CAPÍTULO V.

SERIES RECURRENTES.

Preliminares.—Criterio para conocer si una serie es recurrente.—Término general.—Suma de las series recurrentes.—Aplicaciones.

PRELIMINARES.

636. El estudio de las series recurrentes deriva inmediatamente del de las fracciones racionales y sucintamente vamos á emprenderlo.

Sea la fracción desarrollada:

$$\frac{a}{a'+b'x}=\frac{a}{a'}-\frac{ab'x}{a'^2}+\frac{ab'^2x^2}{a'^3}-\ldots.. \tag{829}$$

La serie que constituye el segundo miembro, está constituída por términos de los que cada uno se forma del anterior multiplicado por $-\frac{b'}{a'}x$; la citada serie, cuyos términos necesitan de los anteriores para formarse, se llama *recurrente* y es de primer orden porque sólo un término constituye la *escala de relación* que es el nombre que se da á

$$-\frac{b'}{a'}$$

Si se tiene:

$$\frac{a+bx}{a'+b'x+c'x^2}=A+Bx+Cx^2+\ldots\ldots...$$

Aplicando el método de los coeficientes indeterminados resultará:

$$A=\frac{a}{a'},\ B=\frac{b-Ab'}{a'},\ C=-\frac{c'}{a'}A-\frac{b'}{a'}B,\ D=-\frac{c'}{a'}B-\frac{b'}{a'}C,\ \text{etc.}$$

Partiendo del tercer término del desarrollo en adelante, cada término es igual á la suma de los dos anteriores multiplicados por:

$$\left(-\frac{c'}{b'}x^2,\ -\frac{b'}{a'}x\right)$$

y la serie *recurrente* será de segundo orden siendo la escala de relación:

$$\left(-\frac{c'}{a'},\ -\frac{b'}{a'}\right)$$

Si se tiene:

$$\frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x+c'x^2+d'x^3}$$

cada término del desarrollo, del cuarto en adelante, es la suma de los tres anteriores multiplicados respectivamente por:

$$\left(-\frac{d'}{a'}x^3,\ -\frac{c'}{a'}x^2,\ -\frac{b'}{a'}x\right)$$

siendo la serie *recurrente* de tercer orden.

Finalmente, toda fracción racional de la forma:

$$\frac{a+bx+cx^2+\ldots\ldots+kx^{m-1}}{a'+b'x+c'x^2+\ldots\ldots+k'x^{m-1}+l'x^m}$$

engendra un desarrollo en el que todo coeficiente del $m+1$ en adelante se origina por la suma de los m anteriores multiplicados respectivamente por:

$$\left(-\frac{l'}{a'}x^m,\ -\frac{k'}{a'}x^{m-1},\ \ldots\ldots,-\frac{c'}{a'}x^2,\ -\frac{b'}{a'}a\right)$$

La serie es recurrente (1) de orden m y la *escala de relación* es:

$$\left(-\frac{l'}{a'},-\frac{k'}{a'},\ \ldots\ldots,-\frac{c'}{a'},-\frac{b'}{a'}\right)$$

CRITERIO PARA CONOCER SI UNA SERIE ES RECURRENTE.

637. **Determinación de la escala de relación.—Regla de Lagrange.** (2) La regla de Lagrange para conocer si una serie propuesta es recurrente se funda en las siguientes consideraciones preparatorias:

1ª Si la serie S es recurrente de primer orden, procede de una fracción de la forma:

$$\frac{a}{a'+b'x}$$

Pero se tiene:

$$\frac{a'+b'x}{a}=\frac{a'}{a}+\frac{b'}{a}x=p+qx$$

lo que prueba que $\frac{1}{S}$ ó sea la fracción invertida debe dar por cociente una fracción entera en x y de

(1) *Recurrente* quiere decir que remonta hasta su origen.
(2) En las Memorias de la Academia de Ciencias de Paris.—1872.

la forma: $p+qx$. De no efectuarse exactamente esta división, la serie (supuesta recurrente) es de orden superior.

2ª Si S es una serie recurrente de segundo orden procede de una fracción de la forma:

$$\frac{a+bx}{a'+b'x+c'x^2}$$

Pero se tiene:

$$\frac{1}{S}=\frac{a'+b'x+c'x^2}{a+bx}=\frac{a'}{a}+\frac{ab'-a'b}{a^2}+\frac{a^2c'-b(ab'-ba')}{a^2(a+bx)}x^2=p+qx+\frac{k}{a+bx}x^2$$

Así pues, $\frac{1}{S}$ debe dar un cociente entero en x de la forma $p+qx$, más un producto de x^2 por una serie recurrente de primer orden.

Así pues, designando por $S'x^2$ el resto que se obtiene después de haber dividido $\frac{1}{S}$ y obtenido el cociente exacto $p+qx$, debe encontrarse $\frac{S}{S'}$ igual á un cociente exacto de la forma:

$$p'+q'x$$

y así sucesivamente.

