Finalmente, el término general de (836') será:

$$T=\left[\frac{n(\alpha+\beta p)}{p^{n+1}}-\frac{\beta}{p^n}\right]x^{n-1}=\frac{n\alpha+(n-1)\beta p}{p^{n+1}}x^{n-1}$$

2º Cuando p y q son imaginarias, para que la expresión del término general quede excluída de imaginarias se procede así:

Reemplazando en (836) por A y B sus valores, se tiene:

$$\frac{(\beta q+\alpha)p^n-(\beta p+\alpha)q^n}{p^nq^n(p-q)}x^{n-1}=\left(\frac{\alpha(p^n-q^n)}{p^nq^n(p-q)}+\frac{\beta(p^{n-1}-q^{n-1})}{p^{n-1}q^{n-1}(p-q)}x^{n-1}\right)$$

Si pues se tiene $p=r+s\sqrt{-1}$ necesariamente $q=r-s\sqrt{-1}$ y por consiguiente:

$$pq=r^2+s^2,\quad p^nq^n=(r^2+s^2)^n,\quad p^{n-1}q^{n-1}=(r^2+s^2)^{n-1}$$

$$p-q=2s\sqrt{-1},\quad p^n-q^n=(r+s\sqrt{-1})^n-(r-s\sqrt{-1})^n=2k\sqrt{-1}$$

$$p^{n-1}-q^{n-1}=2k'\sqrt{-1}$$

El término general será, pues:

$$T=\left[\frac{2\alpha k\sqrt{-1}}{(r^2+s^2)^n 2s\sqrt{-1}}+\frac{2\beta k'\sqrt{-1}}{(r^2+s^2)^{n-1}2s\sqrt{-1}}\right]x^{n-1}=$$

$$=\left[\frac{\alpha k}{s(r^2+s^2)^n}+\frac{\beta k'}{s(r^2+s^2)^{n-1}}\right]x^{n-1}$$

expresión desembarazada de imaginarias.

642. N. B. Vemos pues que la determinación del término general relativo á una serie recurrente de segundo orden conduce á la descomposición de una fracción racional en fracciones simples, cuestión ya tratada.

SUMA DE LAS SERIES RECURRENTES.

643. Dividamos el estudio en dos partes.

1ª Determinar la suma de los términos de la serie entera, es decir, la fracción generatriz que la ha originado.

2ª Determinar la suma de un número limitado de términos.

I. Sea la serie:

$$u_1+u_2+u_3+\dots\dots+u_n+u_{n+1}+\dots\dots$$

que supongamos para más facilidad que es recurrente de tercer orden, y llamaremos α, β, γ las cantidades que constituyen la *escala de relación*.

Evidentemente tendremos:

$$u_4=u_1\alpha+u_2\beta+u_3\gamma$$
$$u_5=u_2\alpha+u_3\beta+u_4\gamma$$
$$u_6=u_3\alpha+u_4\beta+u_5\gamma$$

Sumándolas resulta, llamando S la suma de la serie:

$$S-u_1-u_2-u_3=\alpha S+\beta(S-u_1)+\gamma(S-u_1-u_2)$$

que da:

$$S=\frac{(u_1+u_2+u_3)-\beta u_1-\gamma(u_1+u_2)}{1-\alpha-\beta-\gamma} \qquad (837)$$

644. Sea por ejemplo:

$$1-2x+3x^2-10x^3+22x^4-51x^5+125x^6+\dots\dots$$

como se tiene: $\alpha=-3x^3$, $\beta=2x^2$, $\gamma=-x$, se tiene:

$$S=\frac{(1-2x+3x^2)-2x^2+x(1-2x)}{1+3x^3-2x^2+x}=\frac{1-x-x^2}{1+3x^3-2x^2+x}$$

N. B. Cuando en las series recurrentes se escapan de la ley que las rige los dos ó tres primeros términos, puede provenir de que la fracción que las origina tiene el numerador de mayor grado que el denominador.

645. Sea:

$$1+x+x^2+3x^3+5x^4+9x^5+17x^6+\dots\dots$$

como $\alpha=x^3$, $\beta=x^2$, $\gamma=x$, resulta:

$$S=\frac{1+x+x^2-x^2-x(1+x)}{1-x^3-x^2-x}=\frac{1-x^2}{1-x^3-x^2-x}$$

II. En la fórmula anterior sólo entran los primeros términos de la serie y las cantidades que constituyen la escala de relación, pero si se trata de conocer la *suma de un número determinado de términos* es preciso conocer los últimos términos de la serie. (Es claro que tanto en el caso anterior como en este tratamos de series convergentes).

Supongamos una serie de tercer orden:

$$u_1+u_2+u_3+\dots\dots+u_{n-6}+u_{n-5}+u_{n-4}u_{n-3}+\dots\dots\dots$$

Tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} u_4\ =u_1\ \alpha+u_2\ \beta+u_3\ \gamma \\ u_5\ =u_2\ \alpha+u_3\ \beta+u_4\ \gamma \\ u_6\ =u_3\ \alpha+u_4\ \beta+u_5\ \gamma \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{n-3}=u_{n-6}\alpha+u_{n-5}\beta+u_{n-4}\gamma \end{array}\right\} \qquad (838)$$

(El número de relaciones es igual al número de términos de que se busca la suma menos 3).

