación). La función entera que se quiere encontrar tiene, pues, por expresión:

$$f(x)=u_0+\frac{x-x_0}{h}\Delta u_0+\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2}+\ldots\ldots+\left(\frac{x-x_0}{h}\right)$$

$$\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\ldots\left(\frac{x-x_0}{h}-m+1\right)\frac{\Delta^m u_0}{1.2\ldots\ldots m}$$

Entonces, *variando á voluntad el punto de partida* u_0, si las cantidades:

$$u_0,\ \Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ \ldots\ldots,\ \Delta^m u_0$$

son todas positivas y se da á x un valor tal que el último factor:

$$\frac{x-x_0}{h}-m+1$$

sea nulo ó positivo, el valor de $f(x)$ será positivo é irá siempre creciendo á medida que x aumente. Así pues, $x_0+(m-1)h$ es un límite superior de las raíces positivas de $f(x)=0$. Así mismo, si para un cierto valor de x_0 las cantidades:

$$u_0,\ \Delta u_0,\ \ldots\ldots,\ \Delta^m u_0$$

son alternativamente positivas y negativas, es evidente que para todo valor de x menor que x_0, $f(x)$ será siempre positivo ó siempre negativo sin ser nulo. Así pues, el valor de x_0 es un límite inferior de las raíces reales de $f(x)=0$.

APLICACIONES.

606. I. *Obtener el logaritmo de* $3.1415926536=\pi$ *por medio de una tabla de logaritmos de 10 decimales.*

Consideraremos los logaritmos contenidos en la tabla como los valores dados á la función u y los números á que corresponden como los valores de x; se tendrá la tabla:

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$	$\Delta^4 u$
3.14	0.4969296481	0.0013809057	− 0.0000043769	0.0000000277	− 0.0000000003
3.15	0.4983105538	0.0013765288	− 0.0000043492	0.0000000274	
3.16	0.4996870826	0.0013721796	− 0.0000043218		
3.17	0.5010592622	0.0013678578			
3.18	0.5024271200				

Siendo pequeñísima la diferencia cuarta, puede considerarse la quinta como nula.

Para aplicar la fórmula (810) debemos sustituir:

$$u_0=0.4969296481,\ \Delta u_0=0.0013809057,\ \Delta^2 u_0=-0.0000043769,\ \Delta^3 u_0=0.0000000277$$

$$\Delta^4 u_0=-0.0000000003,\ h=0.01,\ x_0=3.14,\ x-x_0=3.1415926536-3.14=0.0015926536$$

$$\frac{x-x_0}{h}=0.15926536,\quad \frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)=-0.42036732,$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right)=-0.61357821,\quad \frac{1}{4}\left(\frac{x-x_0}{h}-3\right)=-0.71018366$$

resultará llamando u_x el primer miembro de la fórmula (810):

$$u_x=\log 3.1415926536=0.4971498727$$

II. Encontrar la función de cuarto grado $y=f(x)$, que para los cinco valores de la variable -2, -1, 0, 1, 2 toma los cinco siguientes: 67, 14, 3, 4, 11.

Formando la tabla correspondiente cuyas columnas llevan por encabezados: x, y, Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, $\Delta^4 y$, siendo $\Delta^5 y=0$ resulta:

$$y_0=67,\ \Delta y_0=-53,\ \Delta^2 y_0=42,\ \Delta^3 y_0=-30,\ \Delta^4 y_0=24,\ \Delta^5 y_0=0,\ x_0=-2,\ h=1$$

$$y=f(x)=x^4-3x^3+5x^2-2x+3$$

ecuación de cuarto grado sin raíces negativas.

De la tabla que debe formarse y tomando como punto de partida $x_0=0$ (párrafo 605), se tiene:

$$\frac{x-x_0}{h}-m+1=x-3$$

luego 3 es límite superior.

III. *Calcular con 7 decimales el logaritmo de* sen $1^\circ-17'-35''.7$.

Debe hallarse:

$$\log \operatorname{sen} 1^\circ-17'-35''.7=\bar{2}.3535230 \quad (^1)$$

Fórmula de Lagrange.

