Leibnitz considera la tangente como una secante que pasa por dos puntos infinitamente cercanos, y entonces se forma un triángulo rectángulo (suponemos ejes coordenados rectángulares) cuya hipotenusa es dicha *tangente* y los catetos son: uno dy que es cantidad infinitamente pequeña respecto á la ordenada y y dx cantidad infinitamente pequeña respecto á x. Como a es la tangente trigonométrica del ángulo que la tangente á la curva hace con el eje xx' y del triángulo formado se obtiene $\frac{dy}{dx}=a$ la ecuación es:

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(x-x)$$

Newton considera la tangente como el límite al que tiende toda secante que pasa por el punto de contacto, siendo entonces $y+\Delta y$ la ordenada ordenada y $x+\Delta x$ la abscisa de otro punto cualquiera de la curva (1) se tendrá:

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)=f(x)+A\Delta x+B\Delta x^2+C\Delta x^3+\ldots\ldots$$

La tangente trigonométrica del ángulo de la secante con xx' tiene por valor la relación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de los catetos, luego:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+B\Delta x+C\Delta x^2+\ldots\ldots$$

Al menguar Δx indefinidamente, menguan los términos $B\Delta x$, $C\Delta x^2$, ..., y el valor del segundo miembro tiende á convertirse en A que es, por consiguiente, un valor límite, cuando Δx sea nulo, se tendrá, pues:

$$L\frac{\Delta y}{\Delta x}=A$$

y como al cambiarse la secante en tangente $a=A$, finalmente:

$$Y-y=L\frac{\Delta y}{\Delta x}(X-x)$$

Lagrange parte de la consideración de que la tangente es una línea tal que entre ella y la curva no puede pasar otra recta por el punto de contacto, y hallando la expresión de la distancia de otro punto de sus puntos á la misma curva, fija el valor de la constante a de modo que aquella distancia sea la menor posible. Así pues, siendo x, y, las coordenadas del punto de contacto, y $x+h$ la abscisa correspondiente á otro punto, la ordenada valdrá:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+Bh^2+Ch^3+\ldots\ldots$$

Designando según la notación de Lagrange por $f'(x)$ la *derivada* de $f(x)$. Para el valor $X=x+h$ de la abscisa, la ordenada de la recta es $Y=y+ah$, luego la diferencia entre la ordenada de la curva y la de la recta correspondiente á la misma abscisa será:

$$f(x+h)-Y=f(x)-y+[f'(x)-a]h+Bh^2+Ch^3+\ldots\ldots$$

y como en el punto de contacto $y=f(x)$ resultará:

$$f(x+h)-Y=[f'(x)-a]h+Bh^2+Ch^3+\ldots\ldots$$

expresión en la que sea cuales fueren los valores de B, C, ..., y el de h, el menor valor de la dis-

(1) La característica Δ expresa una variación determinada ó una diferencia entre dos estados de magnitud de una cantidad.

tancia representada por el primer miembro, se obtendrá cuando $f'(x)-a=0$, es decir, $f'(x)=a$ de consiguiente, la ecuación de la tangente será:

$$Y-y=f'(x)[X-x]$$

Como ya antes habíamos advertido, el coeficiente diferencial de Leibnitz $\frac{dy}{dx}$, el límite $L\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de Newton y la derivada $f'(x)$ de Lagrange, son en substancia magnitudes idénticas.

Díaz Covarrubias opera así: siendo $y=f(x)$ la ecuación propuesta, un incremento h atribuído á la variable independiente convierte á la función primitiva en $y'=f(x+h)$; así pues, el incremento de la función es $y'-y$. En el triángulo rectángulo formado por los dos incrementos y la secante que pasa por los puntos cuyas derivadas son y é y' la tangente del ángulo de dirección de esta secante con el eje xx' tiene por valor:

$$\frac{y'-y}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Esta relación debe depender de h, pero debe tener un término independiente de h. En efecto, si y se cambió en y' fué por X se cambió en $x+h$; así pues, el desarrollo $f(x+h)$ debe ser tal, que se cambie en $f(x)$ cuando h sea nulo; así pues, tendrá la forma:

$$y'=f(x+h)=f(x)+Ah+Bh^2+\ldots\ldots$$

en donde A, B, ..., son funciones de x.

No puede haber potencias negativas, pues, si hubiera algún término de la forma:

$$uh^{-n}=\frac{u}{h^n}$$

la hipótesis $h=0$ lo haría infinito y no resultaría $y=f(x)$.