Fundado en estas consideraciones, LAGRANGE ha dado la regla siguiente para reconocer si una serie propuesta es recurrente:

Sea:

$$S=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\dots\dots\dots$$

la serie propuesta.

1º *Divídase* $1\div S$, *continuando la operación* hasta obtener un cociente de la forma $p+qx$ y un resto de la forma $S'x^2$ (siendo S' una serie indefinida de la forma $A'+B'x+C'x^2+\dots\dots$)

2º *Divídase* $S\div S'$ *continuando la operación* hasta obtener un cociente de la forma $p'+q'x$ y un resto $S''x^2$ (siendo $S''=A''+B''x+C''x^2+\dots\dots$).

3º *Divídase* $S'\div S''$ *continuando la operación* hasta obtener un cociente $p''+q''x$ y un resto $S'''x^2$.

Prosiguiendo sucesivamente, cuando una de estas divisiones se efectue exactamente, la serie propuesta es recurrente y su orden es del rango de la división que se ha efectuado exactamente.

Supongamos una serie que con la tercera división da un cociente exacto; el cuadro de operaciones será:

$$\frac{1}{S}=p+qx+\frac{S'}{S}x^2,\quad \frac{S}{S'}=p'+q'x+\frac{S''}{S'}x^2,\quad \frac{S'}{S''}=p''+q''x$$

Deduciendo de la última ecuación el valor de $\frac{S''}{S'}$ y sustituyéndolo en la anterior resulta:

$$\frac{S''}{S'}=\frac{1}{p''+q''x},\quad \frac{S}{S'}=p'+q'x+\frac{x^2}{p''+q''x}=\frac{(p'+q'x)(p''x+q''x)+x^2}{p''+q''x}$$

ó bien:

$$\frac{S'}{S}=\frac{p''+q''x}{(p'+q'x)(p''+q''x)+x^2}$$

Sustituyendo en la primera:

$$\frac{1}{S}=\frac{(p+qx)(p'+q'x)(p''+q''x)+(p+qx)x^2+(p''+q''x)x^2}{(p'+q'x)(p''+q''x)+x^2}$$

Finalmente:

$$S=\frac{(p'+q'x)(p''+q''x)+x^2}{(p+qx)(p'+q'x)(p''+q''x)+(p+qx)x^2+(p''+q''x)x^2}$$

que es de la forma:

$$S=\frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x+c'x^2+d'x^3}$$

y cuya escala de relación es:

$$\left(-\frac{b'}{a'},\ -\frac{c'}{a'},\ -\frac{d'}{a'}\right)$$

APLICACIÓN.

638. Sea la serie:

$$S=1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5+28x^6+36x^7+\dots\dots\dots$$

Aplicando la regla se forma el cuadro de operaciones:

$$\frac{1}{S}=\frac{1}{1+3x+\dots}=1-3x+\frac{S'}{S}x^2,\quad S'=3+8x+15x^2+24x^3+35x^4+\dots\dots$$

$$\frac{S}{S'}=\frac{1+3x+\dots}{3+8x+\dots}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}x+\frac{x^2}{9}\cdot\frac{S''}{S'},\quad S''=1+3x+6x^2+10x^3+\dots\dots\dots$$

$$\frac{S'}{S''}=\frac{3+8x+\dots\dots}{1+3x+6x^2+\dots\dots}=3-x$$

la serie es pues *recurrente de tercer orden*.

Para obtener la escala de relación se tiene:

$$\frac{1}{S'}=1-3x+\frac{S'}{S}x^2,\quad \frac{S}{S'}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}x+\frac{S''}{S'}\cdot\frac{x^2}{9},\quad \frac{S'}{S''}=3-x$$

Así pues:

$$\frac{S''}{S'}=\frac{1}{3-x},\quad \frac{S}{S'}=\frac{3+x}{9}+\frac{x^2}{9}\cdot\frac{1}{3-x},\quad \frac{1}{S}=1-3x+3x^2-x^3$$

Finalmente:

$$S=\frac{1}{1-3x+3x^2-x^3}=\frac{1}{(1-x)^3}$$

La escala de relación es, pues:

$$(3,\ -3,\ 1)$$

Si la serie fuese:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, ...

la escala de relación sería:

$$(3,\ -3,\ 1)$$

El término 28, por ejemplo, se compone de:

$$21.3+15.-3+10.1=28$$

TERMINO GENERAL.

639. I. Tomaremos primeramente la fracción:

$$\frac{a}{a'+b'x} \tag{830}$$

que como se sabe da una serie recurrente de primer orden.

