En cuanto á la otra condición no puede tampoco verificarse, porque de ser así se tendrá: $C=0$, $D=0$, y el polinomio $F_1(x)$ contendrá, contra la hipótesis, los factores: $x-\alpha+\beta i$ y $x-\alpha+\beta i$.

Las ecuaciones (820) dan pues para M_0, N_0, valores finitos y determinados que no pueden ser nulos porque entonces resultaría: $A=0$, $B=0$, contra el supuesto de la irreductibilidad de $\frac{f(x)}{F(x)}$, pues $f(x)$ admitiría los dos valores: $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$.

Para estos valores de M_0 y N_0, el polinomio (819) viene á ser exactamente divisible por $(x-\alpha)^2+\beta^2$; llamando $\varphi(x)$ el cociente, se tendrá:

$$f(x)-(M_0x+N_0)F_1(x)=[(x-\alpha)^2+\beta^2]\varphi(x)$$

que según el valor de $F(x)$ da:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{M_0x+N_0}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}+\frac{\varphi(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}F_1(x)}$$

Falta descomponer el segundo término del segundo miembro; como $f(x)$ es á lo sumo del grado $m-1$, $\varphi(x)$ es á lo sumo del grado $m-3$, y como $F_1(x)$ es del grado $m-2n$ se deduce que $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}F_1(x)$ es del grado $m-2$. Así pues, la fracción complementaria de que se trata es análoga á $\frac{f(x)}{F(x)}$, operando en ella como se ha operado con la primera resultaría:

$$\frac{\varphi(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}F_1(x)}=\frac{M_1x+N_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}}+\frac{\psi(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-2}F_1(x)}$$

pprosiguiendo así hasta que se agotaran los factores $(x-\alpha)^2+\beta^2$ se llegaría á una fracción complementaria de la forma:

$$\frac{\omega(x)}{F_1(x)}$$

que se desarrollaría segun la naturaleza de las raíces del denominador igualado á cero.

629. **Fórmula general.** En general, descomponiendo el denominador $F(x)$ en sus factores reales (simples ó múltiples) de primero y de segundo grado de manera que se tenga:

$$F(x)=(x-a)^m(x-b)^n \ldots\ldots\ldots (x^2+px+q)^{m'}(x^2+rx+s)^{n'} \ldots\ldots\ldots$$

pudiendo los exponentes: $m, n, \ldots\ldots, m', n', \ldots\ldots$, reducirse á la unidad, el desarrollo de la fracción será en general:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^m}+\frac{A_1}{(x-a)^{m-1}}+\ldots\ldots+\frac{A_{m-1}}{(x-a)}+\frac{B_0}{(x-b)^n}+\frac{B_1}{(x-b)^{n-1}}+\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots+\frac{B_{n-1}}{x-b}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{P_0x+Q_0}{(x^2+px+q)^{m'}}+\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)^{m'-1}}+\ldots\ldots+\frac{P_{m'-1}+Q_{m'-1}}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{R_0x+S_0}{(x^2+rx+s^{n'}}+\frac{R_1x+S_1}{(x^2+rx+s)^{n'-1}}+\ldots\ldots+\frac{R_{n'-1}x+S_{n'-1}}{x^2+rx+s}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

N. B. Para la determinación de los números independientes de x, en general el método de coeficientes indeterminados es el que conviene emplear con más ventaja, cualquiera que sea la naturaleza de las raíces de $F(x)$.

630. Sea por ejemplo:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{1}{x(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{M_0x+N_0}{(x^2+1)^2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}$$

Empleando el método de coeficientes indeterminados resulta:

$$1=A(x+1)(x^2+1)^2+Bx(x^2+1)^2+(M_0x+N_0)x(x+1)+(M_1x+N_1)(x^2+x)(x^2+1)$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de x se encuentra:

$$A=1,\ B=-\tfrac{1}{4},\ M_1=-\tfrac{3}{4},\ N_1=-\tfrac{1}{4},\ M_0=-\tfrac{1}{2},\ N_0=-\tfrac{1}{2}$$

Finalmente:

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{x+1}{2(x^2+1)^2}-\frac{3x+1}{4(x^2+1)}$$

APLICACIONES.

631. I. Demostrar la descomposición:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{5x^4-13x^3+14x^2-5x+3}{(x-1)^3(x+1)x}=\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}+\frac{5}{x+1}-\frac{3}{x}$$

II. Demostrar la descomposición:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{3}{2(x+1)}-\frac{x+1}{2(x^2+1)}$$

III. Demostrar la descomposición:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{2-4x}{x^2-x-2}=-\frac{2}{x-2}-\frac{2}{x+1}$$

IV. Comprobar las descomposiciones siguientes:

(1) $$\frac{1}{x(a^2-x^2)}=\frac{1}{a^2x}-\frac{1}{2a^2(x+a)}-\frac{1}{2a^2(x-a)}$$

(2) $$\frac{3-2x}{x^2-x-2}=-\frac{1}{3(x-2)}-\frac{5}{3(x+1)}$$

(3) $$\frac{3x+4}{x^4-x^3+x^2-x}=-\frac{4}{x}+\frac{7}{2(x-1)}+\frac{x-7}{2(x^2+1)}$$

(4) $$\frac{2x^5-x^4+x^3-x^2+2x+4}{x^4-x^3+x^2-x}=2x+1+\frac{3x+4}{x^4-x^3+x^2-x}$$ (Véase ejemplo (3).

