APLICACIONES.

646. Sea por ejemplo la serie recurrente de tercer órden:

$$1,\ 2,\ 3,\ 9,\ 23,\ 58,\ 148,\ 377,\ 960,\ 2445,\ 6227,\ \ldots\ldots\ldots$$

en que se tiene para los 11 primeros términos:

$$\alpha=1,\quad \beta=1,\quad \gamma=2$$

$$u_1=1,\ u_2=2,\ u_3=3,\ u_{n-3}=6227,\ u_{n-4}=2445,\ u_{n-5}=960$$

resultará para la suma de los 11 primeros términos:

$$S=\frac{6-(9632)-(8673)-2(6230)}{-3}=10253$$

Si se pidiese la suma de los 50 primeros términos sería largo el cálculo, st no se supiese determinar el término general.

Para proceder de la última manera (como vamos á ver, no por eso habrá ahorro de cálculos) aplicando el procedimiento explicado poco antes se efectuarán las siguientes operaciones:

1º *Se comenzará por escribir así la serie:*

$$1+2x+3x^2+9x^3+23x^4+58x^5+\ldots\ldots\ldots$$

2º *Se buscará la fracción generatriz de esta serie.*

3º *Se descompondrá en tres fracciones simples, para cada una de las cuales se obtendrá un término general.*

4º *Se sumarán estos tres términos generales y se obtendrá el de la serie.*

$$1+2x+3x^2+\ldots\ldots\ldots$$

5º *Finalmente, suponiendo $x=1$ se tendrá el término general de la serie propuesta.*

$$1+2+3+9+\ldots\ldots\ldots$$

Como es fácil comprender, á menudo estos cálculos son impracticables.

En efecto, aplicando á la serie:

$$1+2x+3x^2+\ldots\ldots\ldots$$

la fórmula (837) y suponiendo:

$$u_1=1,\ u_2=2x,\ u_3=3x^2,\ \alpha=x^3,\ \beta=x^2,\ \gamma=2x$$

resultará:

$$S=\frac{1-2x^2}{1-2x-x^2-x^3}$$

Como el denominador sólo admite raíces *inconmensurables*, la descomposición en fracciones simples no puede ser exacta, etc.

647. Para amplificaciones en que no podemos entrar, recomendamos al lector los trabajos que LAGRANGE ha publicado sobre esta cuestión en las "*Mémoires de l'Academie de Sciences de Paris.*"

NOTAS.

I

Teorema de d'Alembert. (1)

1. *Toda ecuación de la forma:*

$$F(z)=0$$

en la cual F(z) *representa un polinomio entero de coeficientes reales ó imaginarios de la forma:*

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}$$

admite necesariamente una raíz de la misma forma.

Este teorema, que es el principio fundamental de la teoría de las ecuaciones, se ha atribuído frecuentemente á CAUCHY; pero he aquí lo que dice GAUSS sobre el asunto en una Memoria publicada en 1799:

"Prima theorematis demonstratio illustri geometræ d'Alembert debetur (*Recherches sur le Calcul Integral. Histoire de l'Académie de Berlin*, año 1746, pág. 182, etc.). Eadem exstat in Bougainville (*Traité de Calcul Integral.* Paris, 1854, pág. 47, etc.).

CAUCHY nació en 1789, y de consiguiente contaba sólo 10 años en la época de la aparición de la Memoria á que hemos aludido. (2)

(1) Véase Capítulo I, Segunda Parte, párrafo 850.

(2) D'ALEMBERT, nacido en Paris el 16 de Noviembre de 1716, usaba como nombre *Jean le Rond*, porque hijo natural del caballero Destouches-Canon y de Mme. de Tencin, fué recogido y educado por un pobre vidriero ROUSSEAU, que á la sazón lo encontró abandonado por los autores de sus dias bajo el pórtico de la pequeña iglesia de Saint Jean le Rond, destruída en tiempo de la Revolución.