Se tendrá pues:

$$\frac{y'-y}{h}=\frac{f(x+h)-(x)}{h}=\frac{Ah+Bh^2+Ch^3+\ldots\ldots}{h}=A+Bh+Ch^2+\ldots\ldots$$

Para unos mismos valores de A, B, C, ..., el valor de esta relación depende del de h. Ahora bien, si se concibe que la secante primitiva va girando al derredor del punto de contacto hasta que los dos puntos de intersección con la curva se confundan en uno sólo en ese momento $h=0$, esta condición analítica expresa, pues, la condición geométrica de la tangencia. Esta condición hace que el primer miembro se cambie en $\frac{0}{0}$, pero como por una parte su valor es realmente A, y por otra su significado geométrico es el de una tangente trigonométrica, se puede siempre representarlo por la relación de dos líneas tal como $\frac{dy}{dx}$. Así pues, $\frac{dy}{dx}=A$, lo que nos conduce á la misma conclusión de los otros sistemas.

Gargollo y Parra razona así: Sea $y=F(x)$ la ecuación de la curva; designemos por x_0 una abscisa y por x_0+h otra, y sean y_0 y las ordenadas correspondientes. La ordenada y es una función de h pues depende de ésta, pero debe contener un término independiente de h, pues que cuando h es nula las ábscisas se confunden en una, y lo propio pasa con las ordenadas; así pues:

$$y=y_0+Ah+Bh^2+Ch^3\ldots\ldots$$

luego:

$$y-y_0=\Delta y=Ah+Bh^2+Ch^3+\ldots\ldots\ldots$$

Si en la figura 9, $0Q=x_0$, $0N=x$, $EQ=y_0$, $MN=y$, se tendrá:

$$\Delta y=MR$$

Llamando Δx la diferencia $x-x_0=h$ por ser $ER=QN$, tendremos, de acuerdo con la ecuación de la línea recta:

$$y-y_0=\frac{\Delta y}{\Delta x}(x-x_0)$$

Si suponemos que mengua la distancia EM acercándose los dos puntos, menguarán también ER y MR ó sea $\varDelta x$ y $\varDelta y$ en la fórmula (1) irán menguando los términos multiplicados por $h = \varDelta x$, siempre que $h < 1$. Cuando M se confunda con E se tendrá:

$$x = x_0, \quad \varDelta x = h = 0, \quad \varDelta y = 0$$

representando por dy, dx los valores nulos rigurosamente de $\varDelta x$ y $\varDelta y$ resultará:

$$y - y_0 = \frac{dy}{dx}(x - x_0)$$

Pero en este caso, reducidos los puntos á uno solo, la línea EM será una tangente á la curva, y como en la ecuación el coeficiente de $x - x_0$ es la tangente del ángulo que la tangente á la curva hace con xx', vemos que $\frac{dy}{dx}$ será esa tangente; así pues, la expresión $\frac{dy}{dx}$ que es para Leibnitz coeficiente diferencial, para Newton relación límite de los incrementos de la función y la variable, para Lagrange primera derivada, para Covarrubias una tangente trigonométrica de un ángulo, en el sistema de Gargollo tomado en conjunto tiene el significado geométrico de una tangente trigonométrica de un ángulo, tomada por separado es relación de dos *nulidades* de primer orden y en el alto orden abstracto es relación de dos magnitudes auxiliares que por abstracción carecen de cierta propiedad con respecto á otras de más alto rango y más complexas, que reducen su análisis al de esas auxiliares y constituyen un cierto orden de entidades cuya complexidad la ha reducido una concepción especial á un grado menos.

Los que objetan el método de Leibnitz arguyen diciendo que desde luego la suposición de cantidades infinitamente pequeñas, hace que el sistema choque desde luego con la idea sobrenatural y nebulosa del infinito. Las escuelas filosóficas, en efecto, aún no llegan á ponerse de acuerdo; unos afirman que no existe en el espíritu humano la noción del infinito, otros [1] que la idea del *infinito* es tan afirmativa ó tan negativa como la del *finito*, que ambas son dos afirmaciones simultáneas pues la idea del *infinito* respecto al *finito* no es más negativa que la de éste respecto á aquel. En concepto de otros [2] si el infinito es negación, es negación de límite, y si el límite es negación, lo es de indefinidad, y la negación de negación es afirmación. Hamilton [3] llega á declarar al infinito un pensamiento negativo hasta de lo concebible, pues el espíritu sólo puede concebir lo limitado. El eminente Herbert Spencer [4] combate la proposicion anterior: «no es exacto—dice—que de dos términos contradictorios el negativo sea la suposición del otro, verbigracia: lo limitado de lo ilimitado. Nuestra noción de lo limitado se compone: 1º, de una concepción de cierta especie de ser; 2º, de una concepción de los límites que se la conocen. En la noción de lo ilimitado la concepción de los límites se halla abolida, pero no así la de cierta especie de ser.» Stuart Mill [5] también refuta á Hamilton. Un autor francés que estuvo muy en boga, Boucharlat, dice que las nociones que sobre el infinito tenemos se reducen á esta proposición: «una cantidad no es infinita cuando es susceptible de cierto crecimiento.» Balmes [6] defiende la idea del infinito de un modo muy análogo al de Spencer, etc.