INTEGRACION DE LAS FRACCIONES RACIONALES.

632. El objeto de la descomposición de las fracciones racionales es la integración de las diferenciales correspondientes.

Vamos á indicar sucintamente los casos que se presentan.

PRIMER CASO. *Raíces reales y desiguales.*—Se tiene:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots\ldots,$$

luego:

$$\left.\begin{aligned}&\int \frac{f(x)}{F(x)}dx = \int\frac{A\,dx}{x-a} + \int\frac{B\,dx}{x-b} + \int\frac{C\,dx}{x-c} + \ldots\ldots = A\,l.(x-a) + B\,l.(x-b) + \\ &C\,l.(x-c) + \ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \quad (821)$$

SEGUNDO CASO. *Raíces reales múltiples.*—Se tiene:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^n} + \ldots\ldots + \frac{B_0}{(x-b)^p} + \ldots\ldots.$$

luego:

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{f(x)}{F(x)}dx = \int\frac{A_0\,dx}{(x-a)^n} + \ldots\ldots + \int\frac{B_0\,dx}{(x-b)^p} + \ldots\ldots = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{A_0}{(x-a)^{n-1}} - \\ &\ldots\ldots\ldots - \frac{1}{p-1}\cdot\frac{B_0}{(x-b)^{p-1}} - \ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \quad (822)$$

TERCER CASO. *Dos raíces imaginarias simples conjugadas.*—Como en este caso se trata de integrar una diferencial de la forma: $\frac{Mx+N}{(x-a)^2+\beta^2}dx$, pongamos:

$$x-a=z \quad \text{de donde} \quad x=a+z, \quad dx=dz$$

Resultará:

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{Mx+N}{(x-a)^2+\beta^2}dx = \int\frac{Mz+Ma+N}{z^2+\beta^2}dz = \int\frac{Mz\,dz}{z^2+\beta^2} + \int\frac{(Ma+N)}{z^2+\beta^2}dz = \\ &= \frac{M}{2}l.(z^2+\beta^2) + \frac{Ma+N}{\beta}\,\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{z}{\beta}\right) = \frac{M}{2}l[(x-a)^2+\beta^2] + \\ &+ \frac{Ma+N}{\beta}\,\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x-a}{\beta}\right)\end{aligned}\right\} \quad (823)$$

CUARTO CASO. *Raíces imaginarias conjugadas múltiples.*—Se tiene que efectuar la integración de una función de la forma:

$$\frac{Mx+N}{[(x-a)^2+\beta^2]^n}dx \quad (824)$$

que equivale á:

$$\frac{Mx+N}{[(x-a)^2+\beta^2]^n}dx = \frac{M(x-a)\,dx}{[(x\,a-)^2+\beta^2]^n} + \frac{(Ma+N)\,dx}{[(x-a)^2+\beta^2]^n} \quad (825)$$

Para el primer término se tiene:

$$\int\frac{M(x-a)\,dx}{[(x-a)^2+\beta^2]^n} = -\frac{M}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{[(x-a)^2+\beta^2]^{n-1}} \quad (826)$$

Para integrar el segundo término supondremos: $x-a=\beta z$ que da $dx=\beta dz$, luego:

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{(Ma+N)\,dx}{[(x-a)^2+\beta^2]^n} = \frac{Ma+N}{\beta^{2n-1}}\int\frac{dz}{(z^2+1)^n} = \frac{Ma+N}{\beta^{2n-1}}\int\frac{(1+z^2-z^2)\,dz}{(z^2+1)^n} = \\ &= \frac{Ma+N}{\beta^{2n-1}}\left[\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}} - \int\frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^n}\right] = \\ &= \frac{Ma+N}{\beta^{2n-1}}\left[\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}} - \tfrac{1}{2}\int z\,\frac{2z\,dz}{(z^2+1)^n}\right] = \\ &= \frac{Ma+N}{\beta^{2n-1}}\left[\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}} - \tfrac{1}{2}\int z.d\left(\frac{1}{(n-1)(z^2+1)^{n-1}}\right)\right] = \\ &= \frac{Ma+N}{\beta^{2n-1}}\left[\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}} - \left(\frac{-z}{2n-2}\cdot\frac{1}{(z^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}\right)\right]^{(1)} \\ &= \frac{Ma+N}{\beta^{2n-1}}\left[\frac{z}{2n-2}\cdot\frac{1}{(z^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}\right]\end{aligned}\right\} \quad (827)$$