"Este mísero ser, adoptado por un pobre vidriero, pronto fué un hombre, y este hombre, uno de los geómetras más insignes de los tiempos modernos: enriqueció el análisis matemático con métodos tan fecundos cuanto elegantes, hizo converger hacia un solo principio la Mecánica entera, estudió la teoría de las perturbaciones y la de la forma de los cuerpos celestes, resolvió el problema de la precesión que Newton no había podido resolver, escribió el prefacio de la Enciclopedia, preparó la ruina de todas las supersticiones y, en una palabra, fué uno de los precursores de la Revolución. Se llamó d'Alembert!—(E. AMIGUES. "*A Travers le Ciel.*")

"Si un origen tan obscuro envilecía al pronóstico, no hay que perder de vista que los antecesores natos de un

Varias demostraciones existen del citado teorema: GAUSS discute en su Memoria las de D'ALEMBERT, EULER, FONCENEX y LAGRANGE, y propone la suya que se presta, no obstante su alto mérito, á serias objeciones. ARGAND y MOUREY han propuesto otra en las cbras que ya hemos citado en uno de los párrafos de nuestra obra. Finalmente, entre las demostraciones más notables hay que conceder la supremacía á la de CAUCHY, (*Anciens Exercices de Mathematiques*) adoptada y simplificada por J. A. SERRET en su "*Cours d'Algebre Supérieure*" (1866) La circunstancia de ser dicha demostración la más directa y menos escabrosa de las que se mencionan, es sin duda á lo que se debe el que algunos hayan atribuido á CAUCHY el patrocinio del teorema.

Esta demostración de CAUCHY, simplificada por SERRET, es la que á continuación exponemos.

Comenzaremos por demostrar un *Lema* previo:

LEMA. *Sea una función entera cualquiera de grado* m *y coeficientes reales ó imaginarios:*

$$F(z)=A_0z^m+A_1z^{m-1}+\ldots\ldots\ldots+A_{m-1}z+A_m=0 \tag{1}$$

Si el módulo de $F(z)$ *no es igual á cero para un cierto valor real ó imaginario de la variable* $z=z_0$, *se puede determinar una cantidad* h *real ó imaginaria, tal que el módulo de* $F(z_0+h)$ *sea inferior al de* $F(z)$. Desarrollando $F(z_0+h)$ por la fórmula de TAYLOR tendremos:

$$F(z_0+h)=F(z_0)+F'(z_0)\frac{h}{1}+F''(z_0)\frac{h^2}{1.2}+\ldots\ldots+F^m(z_0)\frac{h^m}{1.2\ldots m} \tag{2}$$

El primer término $F(z_0)$ existe, pues, por hipótesis, su módulo no es nulo; los coeficientes intermedios pueden anularse y hacer desaparecer los términos correspondientes, el último término existe como el primero, pues su coeficiente es igual al coeficiente A_0 del primer término de $F(z)$. Representando por $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\ldots, Z_m$ los diversos coeficientes del desarrollo (2) y por Z_n el primer coeficiente que después de z_0 no es nulo, tendremos:

$$F(z_0+h)=Z_0+Z_nh^n+Z_{n+1}h^{n+1}+\ldots\ldots+Z_mh^m \tag{3}$$

luego:

$$\frac{F(z_0+h)}{F(z_0)}=1+\frac{Z_n}{Z_0}h^n+\frac{Z_{n+1}}{Z_0}h^{n+1}+\ldots\ldots+\frac{Z_m}{Z_0}h^m \tag{4}$$

Poniendo:

$$h=r(\cos a+\operatorname{sen} a.i),\ \frac{Z_p}{Z_0}=\rho_p(\cos\omega_p+\operatorname{sen}\omega_p.i) \tag{5}$$

se tendrá:

$$\frac{F(z_0+h)}{F(z_0)}=1+\rho_nr^n[\cos(na+\omega_n)+\operatorname{sen}(na+\omega_n).i]+\ldots\ldots+$$
$$+\rho_mr^m[\cos(ma+\omega_m)+\operatorname{sen}(ma+\omega_m).i]$$