Esta rápida ojeada de algunas opiniones hace comprender la fuerza de los argumentos de los opositores del sistema.

En segundo lugar, por más pequeños que sean un arco ó una superficie curva, nunca podrían considerarse—dicen—como una línea recta ó como un plano; así pues, el sistema es un método de pura aproximación. En tercer lugar, al deducir de la cantidad real la diferencial, ésta resulta enlazada con otras de órdenes superiores que se borran en las ecuaciones «porque su desaparición no causa error sensible en las aplicaciones.» Mas en cambio, los defensores del sistema cuentan, entre otros, con dos argumentos incontestables: primero, la exactitud rigurosa de los resultados y la generalidad do-

[1] Coussin. «*Philosophie de Locke.*»
[2] Fenelón. «*Existance de Dieu.*»
[3] Hamilton. «*Fragments.*» Trad. fr. de L. Peisse.
[4] Spencer. «*Premiers Principes.*»
[5] Stuart Mill. «*Examen d'Hamilton.*»
[6] Balmes. «*Filosofía Fundamental*» y «*Filosofía Elemental.*»

minante que revisten, da al sistema carta irrefutable de autoridad, de mérito y de supremacía; segundo, son sus métodos tan expeditos, sus símbolos tan cómodos, su aplicación tan incalculable, que casi ha sido el sistema predilecto.

Mucho sentimos no poder bosquejar aunque fuese algunos razonamientos que el insigne pensador mexicano D. Gabino Barreda [1] ha incluído en la brillantísima defensa que ha hecho del sistema leibniciano. Este autor, superando á Carnot [2] en su luminosa justificación del sistema leibniciano, y aun al mismo Leibnitz [3] que no logró apoyar sus teorías de un modo tan satisfactorio, como punto de partida demuestra que Leibnitz operó no sólo por *deducción* como algunos han pretendido, sino también por *inducción*, La Memoria del Sr. Barreda es un monumento honrosísimo para Leibnitz.

Al sistema de Newton señalan sus adversarios varios inconvenientes, entre los que citaremos: 1º, la suposición de igualdad entre la cantidad y su límite, que substancialmente son distintas; 2º, la dificultad á veces gravísimo de hallar un valor límite; 3º la práctica que requiere el acostumbrarse á distinguir entre la cantidad y su estado al llegar al límite; 4º, el carácter aproximativo del sistema.

Hay que agregar que en el fondo la concepción de Newton es la de Leibnitz con otra forma, pues en efecto, para que una curva pueda considerarse como el límite de un polígono inscrito, es preciso admitir tácitamente que ambos perímetros se confundirían si se aumentasen indefinidamente el número de lados del polígono disminuyendo infinitamente la longitud de estos lados. En general, es mucho menos usado que el de Leibnitz.

Respecto al sistema de Lagrange, ya hemos dicho que su autor lo presenta como una extensión del Álgebra, y carece de las aproximaciones de los anteriores, pero si bien se comprende que las derivadas *pueden* en algunos casos simplificar las investigaciones, nada demuestra á *priori* que ese método de derivación, más bien que otro cualquiera, *deba* siempre simplificarlas. Algunos llegan á dudar de que el insigne geómetra hubiera llegado á resultados plausibles si no los hubiera conocido de antemano bajo la forma infinitesimal ó bajo la de los límites. El Sr. Barreda llega á externar la idea de que la exactitud de los resultados obtenidos, haciendo abstracción de cantidades evanescentes, hace sospechar un defecto lógico en la concepción del punto de partida.

Finalmente, la dificultad del sistema y lo complicado de sus especulaciones lo hace inadecuado como obra de enseñanza escolar.

