En el caso actual se tiene:

$$\varphi'(x) = \tfrac{1}{2}\,\frac{\log e}{x}$$

como x es aproximadamente igual á 6, $\varphi'(x)$ es aproximadamente igual á $\frac{1}{20} < 1$. Así pues, cada valor obtenido es 20 veces más aproximado al verdadero que el precedente.

Para valuar la otra raíz se tiene:

$$x - \tfrac{1}{2}\log x - 5.5178238 = 0$$

la raíz está comprendida entre 0 y 1, y es muy pequeña, por lo que puede escribirse:

$$\tfrac{1}{2}\log x = -3.5178238, \quad x = 0.00000000000921197$$

siendo correctas las 17 decimales.

TERCER METODO.

616. **Método de Newton.** Sea $F(x)=0$, a el valor aproximado de la raíz, y $a+h$ el exacto, se tendrá:

$$F(a+h)=0$$

Ahora bien, la relación:

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h}$$

difiere poco de $F'(x)$ y se tendrá siendo ε un número muy pequeño:

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h} = F'(a)+\varepsilon \quad \text{de donde} \quad h = -\frac{F(a)}{F'(a)+\varepsilon}$$

puesto que $F(a+h)$ es nulo. Como ε es muy pequeño, la relación:

$$-\frac{F(a)}{F'(a)}$$

da un valor aproximado de h. (1)

(1) Si se desarrolla $F(a+h)$ por la fórmula de Taylor:

$$F(a+h)=F(a)+hF'(a)+\frac{h^2}{2}F''(a+\theta h), \quad 0=F(a)+hF'(a)+\frac{h^2}{2}F''(a+\theta h)$$

$$h=-\frac{F(a)}{F'(a)}-\frac{h^2}{2}\,\frac{F''(a+\theta h)}{F'(a)}$$

Tomando:

$$-\frac{F(a)}{F'(a)}$$

por valor de h se comete el error:

$$-\frac{h^2}{2}\,\frac{F''(a+\theta h)}{F'(a)}$$

cuyo máximo debe valuarse. Detenerse en la fórmula de Taylor en la primera derivada es tomar la ordenada de la tangente por ordenada de la curva, despreciando el espacio comprendido entre la tang y la curva y representado por:

$$\frac{h^2}{2}F''(a+\theta h)$$

APLICACIONES.

617. I. Sea la ecuación estudiada por Euler: (1)

$$x^x - 100 = 0$$

Sustituyendo por x los números naturales obtenemos:

$$0^0=1,\ 1^1=1,\ 2^2=4,\ 3^3=27,\ 4^4=256,\ \ldots\ldots$$

hay pues, una sola raíz real comprendida entre 3 y 4. Buscando los logaritmos vulgares de ambos miembros:

$$x\log x = 2 \quad \text{ó bien} \quad F(x)=x\log x - 2, \quad F'(x)=\log x+\log e, \quad F''(x)=\frac{\log e}{x}$$

El valor de h será:

$$h = -\frac{F(x)}{F'(x)} = -\frac{x\log x - 2}{\log x + \log e} = \frac{2 - x\log x}{\log e + \log x}$$

Primera aproximación. Hemos dicho que x está comprendida entre 3 y 4, tomemos primeramente $x=3.5$ y tendremos:

$$h = \frac{0.096}{0.978} = 0.098 \quad \text{luego} \quad x = a+h = 3.598$$

con aproximación de 3 decimales.

Segunda aproximación. Tendremos:

$$h = -\frac{0.0007082}{0.9903557} = -0.0007150966, \quad x = 3.598 - 0.0007150966 = 3.5972849$$

Tercera aproximación. Tendremos tomando $x=3.597285$:

$$h = \frac{0.00000002323}{0.9902349197} = 0.000000023458, \quad x = 3.5972850235$$

con las diez decimales correctas.

II. Resolver la ecuación:

$$x - \varepsilon \operatorname{sen} x = a$$

que se presenta en el estudio del movimiento elíptico de los planetas, cuando se busca la posición del astro en su órbita en una época dada, y en la cual a es un ángulo dado en grados, minutos y segundos; ε la excentricidad del planeta ó sea la relación entre la distancia del foco al centro y el semieje mayor de la elipse; x un ángulo por determinar.

Supongamos que se trata de la Tierra, para la cual la excentricidad vale:

$$\varepsilon = 0.01679226$$

tomemos $a = 62°28'54''.6$. Así pues, se tendrá:

$$F(x) = x - \varepsilon \operatorname{sen} x - 62°28'54''.6$$

(1) "*Instit. Calc. Diff.*" (Principios de Cálculo Diferencial). T. II.

Como en esta ecuación entran ángulos y longitudes es preciso referir todos los términos á la misma especie al efectuar las sustituciones; esta reducción de ángulos á longitudes ó viceversa, es muy fácil, y ya la han dado á conocer al lector la Geometría y Trigonometría elementales.