Si se determina el argumento a por la condición $na+\omega_n=\pi$, el paréntesis que multiplica á ρ_nr^n se reduce á -1 y se tendrá:

$$\frac{F(z_0+h)}{F(z_0)}=(1-\rho_nr^n)+\rho_{n+1}r^{n+1}\{\cos[(n+1)a+\omega_{n+1}]+\operatorname{sen}[(n+1)a+\omega_{n+1}].i\}+$$
$$\ldots\ldots+\rho_mr^m[\cos(ma+\omega_m)+\operatorname{sen}(ma+\omega_m).i]$$

---

hombre de genio, son los maestros que lo han precedido, y los verdaderos pósteros los discípulos dignos de él." —(CONDORCET, "*Eloge de d'Alembert*").

Al decir que D'ALEMBERT es una figura clásica en Matemáticas no hallamos un calificativo de más alcurnia que dé una idea del valer de su personalidad en Astronomía. El anatema que el rigor del destino quiso escribir en su frente de hijo ilegítimo, lo han hecho desaparecer, cambiándolo en más alto timbre de gloria, los esplendores de sol de su genio.

Si designamos por M y M_0 los módulos de $F(z_0+h)$ y de $F(z_0)$, el módulo de:

$$\frac{F(z_0+h)}{F(z_0)}$$

será $\frac{M}{M_0}$ y el del segundo miembro será cuando más igual á la suma de los módulos de las partes. Ahora bien, si el primer término $1-\rho_nr^n$ es un número positivo, será igual á su módulo y se confundirá con él; para que se llene esta condición es preciso dar á r un valor menor que

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\rho_n}}$$

Siendo pues $\frac{M}{M_0}$ el módulo del primer miembro y supuesta la condición de que r es menor que

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\rho_n}}$$

resulta para valor del módulo $\frac{M}{M_0}$ la suma de los módulos de los términos del segundo miembro como valor límite, es decir:

$$\frac{M_0}{M}\leqq(1-\rho_nr^n)+\rho_{n+1}r^{n+1}+\ldots\ldots\ldots+\rho_mr^m$$

ó bien:

$$\frac{M}{M_0}\leqq 1-\rho_nr^n\left[1-\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}r-\frac{\rho_{n+2}}{\rho_n}r^2-\ldots\ldots-\frac{\rho_m}{\rho_n}r^{m-n}\right]$$

Cuando h tiende á 0, r tiende á cero, y el segundo miembro de la anterior expresión tiende á 1 y queda positiva para todos los valores de r comprendidos entre 0 y un cierto límite λ (¹). De con-

---

(¹) I. *Sea una función* $F(z)$ *entera de* z *que se anula para* $z=0$, *es decir, que es de la forma:*

$$F(z)=A_0z^m+A_1z^{m-1}+\ldots\ldots+A_{m-1}z$$

existe siempre una cantidad A *tal que para todos los valores de la variable* z *cuyo módulo está comprendido entre* 0 *y* λ, *el módulo de* $F(z)$ *es inferior á un número dado cualquiera* N. Siendo ρ el módulo de z y a el mayor de los módulos del segundo miembro se tiene:

$$F(z)<a(\rho^m+\rho^{m+1}+\ldots\ldots+\rho)\quad \text{ó bien}\quad \text{mód}\,F(z)<a\frac{\rho^{m+1}-\rho}{\rho-1}$$

si ρ es menor que la unidad, á *fortiori:*

$$\text{mod}\,F(z)<\frac{a\rho}{1-\rho}$$

el mod $F(z)$ será, pues, menor que el número dado N si se tiene:

$$\frac{a\rho}{1-\rho}<N\quad \text{ó bien}\quad \rho<\frac{N}{a+N}$$

y tomando:

$$\lambda=\frac{N}{a+N}$$

se justifica el enunciado.