El desarrollo (829) hace ver que equivale á una progresión geométrica cuyo primer término es $\frac{a}{a'}$ siendo la razón $-\frac{b'}{a'}x$; así pues, el término general es:

$$\mathrm{T}=\frac{a}{a'}\left(-\frac{a'}{b'}x\right)^{n-1} \tag{831}$$

II. Sea la fracción:

$$\frac{a+bx}{a'+b'x+c'x^2} \tag{832}$$

que suponiendo:

$$\frac{a}{c'}=\alpha,\quad \frac{b}{c'}=\beta,\quad \frac{a'}{c'}=\alpha',\quad \frac{b'}{c'}=\beta'$$

puede escribirse de la manera siguiente:

$$\frac{\alpha+\beta x}{\alpha'+\beta' x+x^2} \tag{833}$$

Supongamos que se tiene:

$$x^2+\beta' x+\alpha'=(x-p)(x-q)=0$$

y resultará:

$$\frac{\alpha+\beta x}{\alpha'+\beta' x+x^2}=\frac{\mathrm{A}}{x-p}+\frac{\mathrm{B}}{x-q} \tag{834}$$

Las fracciones del segundo miembro dan lugar cada una á una serie recurrente de primer orden, y la suma de sus *términos generales* será el *término general* de la propuesta.

Determinando en (834) á A y B se tiene:

$$\mathrm{A}=\frac{\beta p+\alpha}{p-q},\quad \mathrm{B}=-\frac{\beta q+\alpha}{p-q} \tag{835}$$

Comparando las fracciones que entran en (834) con la (830) y atendiendo á la ecuación (831) se tendrá para expresiones de sus respectivos términos generales:

$$-\frac{\mathrm{A}}{p}\left(\frac{1}{p}x\right)^{n-1},\quad -\frac{\mathrm{B}}{q}\left(\frac{1}{q}x\right)^{n-1}$$

Sumándolos:

$$\mathrm{T}=-\left(\frac{\mathrm{A}}{p^n}+\frac{\mathrm{B}}{q^n}\right)x^{n-1} \tag{836}$$

expresión en la que sólo falta sustituir por A y B sus valores:

APLICACIÓN.

640. Sea por ejemplo:

$$\frac{3-2x}{3+2x-x^2}$$

Que equivale á:

$$\frac{-3+2x}{x^2-2x-3}=\frac{\mathrm{A}}{x-3}+\frac{\mathrm{B}}{x+1}$$

en donde:

$$\mathrm{A}=\tfrac{3}{4},\quad \mathrm{B}=\tfrac{5}{4}$$

La fórmula (836) será:

$$\mathrm{T}=-\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{(-1)^n}\right)x^{n-1}$$

Si $n=1$, esta expresión es: $-\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\right)x^0=+1$

„ $n=2$, „ „ „ $-\left(\frac{1}{4.3}+\frac{5}{4}\right)x=-\frac{4}{3}x$

„ $n=3$, „ „ „ $-\left(\frac{1}{4.3^2}-\frac{5}{4}\right)x^2=+\frac{11}{9}x$

„ $n=4$, „ „ „ $-\left(\frac{1}{4.3^3}+\frac{5}{4}\right)x^3=-\frac{34}{27}x^3$

....

Así pues:

$$\frac{3-2x}{3+2x-x^2}=1-\frac{4}{3}x+\frac{11}{9}x^2-\frac{34}{27}x^3+\dots..$$

Se obtiene, pues, el desarrollo de la fracción propuesta, pero la *gran ventaja* de la determinación del *término general* estriba esencialmente en conocer un término de rango cualquiera sin necesidad de formar precisamente los anteriores.

641. **Casos particulares.** 1.º Cuando las raíces p y q son iguales A y B son infinitos y se procede así:

$$\frac{\alpha+\beta x}{(x-p)^2}=\frac{\alpha}{(x-p)^2}+\frac{\beta x}{(x-p)^2}=\frac{\alpha}{(x-p)^2}+\frac{\beta(x-p)}{(x-p)^2}+\frac{\beta p}{(x-p)^2}$$

$$=\frac{\alpha+\beta p}{(x-p)^2}+\frac{\beta}{x-p} \tag{836'}$$

El segundo término da lugar á una serie recurrente de primer orden cuyo término general es:

$$-\left(\frac{\beta}{p^n}\right)x^{n-1}$$

El primer término equivale á:

$$(\alpha+\beta p)(p-x)^{-2}=\frac{\alpha+\beta p}{p^2}\left(1-\frac{x}{p}\right)^{-2}=\frac{\alpha+\beta p}{p^2}\left(1+\frac{2x}{p}+\frac{3x^2}{p^2}+\frac{4x^3}{p^3}+\dots\dots\right.$$

$$\left.\dots\dots+\frac{nx^{n-1}}{p^{n-1}}+\dots\dots\right)$$

Así pues, el término general de este segundo miembro es:

$$\frac{\alpha+\beta p}{p^2}\cdot\frac{nx^{n-1}}{p^{n-1}}=\frac{n(\alpha+\beta p)}{p^{n+1}}x^{n-1}$$