Así pues, la determinación de la primera integral depende de la de otra de forma análoga y en la que el exponente n ha disminuído una unidad. Lo propio sucederá con ésta, y siendo n entero, se llegará finalmente á la integral:

$$\int\frac{dz}{z^2+1} = \text{arc}(\text{tang}=z)$$

Reemplazando n por $n-1$, $n-2$, ..., 2, sucesivamente, se encuentra:

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^n} = \frac{z}{2n-2}\cdot\frac{1}{(z^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}$$

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}} = \frac{z}{2n-4}\cdot\frac{1}{(z^2+1)^{n-2}} + \frac{2n-5}{2n-4}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-2}}$$

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}} = \frac{z}{2n-6}\cdot\frac{1}{(z^2+1)^{n-3}} + \frac{2n-7}{2n-6}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-3}}$$

....

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^2} = \frac{z}{2}\cdot\frac{1}{z^2+1} + \tfrac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2+1}$$

Agregando estas $n-1$ ecuaciones miembro á miembro después de haberlas multiplicado respectivamente por los factores:

$$1, \quad \frac{2n-3}{2n-2}, \quad \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)\ldots\ldots3}{(2n-2)(2n-4)(2n-6)\ldots\ldots4}$$

(1) La expresión del paréntesis interior resulta integrando por partes.

resulta después de reducir:

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \frac{z}{(2n-2)(z^2+1)^{n-1}}\left(1+\frac{2n-3}{2n-4}(z^2+1)+\frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-4)(2n-6)}(z^2+1)^2+\right.$$

$$\left.\ldots\ldots+\frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)\ldots 3}{(2n-4)(2n-6)(2n-8)\ldots 2}(z^2+1)^{n-2}\right)+\frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)\ldots 3.1}{(2n-2)(2n-4)(2n-6)\ldots 4.2}\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=z)$$

Multiplicando este resultado que llamaremos R por

$$\frac{M\alpha+N}{\beta^{2n-1}}$$

después de reemplazar en él z por $x-\alpha$ y sustituyendo en (825) resultará:

$$\int \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}dx = -\frac{M}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}}+\frac{M\alpha+N}{\beta^{2n-1}}\cdot R \qquad (828)$$

633. NOTAS. 1ª Como se comprende en todos los casos, debe atenderse á la constante arbitraria que acompaña á toda integral indefinida.

2ª Obsérvese que cuando se emplean las simplificaciones que hacen desaparecer las imaginarias, la integral de una diferencia racional se expresa siempre por funciones algebraicas, logarítmicas y circulares.

APLICACIONES.

634. I. Comprobar los desarrollos:

(1) $$\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+1)^2} = l.x - \tfrac{1}{4}l.(x+1) - \frac{1-x}{4(x^2+1)} - \tfrac{3}{8}l(x^2+1) - \tfrac{1}{2}\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=x)+C$$

(2) $$\int \frac{x^2dx}{x^5+2x^4-2x^3-4x^2+x+2} = \int \frac{x^2dx}{(x^2-1)^2(x+2)} = \frac{1}{18}\,l\,\frac{(x-1)(x+2)^8}{(x+1)^9} -$$

$$-\tfrac{1}{6}\frac{2x-2}{x^2-1}+C$$

(3) $$\frac{x\,dx}{x^3-1} = \tfrac{1}{2}\left[l.\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}+\sqrt{3}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]+C$$

II. Comprobar los desarrollos:

(1) $$\int \frac{dx}{1-x^6} = \tfrac{1}{6}l.\frac{1+x}{1+x}\sqrt{\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}\right)+C$$

(2) $$\int \frac{dx}{1-x^4} = \tfrac{1}{4}l.\frac{1+x}{1-x}+\tfrac{1}{2}\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=x)+C$$

(3) $$\int \frac{(x^2-x+1)\,dx}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{1}{x+1}+\tfrac{3}{4}l.(x+1)+\tfrac{1}{4}l.(x-1)+C$$

(4) $$\int \frac{x\,dx}{x^3+1} = \tfrac{1}{3}\left[l.\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x+1}+\sqrt{3}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]+C$$

III. Comprobar los desarrollos:

(1) $$\frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3} = \frac{2-2x-5x^2}{4x^2(1+x)}+\tfrac{1}{8}l.\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)+l.\left(\frac{x+1}{x}\right)-\tfrac{1}{4}\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=x)+C$$

(2) $$\int \frac{dx}{x^2-5x+6} = l.\frac{x-3}{x-2}+C$$

OBSERVACIÓN.

635. La fórmula (828) tiene una excepción, cuando $n=1$, porque entonces:

$$2(n-1)=0$$

lo que hace infinito el primer término de la serie. Esto se remedia acudiendo á la fórmula del caso de dos raíces imaginarias conjugadas para la integración de la fracción:

$$\frac{M_{m-1}x+N_{m-1}}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx$$

Se explica la excepción, considerando que las fórmulas anteriores se han obtenido bajo el concepto de que haya raíces iguales, y cuando $n=1$ la hipótesis no es admisible.