En la ecuación antes escrita, ε sen x es menor que x, de consiguiente, x debe ser mayor que $62°28'54''.6$ difiriendo muy poco de dicho arco. Ensayemos $x=62°$, y para ello hay que reducir previamente ε sen x á segundos. ε sen x reducido á segundos vale:

$$\frac{\varepsilon \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 1''} \quad (^1)$$

Para calcular el valor que toma esta relación para $x=62°$ se opera por logaritmos y se tiene:

$$\log \frac{\varepsilon \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 1''} = \log \frac{\varepsilon}{\operatorname{sen} 1''} + \log \operatorname{sen} x = 3.5395343 + \bar{1}.9459349 = 3.4854692$$

corresponde á:

$$3058''.2 = 50'58''.2$$

Así pues:

$$x - \varepsilon \operatorname{sen} x - 62°28'54''.6 = 62° - 0°50'58''.2 - 62°28'54''.6 = -1°19'52''.8 = -4792''.8$$

el resultado es negativo como era de esperarse, puesto que debe ser $x > a$.

Ensayemos $x = 65°$ y tendremos:

$$\log \frac{\varepsilon \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 1''} = 3.5395343 + \bar{1}.9572757 = 3.4968100 \quad \text{corresponde á} \quad 3139''.2 = 52'19''.2$$

Así pues:

$$x - \varepsilon \operatorname{sen} x - 62°28'54''.6 = 65 - 0°52'19''.2 - 62°28'54''.6 = +1°38'46''.2 = +5926''.2$$

la raíz está comprendida entre $62°$ y $65°$. Para aplicar el método de Newton, necesitamos un primer valor aproximado que deduciremos haciendo una interpolación por partes proporcionales y se tendrá:

$$K = (65° - 62°)\frac{4792.8}{10719.0} = 1°20'29''.1 \quad \text{luego} \quad x = 62° + K = 63°20'29''.1$$

(1) Se sabe en efecto que si se supone conocida la longitud del arco de $1''$ y se designa por l la longitud de un arco dado, el número de segundos de dicho arco está dado por la relación:

$$n = \frac{l}{\text{arco } 1''}$$

pero un arco de $1''$ y su seno son iguales á menos de

$$\frac{1}{10^{16}}, \quad \text{luego} \quad n = \frac{l}{\operatorname{sen} 1''}$$

y recíprocamente $l = n \operatorname{sen} 1''$. Ahora bien:

$$\operatorname{sen} 1'' = 0.0000048481368110953б, \quad \log \operatorname{sen} 1'' = \bar{6}.6855749, \quad \log \frac{1}{\operatorname{sen} 1''} = 5.3144251$$

(Se sabe que Callet para evitar las características negativas supone el radio de las tablas $= 10^{10}$).

Si sustituimos este valor en la ecuación propuesta resulta:

$$x - \varepsilon \operatorname{sen} x - 62°28'54''.6 = 63°20'29''.1 - 0°51'35''.5 - 62°28'54''.6 = -0°0'1''.0$$

la raíz está comprendida entre $63°20'29''.1$ y $65°$, mucho más próxima del primer valor que del segundo. Tomaremos, pues, este primer valor como punto de partida en oposición á la regla, (1) para aplicarle el método de Newton. La derivada vale:

$$F'(x) = 1 - \varepsilon \cos x = 1 - 0.007534 = 0.992466$$

De consiguiente:

$$h = -\frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{1''}{0.992466} = 1''.0 \quad \text{luego} \quad x = 63°20'30''.1$$

Si sustituimos este valor de x resulta $F(x) = 0$.

III. Resolver la ecuación:

$$x^2 - 10 \log x - 10 = 0$$

Hay una raíz comprendida entre 0 y 1, otra entre 1 y 10, esta segunda raíz aproximada á diezmilésimas es 4.0029.

IV. Resolver la ecuación:

$$10^x = x^{10}$$

Debe hallarse:

$$x = 10, \quad x = 1.3712883$$

618. Otras ecuaciones presentadas por muchos autores las omitimos por falta de espacio, como la ecuación $x = \operatorname{tang} x$ por ejemplo, que tiene una infinidad de raíces reales, que se presenta en Geometría, en Física, Matemática, etc., y ha sido estudiada por Euler en su "*Introduction à l'analyse infinitésimal.*" Libro II. Nos conformamos, pues, con enviar al lector á las obras especiales.

619. Finalmente, quedaría otro asunto por tratar que también nos vemos obligados á omitir, asunto delicadísimo é incierto: la existencia de raíces imaginarias en las ecuaciones trascendentes.

Sobre este asunto difícil y que carece de teoría general pueden consultarse: la "*Théorie analytique de la chaleur et analyse des équations*" de Fourier, la "*Théorie mathématique de la chaleur*" de Poisson, los "*Anciens Exercices de Mathématiques*" (1826) de Cauchy.

(1) Ya hemos advertido (párrafo 611) la precisión de modificar en las ecuaciones trascendentes los métodos de resolución de las ecuaciones algebraicas que les son aplicables.