En el método del Sr. Covarrubias señalan los críticos, entre otros, los siguientes defectos: 1º la base misma que hace intervenir al movimiento en la operación que sirve para hallar la auxiliar, lo que presenta graves inconvenientes, pues la introducción de un fenómeno extraño al Análisis Trascendente puro en las especulaciones de que es objeto, divaga la atención y desnaturaliza el espíritu de un ramo de la ciencia que es distinto de la Mecánica. 2º El reducido alcance que da al cálculo, pues lo encierra dentro de los estrechos límites de la aplicación geométrica. 3º. En este sistema la expresión $\frac{dy}{dx}$ tiene significado preciso, es una tangente, pero si dy y dx se toman aisladamente, nada positivo representan ni tienen significación determinada, es decir, la derivada tiene explicación en el actual sistema, pero la diferencial carece de significado. Creemos que la objeción más seria es la última, porque en efecto, la base misma del método que se funda en la determinación de $\frac{dy}{dx}$ no puede en rigor especular con la diferencial separadamente, tal como debe ser tratada en el Cálculo, y de esto resulta la imposibilidad de hecho que tiene el sistema para pasar con facilidad á cuestiones que dependen de más de dos variables, sin tener que entrar en consideraciones (quizá muchas infranqueables) sobre movimientos en el espacio y curvas de doble curvatura. La principal ventaja es la exactitud, la precisión, la sencillez y los altos méritos que tiene para servir de obra de texto por su carácter elemental y desprovisto de dificultades para el alumno. A nuestro juicio, estas ventajas han resultado no tanto de la concepción del método en sí como del peculiar genio matemático y las singulares facultades de Covarrubias como autor, facultades que en todas sus obras demostró y que aún ahora son reconocidas como sin rival desde el punto de vista de la claridad en la exposición, en gran número de cuestiones, especialmente en las astronómicas y topográficas.

[1] Barreda. «*Examen del Cálculo Infinitesimal bajo el punto de vista lógico.*» Memoria leída en la Sociedad Humboldt.
[2] Carnot. «*Réflexions sur la métaphysique du Calcul infinitésimal.*»
[3] Leibnitz. Obras citadas.

El método de Gargollo es aún poco conocido, y hablando en verdad, su mismo autor lo dejó en ciernes. Nosotros que tuvimos la honra de asistir á su cátedra pudimos observar en aquel pensador distinguido leves desconfianzas al atender quizá á lo magno de la empresa: enmendar á Leibnitz. A nuestro juicio, el Sr. Gargollo al iniciar su sistema y ver que corregía muchos errores del eminente fundador de las *infinitesimales*, se asustó de su obra justamente asombrado por la bondad del éxito. Sin duda alguna creyó un sueño poder enmendar los errores del insigne enciclopédico del siglo XVII, y al ver que lo iba logrando en parte, retrocedió, tachando de empeño quimérico pretender fundar un cálculo exacto y general, libre de aproximaciones y aplicable á todas las cuestiones, un cálculo que cumpliera el ambicionado *desideratum* de los matemáticos. Ciertamente, tomando en cuenta que el cálculo se reputa como la concepción más alta de la inteligencia humana, hallar el *eureka* que ni Leibnitz, ni Newton, ni Lagrange pudieron descubrir, casi equivale á realizar una empresa incomparable y colosal; estas reflexiones, la misma dificultad del problema, lo nuevo del sistema y la misma modestia del autor, conspiraron en su contra para que no lograra dar cima á su método, haciendo más amplias sus consideraciones y más explícitas sus ideas fundamentales. Esta, á nuestro juicio, es la razón de por qué á la brillante introducción de su Cálculo siguen algunas hojas de gran originalidad, que poco á poco se va esfumando y perdiendo hasta que llegan á identificarse las teorías y las consideraciones con las del método de Leibnitz. Ahora bien, si se nos preguntase nuestra opinión, arriesgaríamos una que bien puede ser peligrosa pero que salvo error involuntario creemos fundada. Nuestra opinión es que quizá en el fondo de las ideas bastante vagas del Sr. Gargollo reside la solución del problema del Cálculo que ni Leibnitz, ni Newton, ni Lagrange, ni Covarrubias han dado de un modo satisfactorio en todos sentidos.