607. Lagrange (2) supone que los valores dados á la variable son cualesquiera; es, pues, fórmula más general que la de Newton; esta última queda comprendida en la de Lagrange cuando los valores de x son equidistantes.

Sean $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ los $n+1$ valores de x correspondientes á los $n+1$ de y:

$$y_0,\ y_1,\ \ldots\ldots,\ y_n$$

La función y entera respecto á x y de grado n tendrá la forma:

$$y=A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots\ldots+A_{n-1}x+A_n \tag{812}$$

Pues que esta relación debe estar satisfecha para los $n+1$, pares de valores:

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \ldots\ldots,\ (x_n, y_n)$$

se tendrá:

$$\begin{aligned} y_0&=A_0x_0^n+A_1x_0^{n-1}+A_2x_0^{n-2}+\ldots\ldots+A_{n-1}x_0+A_n\\ y_1&=A_0x_1^n+A_1x_1^{n-1}+A_2x_1^{n-2}+\ldots\ldots+A_{n-1}x_1+A_n\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n&=A_0x_n^n+A_1x_n^{n-1}+A_2x_n^{n-2}+\ldots\ldots+A_{n-1}x_n+A_n \end{aligned}$$

De este sistema de $n+1$ ecuaciones de primer grado respecto á los $n+1$ coeficientes:

(1) En este caso:

$$y_0=\log \operatorname{sen} 1^\circ 17' 30''=\bar{2}.3529910,\quad \Delta y_0=0.0009328,\quad \Delta^2 y_0=-0.0000020,\quad \Delta^3 y_0=0.0000001,\quad h=10'',$$

$$\frac{x-x_0}{h}=0.57$$

(2) "*Leçons de Mathématiques données à l'Ecole Normale en* 1795." Leçon cinquième.

A_0, A_1, ……, A_n, se podrían determinar dichos coeficientes, pero Lagrange opera más rápidamente poniendo:

$$y=\mu_0y_0+\mu_1y_1+\mu_2y_2+\ldots\ldots+\mu_{n-1}y_{n-1}+\mu_ny_n \tag{813}$$

ecuación en la cual $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots\ldots, \mu_n$ son funciones de x sujetas á las condiciones siguientes:

Para $x=x_0$: $\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \mu_n$ deben anularse, y μ_0 debe ser igual á 1

" $x=x_1$: $\mu_0, \mu_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \mu_n$ " " " μ_1 " " " " "

" $x=x_2$: $\mu_0, \mu_1, \mu_3 \ldots\ldots\ldots, \mu_n$ " " " μ_2 " " " " "

……………………………………………………………………………

" $x=x_n$: $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots\ldots, \mu_{n-1}$ " " " μ_n " " " " "

Es evidente que según estas condiciones y se cambiará en:

$$y_0, y_1, \ldots\ldots, y_n$$

para los valores: $x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n$ de x.

Tomemos á μ_0; pues que debe anularse para $x=x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ de x, y ser del grado n tendrá la forma:

$$\mu_0=\nu_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_n)$$

Además, puesto que debe ser $\mu_0=1$ para $x=x_0$ se tendrá:

$$\nu_0=\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots\ldots(x_0-x_n)},\quad \text{luego } \mu_0=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}$$

De la misma manera se procederá con los demás coeficientes:

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots\ldots,\ \mu_n$$

de la fórmula (813), y sustituyendo los valores hallados para ellos en dicha fórmula resulta la de interpolación de Lagrange:

$$\left.\begin{aligned} y=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots\ldots(x_0-x_n)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_0)\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_0)\ldots\ldots(x_1-x_n)}+\ldots\\ \ldots\ldots+y_n\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots\ldots(x_n-x_{n-1})} \end{aligned}\right\} \tag{814}$$

608. Notas.—1ª Como se hizo notar ya (párrafo 605) toda otra función de grado n que satisfaga las mismas condiciones se confunde identificándose con la que acaba de obtenerse.

2ª Si los valores de x están en progresión aritmética, la fórmula de Lagrange reproduce la de Newton.