Snmando estas relaciones:

$$S-(u_1+u_2+u_3)=\alpha(S-u_{n-3}-u_{n-4}-u_{n-5})+\beta(S-u_1-u_{n-3}-u_{n-4})+$$
$$+\gamma(S-u_1-u_2-u_{n-3})$$

lo que da:

$$S=\frac{u_1+u_2+u_3-\alpha(u_{n-3}+u_{n-4}+u_{n-5})-\beta(u_1+u_{n-3}+u_{n-4})-\gamma(u_1+u_2+u_{n-3})}{1-\alpha-\beta-\gamma} \qquad (839)$$

N. B. 1º Análogamente se obtendrán las fórmulas de las sumas relativas á una serie recurrente de un órden cualquiera.

2º Comparando á esta fórmula la del caso anterior vemos que se deduce de la que acabamos de obtener, despreciando los términos en que entra u_{n-5}, u_{n-4}, u_{n-3}, etc.

3º Para aplicar la fórmula (837) del caso anterior es suficiente, como hemos dicho, conocer los tres primeros términos y la escala de relación, mientras que para usar la (839) es preciso conocer las expresiones de los tres términos que preceden á aquel en que se detiene la serie, lo que obliga á conocer el *término general*.

4º De un modo semejante á este es como obtiene Tomás Simpson sus fórmulas para resolver estas cuestiones.

APLICACIONES.

646. Sea por ejemplo la serie recurrente de tercer órden:

$$1,\ 2,\ 3,\ 9,\ 23,\ 58,\ 148,\ 377,\ 960,\ 2445,\ 6227,\ \ldots\ldots\ldots$$

en que se tiene para los 11 primeros términos:

$$a=1,\quad \beta=1,\quad \gamma=2$$

$$u_1=1,\ u_2=2,\ u_3=3,\ u_{n-3}=6227,\ u_{n-4}=2445,\ u_{n-5}=960$$

resultará para la suma de los 11 primeros términos:

$$S=\frac{6-(9632)-(8673)-2(6230)}{-3}=10253$$

Si se pidiese la suma de los 50 primeros términos sería largo el cálculo, st no se supiese determinar el término general.

Para proceder de la última manera (como vamos á ver, no por eso habrá ahorro de cálculos) aplicando el procedimiento explicado poco antes se efectuarán las siguientes operaciones:

1º *Se comenzará por escribir así la serie:*

$$1+2x+3x^2+9x^3+23x^4+58x^5+\ldots\ldots\ldots$$

2º *Se buscará la fracción generatriz de esta serie.*

3º *Se descompondrá en tres fracciones simples, para cada una de las cuales se obtendrá un término general.*

4º *Se sumarán estos tres términos generales y se obtendrá el de la serie.*

$$1+2x+3x^2+\ldots\ldots\ldots$$

5º *Finalmente, suponiendo $x=1$ se tendrá el término general de la serie propuesta.*

$$1+2+3+9+\ldots\ldots\ldots$$

Como es fácil comprender, á menudo estos cálculos son impracticables.

En efecto, aplicando á la serie:

$$1+2x+3x^2+\ldots\ldots\ldots$$

la fórmula (837) y suponiendo:

$$u_1=1,\ u_2=2x,\ u_3=3x^2,\ a=x^3,\ \beta=x^2,\ \gamma=2x$$

resultará:

$$S=\frac{1-2x^2}{1-2x-x^2-x^3}$$

Como el denominador sólo admite raíces *inconmensurables*, la descomposición en fracciones simples no puede ser exacta, etc.

647. Para amplificaciones en que no podemos entrar, recomendamos al lector los trabajos que LAGRANGE ha publicado sobre esta cuestión en las "*Mémoires de l'Academie de Sciences de Paris.*"

NOTAS.

I

Teorema de d'Alembert. (1)

1. *Toda ecuación de la forma:*

$$F(z)=0$$

en la cual $F(z)$ representa un polinomio entero de coeficientes reales ó imaginarios de la forma:

$$a+\beta\sqrt{-1}$$

admite necesariamente una raíz de la misma forma.

Este teorema, que es el principio fundamental de la teoría de las ecuaciones, se ha atribuído frecuentemente á CAUCHY; pero he aquí lo que dice GAUSS sobre el asunto en una Memoria publicada en 1799:

"Prima theorematis demonstratio illustri geometræ d'Alembert debetur (*Recherches sur le Calcul Integral. Histoire de l'Académie de Berlin*, año 1746, pág. 182, etc.). Eadem exstat in Bougainville (*Traité de Calcul Integral.* Paris, 1854, pág. 47, etc.).

CAUCHY nació en 1789, y de consiguiente contaba sólo 10 años en la época de la aparición de la Memoria á que hemos aludido. (2)

(1) Véase Capítulo I, Segunda Parte, párrafo 850.

(2) D'ALEMBERT, nacido en Paris el 16 de Noviembre de 1716, usaba como nombre *Jean le Rond*, porque hijo natural del caballero Destouches-Canon y de Mme. de Tencin, fué recogido y educado por un pobre vidriero ROUSSEAU, que á la sazón lo encontró abandonado por los autores de sus dias bajo el pórtico de la pequeña iglesia de Saint Jean le Rond, destruída en tiempo de la Revolución.

"Este mísero ser, adoptado por un pobre vidriero, pronto fué un hombre, y este hombre, uno de los geómetras más insignes de los tiempos modernos: enriqueció el análisis matemático con métodos tan fecundos cuanto elegantes, hizo converger hacia un solo principio la Mecánica entera, estudió la teoría de las perturbaciones y la de la forma de los cuerpos celestes, resolvió el problema de la precesión que Newton no había podido resolver, escribió el prefacio de la Enciclopedia, preparó la ruina de todas las supersticiones y, en una palabra, fué uno de los precursores de la Revolución. Se llamó d'Alembert!—(E. AMIGUES. "*A Travers le Ciel.*")

"Si un origen tan obscuro envilecía al pronóstico, no hay que perder de vista que los antecesores natos de un