Quizá si algún pensador ahonda, depura y da forma á esas ideas, logre fundar el cálculo verdaderamente lógico y exacto. El sistema seduce desde luego, y reviste el aspecto de un método riguroso y matemático, pero creemos que no sólo es una apariencia, sino que en el fondo tal vez á un compatriota nuestro cabe la gloria de haber esbozado los fundamentos del verdadero Cálculo exacto. La muerte del Sr. Gargollo poco después de que publicara su obra, evitó las polémicas que pudieron haber surgido y quizá zanjado la cuestión; pero repetimos lo dicho y encarecemos á nuestros pensadores que analicen y estudien el germen de un sistema que es posible sea el predestinado para privar y el elegido por los hombres de ciencia. Desde el momento que es un germen, no hay derecho de hacerle una crítica acerba ó una defensa apasionada; inconvenientes prácticos y de aplicación no presenta, pues sus fórmulas y resultados concuerdan en estructura y símbolos con los acostumbrados, no presenta inconvenientes de aproximaciones y evanescencias (tal como debe entenderse esta palabra) y cuenta con el alto mérito de que sus exposiciones primordiales, mientras no haya argumentos de peso en contra, revisten un perfecto carácter lógico de rigor, de método y de naturaleza matemática. Finalmente, el gran artificio de la abstracción que es de uso general en Matemáticas, es el que basa los fundamentos y fué sin duda el que inspiró al Sr. Gargollo la ingeniosa concepción de su sistema.

5. Los autores dividiéndose en grupos y aceptando ya uno, ya otro de estos sistemas, han dado lugar á polémicas sobre el que mejor pueda satisfacer al espíritu de las matemáticas. Una gran mayoría los procura combinar aprovechando las ventajas que cada uno presenta y eliminando los inconvenientes. Nosotros, afiliándonos hasta cierto grado á estos últimos, hemos preferido ser eclécticos, atendiendo á que en una obra elemental como la presente, que no tiene por misión entrar de lleno en hondas investigaciones, vale más sacrificar á la claridad, á la sencillez y á la facilidad recomendadas por la Pedagogía, un absoluto rigorismo doctrinario al que conduciría la predilección, el planteo y el desarrollo de tal ó cual sistema. De consiguiente, sin perder de vista la forzosa ligazón metódica de ideas que debe presidir en toda teoría de matemáticas, hemos procurado aprovechar los procedimientos de los varios sistemas, prefiriendo según el caso el que hemos creído que conduce más rápida y fácilmente á la solución. Respecto á símbolos, hemos aprovechado la *derivada* de Lagrange, con alguna sobriedad el *límite* de Newton, y casi en general el conocidísimo y útil *coeficiente diferencial* de Leibnitz, que á nuestro juicio presenta en lo general ventajas supremas.

No obstante este artificio á que hemos apelado, para la clara exposición elemental de los fundamentos del Cálculo, las cuestiones que tratamos (adecuadas á los programas de nuestras escuelas profesionales) están ligadas unas con otras de modo que no haya transición brusca en los procedimientos; sirva, pues, de disculpa, si no nos hemos decidido por este ó por aquel sistema, nuestro deseo de dar á nuestra obra un carácter propio para la enseñanza.

La forma actual de los programas profesionales de Matemáticas Superiores, nos ha permitido amalgamar en un solo volumen lo que obligan en materia de Algebra Superior propiamente dicha, y de Cálculo. Creemos que llevando por mira satisfacer esos programas el orden que para exponer ambas materias hemos llevado en nuestra obra, es bastante conveniente, pues por una parte el sumario acostumbrado está satisfecho, y por otra el estudio de lo que llamamos *Funciones Derivadas y Primitivas* en el Capítulo VII, facilita las consideraciones abstractas de la *Teoría de las Imaginarias* y es de *necesario conocimiento previo* para la *Teoría de las Ecuaciones*, que en gran número de cuestiones hace uso de *polinomios derivados*, etc.

Si el lector recorre la obra cuidadosamente convendrá con nosotros en que tal vez el método de estudio amalgamado del Cálculo y el Álgebra (bajo el aspecto elemental se entiende y tal como lo supone la obra) y en el orden en que lo hemos expuesto, presenta grandes ventajas en los cursos escolares. El supuesto lector al cerrar la última página, habrá adquirido los conocimientos del Cálculo y el Álgebra á la vez, por transiciones progresivas, y verá que lo que ha leído cumple los programas de ambas materias.

Finalmente, no pretendiendo como desde el Prólogo dijimos, presentar esta obra como una novedad, tan sólo abrigamos la esperanza de que ordenada con el método con que hemos convenido encadenar las cuestiones, pueda hacer menos escabroso y menos difícil á nuestros estudiantes el estudio de una materia abstracta de por sí, y por lo común bebida en autores extranjeros.

Si tal anhelo se realiza, estarán plenamente satisfechos nuestros deseos.