II. *Sea una función* $F(z)=A_{m-n}z^n+A_{m-n-1}z^{n+1}+\ldots\ldots+A_1z^{m-1}+A_0z^m$ *entera en* z, *y ordenada según las potencias crecientes de la variable. Si se pone* $F(z)=A_{m-n}z^n(1+K)$ *existe una cantidad positiva* λ *tal que para todos los valores de* z *cuyo módulo esté comprendido entre* 0 y λ *el módulo de* K *sea menor que un número dado cualquiera* N.

En efecto, K vale invirtiendo el orden de sus términos:

$$K=\frac{A_0}{A_{m-n}}z^{m-1}+\frac{A_1}{A_{m-n}}z^{m-n-1}+\ldots\ldots+\frac{A_{m-n-1}}{A_{m-n}}z$$

y á esta expresión se le puede aplicar el teorema anterior inmediatamente. La proposición, evidentemente, es cierta para $n=0$.

siguiente, para todos los valores de r comprendidos entre 0 y sea más pequeño de las cantidades:

$$\lambda \text{ y } \frac{1}{\sqrt[n]{\rho_n}}$$

se tiene necesariamente $\frac{M}{M_0} < 1$ ó $M < M_0$ que es lo que se quería demostrar:

Demostrado el Lema pasemos á demostrar el Principio Fundamental de la Teoría de las Ecuaciones.

Principio Fundamental. *Toda ecuación algebraica de grado cualquiera* m, $F(z)=0$ *y de coeficientes reales ó imaginarios admite una raíz real ó imaginaria.* Hagamos tomar á z todos los valores posibles reales ó imaginarios; el módulo de $F(z)$ número positivo, no podrá disminuir sin cesar, y llegará á un determinado mínimo. Este mínimo corresponde á un valor finito de z, porque si correspondiese á un valor infinito de z ó de su módulo, el módulo de $F(z)$ sería también infinito. El mínimo á que llega el módulo de $F(z)$ es *cero* necesariamente, porque si fuese un número finito M_0 *no nulo* y correspondiente á $z=z_0$, según el Lema demostrado se podría determinar una cantidad h tal que se tuviese, por pequeño que fuera M_0:

$$\text{mod}\, F(z_0+h) < M_0$$

Finalmente, se ha demostrado que existe siempre un valor de z tal que se tenga para él:

$$\text{mod}\, F(z)=0 \quad \text{ó bien} \quad F(z)=0$$

que es lo que expresa el enunciado.

N. B. Sea $a+bi$ la forma de la raíz de $F(z)=0$; la sustitución de $a+bi$ en $F(z)$ da un resultado de la forma $P+Qi$, luego $P+Qi=0$, es decir, $P=0$, $Q=0$; estas son las dos ecuaciones que deben satisfacer los valores de a y b.

PUNTOS RAICES.

Vamos brevemente á explicar cómo se construyen *gráficamente* las raíces de $F(z)=0$.

Reemplacemos en esta ecuación z por el binomio $x+y.i$, en el que x é y son reales, y tendremos:

$$F(z)=F(x+y.i)=\varphi(x,y)+\psi(x,y).i$$

El módulo de $F(z)$ que es:

$$\sqrt{[\varphi(x,y)]^2+[\psi(x,y)]^2}$$

se anula cada vez que z al variar se confunde con una de las raíces de $F(z)=0$ ó cada vez que simultáneamente se tiene:

$$\varphi(x,y)=0, \quad \psi(x,y)=0 \qquad (6)$$

Si pues $z=a+bi$ es raíz y sólo en ese caso, a y b representan para el anterior sistema (6) una *solución común*.

Entonces tomando ejes coordenados rectangulares habrá que construir las curvas reales representativas de las ecuaciones (6) y sus puntos reales de intersección tendrán por coordenadas los grupos de soluciones comunes (a, b) correspondientes á todas las raíces de $F(z)=0$. Estos puntos son los *puntos-raíces*.