3ª La anterior demostración hace palpar lo indeterminado del problema de la interpolación, porque si no se exigiese que la función desconocida fuese entera, podrían atribuirse á las cantidades $\mu_0, \mu_1, \ldots\ldots, \mu_n$, formas diferentes á las adoptadas por Lagrange y que cumplirán las condiciones del problema, por ejemplo:

$$\mu_0 = \frac{\operatorname{sen}(x-x_1)\operatorname{sen}(x-x_2)\ldots\ldots\operatorname{sen}(x-x_n)}{\operatorname{sen}(x_0-x_1)\operatorname{sen}(x_0-x_2)\ldots\ldots\operatorname{sen}(x_0-x_n)},$$

$$\mu_0 = \frac{\operatorname{sen} m(x-x_1)\operatorname{sen} m(x-x_2)\ldots\ldots\operatorname{sen} m(x-x_n)}{\operatorname{sen} m(x_0-x_1)\operatorname{sen} m(x_0-x_2)\ldots\ldots\operatorname{sen} m(x_0-x_n)},$$

$$\mu_0 = \frac{(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots\ldots(x-x_n)^2}{(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)^2\ldots\ldots(x_0-x_n)^2}$$

sometiendo las diferencias: $(x-x_0)$ etc., á signos convenientemente escogidos.

APLICACIONES.

609. I. Encontrar el término general T_n de la serie 3, 6, 10, ... La variable es el rango n, la función es T_n correlativa al rango respectivo; formando la tabla se ve que el grado de T_n es 2, pues las diferencias segundas son constantes; se dan, pues, 3 valores de y y se tiene:

$$x_0=1,\ x_1=2,\ x_2=3;\ y_0=3,\ y_1=6,\ y_2=10$$

Se tiene, de consiguiente, sustituyendo en la fórmula de Lagrange:

$$T_n = 3\frac{(n-2)(n-3)}{2} - 6(n-1)(n-3) + 10\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

como en el párrafo 600.

II. Dados los valores:

$$x_0=-2,\ x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1,\ x_4=2$$

correspondientes á los valores:

$$y_0=67,\ y_1=14,\ y_2=3,\ y_3=4,\ y_4=11$$

encontrar la función de cuarto grado que satisfacen por la fórmula de Lagrange:

$$y = 67\frac{(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)}{24} - \ldots\ldots + 11\frac{(x+2)(x+1)(x-0)(x-1)}{24} =$$

$$= x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x + 3$$

como en el párrafo 606.

III. Se ha observado un planeta y las ascensiones rectas han sido:

12 Enero.	$12^h.30'$	$0°3'25''.21$
19 „	$9^h.\ 0'$	$0°1'28''.04$
20 „	$9^h.17'$	$0°2'26''.67$
24 „	$8^h.\ 1'$	$-0°0'58''.3$

1º Encontrar por interpolación la ascensión recta el 22 de Enero á mediodía.
2º Encontrar el día y la hora para los cuales la ascensión recta ha sido nula.

610. La teoría de la interpolación tiene usos muy variados en los diversos ramos de las Matemáticas Aplicadas, pues en general cuando se tiene una serie de valores de una función que corresponden á los que tiene una variable, á dicha teoría hay que recurrir para conocer el valor de la función para un valor intermedio de la variable. Repetimos aquí lo dicho en el párrafo 585, después de un gran número de experiencias se construye un diagrama representativo de la función que se estudia y que gráficamente marca la variación de dicha función. Faltos de espacio, lo que mejor podemos hacer es recomendar al lector entre las obras más conocidas, que puede consultar los "*Eléments de Géométrie Analytique*" por Sonnet y Frontera. En dicha obra está el estudio de varias cuestiones de aplicación: la catenaria de los puentes suspendidos, la ley de variación de la pesantez en función de la duración de las oscilaciones del péndulo simple, la formula del gasto en Hidráulica, la valuación del frotamiento en los engranes, la ley de la depresión capilar del mercurio, la variación del calor latente del vapor de agua con la temperatura, la ley de solubilidad de diversas sales en función de la temperatura, el efecto útil de una turbina Fontaine–Baron, la ley de la mortalidad en Francia, etc. En general, puede decirse que la teoría de las diferencias es una ayuda poderosa para la ciencia práctica, demarca la estrecha alianza que debe haber entre el procedimiento inductivo y el deductivo cuando se quiere alcanzar el éxito.