Para las raíces imaginarias complexas las dos curvas auxiliares se cortarán fuera de los ejes, para las simples se cortarán en el eje de las y, para las reales sobre el eje de las x.

(Comberousse.)

II

El método de las raíces iguales sólo es conveniente aplicarlo á las ecuaciones de coeficientes conmensurables que pasan del quinto grado. [1]

1. Hemos demostrado (párrafo 404) que una ecuación $f(z)=0$ que admite raíces iguales puede ser reemplazada por un producto de la forma $Z_1 Z_2^2 Z_3^3 \ldots\ldots$, en el que Z_1 corresponde á los factores simples, y Z_2, Z_3, ..., á los factores dobles, triples, etc., tomados una sola vez. La resolución de la ecuación propuesta estriba en las de menor grado:

$$Z_1=0, \quad Z_2=0, \quad Z_3=0, \quad \ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

Si la ecuación propuesta $f(z)=0$ tiene coeficientes conmensurables, lo propio sucederá con las subordinadas, puesto que Z_1, Z_2, Z_3, ..., son polinomios obtenidos por vía de división.

De consiguiente, *cuando una ecuación* $f(z)=0$ *tiene una sola raíz de cierto orden de multiplicidad, dicha raíz es necesariamente conmensurable*, pues está dada por una ecuación de primer grado con coeficientes conmensurables.

2. Analicemos pues los diversos grados atendiendo á las raíces iguales:

La ecuación de segundo grado puede admitir una raíz doble y ser el primer miembro un cuadrado perfecto.

La ecuación de tercer grado puede admitir una raíz doble y una simple, *ó* una raíz triple.

La ecuación de cuarto grado: una raíz doble y dos simples, *ó* dos dobles, [2] *ó* una raíz triple y una simple, *ó* una raíz cuádruple.

La ecuación de quinto grado puede admitir: una raíz doble y tres simples, *ó* una raíz triple y dos simples, *ó* una triple y una doble, *ó* una cuádruple y una simple ó una quíntuple.

En todos los casos examinados, *salvo uno sólo*, se ve que la ecuación considerada, si tiene raíces iguales, tiene necesariamente una sola raíz de un cierto orden de multiplicidad, y esta raíz es entonces conmensurable. Pero si pasamos al sexto grado, entre otros se presentan los dos casos de dos raíces dobles y dos simples ó dos raíces triples. Estas raíces están dadas entonces por ecuaciones de segundo grado y podrán ser inconmensurables.

Así pues: *hasta el quinto grado inclusive, toda ecuación de coeficientes conmensurables que tiene raíces iguales, tiene necesariamente raíces conmensurables* (salvo el caso mencionado de que la ecuación sea del cuarto grado, siendo su primer miembro un cuadrado perfecto). En tal caso, en lugar de aplicar á la ecuación propuesta el laborioso método de rebajamiento ya explicado y propio para las raíces iguales, vale más aplicarle desde luego el método de las raíces conmensurables; así se expedita la resolución de la ecuación.

III

Método de Mr. Lalanne. [3]

1. En el párrafo 545 dijimos que el Inspector General de Puentes y Calzadas Mr. Lalanne había ideado un ingenioso procedimiento gráfico aplicable á las ecuaciones numéricas de cualquier grado; y que las ideas del autor están contenidas en una Memoria insertada en los "*Annales des Ponts et Chaussées*" (año 1846), y en comunicaciones hechas á la Academia de Ciencias en Diciembre de 1875, Junio de 1876 y Julio de 1878.

[1] Véanse Capítulos III y XIII de la Segunda Parte.

[2] Si hay dos raíces dobles el primer miembro es un cuadrado perfecto y la ecuación puede rebajarse al segundo grado.

[3] Véase párrafo 545. Cap. XV. Segunda Parte.