manifesteraient que sur les comètes; et, outre la formation des queues, on pourrait encore lui attribuer l'accélération que l'observation a indiquée dans les moyens mouvements de deux comètes, celle d'Encke et celle de Faye.

Cette hypothèse de M. Faye viendrait se substituer à celle d'un milieu résistant (§ 295) avec laquelle M. Encke expliquait le ralentissement de la comète qui porte son nom.

M. Roche, dans des recherches analytiques sur les atmosphères des comètes, a tenu compte de la force répulsive mise en avant par M. Faye, et sa théorie, exposée dans le tome V des *Annales de l'observatoire de Paris*, l'a conduit à des résultats qui s'accordent avec les indications fournies par l'observation.

§ 306. On s'est demandé si les comètes sont lumineuses par elles-mêmes, ou bien si elles ne brillent qu'en raison de la lumière qu'elles reçoivent du soleil. Des expériences de polarisation, faites par Arago, l'ont conduit à admettre que la lumière des comètes est, au moins en partie, de la lumière solaire réfléchie à leur surface. Cette conséquence résulterait d'ailleurs naturellement de ce que l'éclat d'une comète diminue progressivement, à mesure qu'elle s'éloigne de nous, si elle n'éprouvait pas en même temps des changements considérables dans sa constitution intime. En effet, si elle était lumineuse par elle-même, son éloignement de la terre diminuerait bien ses dimensions apparentes, mais la clarté de sa surface ne serait pas altérée (§ 20); ce n'est que lorsque ses dimensions apparentes seraient assez petites pour qu'elle ne parût plus que comme un point lumineux, que l'accroissement de sa distance à la terre diminuerait peu à peu son éclat et finirait par la rendre tout à fait invisible. L'affaiblissement progressif de l'éclat que présentent les comètes, à mesure qu'elles s'éloignent de la terre et du soleil, et lorsqu'elles se montrent encore avec des dimensions apparentes très-appréciables, ne pourrait donc s'expliquer qu'en admettant qu'elles sont éclairées par le soleil, et que la diminution de leur éclat est due à l'augmentation de leur distance de cet astre. Quoique ces considérations ne puissent pas s'appliquer en toute rigueur aux comètes, à cause des changements qui se produisent progressivement dans leur constitution, on peut cependant les regarder comme venant appuyer le résultat auquel Arago est parvenu au moyen d'expériences directes sur la lumière des comètes.

Nous verrons plus loin, à propos de l'analyse spectrale des comètes, que ces astres sont aussi lumineux par eux-mêmes, au moins dans la partie qui forme leur noyau.

# CHAPITRE SIXIÈME

## DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE.

§ 307. **Découverte de la gravitation universelle, par Newton.** — Képler ayant fait connaître les véritables lois du mouvement des planètes autour du soleil (§ 263), l'examen attentif de ces lois, uniquement fondées sur les résultats de l'observation, devait conduire à la connaissance des causes qui agissent sur les planètes et qui déterminent les diverses circonstances de leur mouvement. C'est ce qui arriva en effet. Newton, dont le vaste génie n'était pas de trop pour traiter cette grande question, eut la gloire de tirer des lois de Képler les conséquences qui y étaient implicitement renfermées, et de poser ainsi les fondements de l'astronomie mathématique, la plus belle des sciences qui aient été créées dans les temps modernes. Nous allons voir par quelle série d'idées il est arrivé à ce résultat.

Les planètes sont des corps isolés dans l'espace, qui se meuvent autour du soleil en décrivant des lignes courbes, et avec des vitesses variables d'un instant à un autre. Or, on sait qu'en vertu de l'inertie de la matière, le mouvement d'un corps qui est entièrement libre dans l'espace, et qui n'est soumis à l'action d'aucune force, est nécessairement rectiligne et uniforme. Le mouvement des planètes ne s'effectuant pas de cette manière, on doit en conclure que chacune d'elles est soumise à une certaine force qui change constamment la grandeur et la direction de sa vitesse. Reste à savoir quelles sont, à chaque instant, la direction et l'intensité de cette force : c'est ce que l'on trouve en analysant les lois auxquelles satisfont les mouvements des planètes.

§ 308. La deuxième loi de Képler, relative aux aires décrites par la ligne droite qui joint une planète au soleil (§ 263), fait voir que la force dont il s'agit est dirigée précisément suivant cette ligne droite. C'est ce que Newton reconnut d'abord par les considérations suivantes.

Supposons qu'une planète, se mouvant à une certaine distance du soleil, soit soumise à l'action d'une force dirigée constamment vers cet astre; et concevons que cette force, au lieu d'agir sur la planète d'une manière continue, n'agisse que par intermittence, à des instants successifs séparés les uns des autres par des intervalles de temps égaux. Soit AB (*fig.* 337), le chemin parcouru par la planète pendant un de ces intervalles de temps, chemin qui sera rectiligne, puisque, pendant tout le temps que la planète emploie à le parcourir, elle n'est soumise à l'action d'aucune force. Arrivée en B, la planète va éprouver l'action instantanée de la force qui lui est appliquée, et que nous supposons dirigée vers le soleil S; puis la planète se mouvra uniformément et en ligne droite, pendant un nouvel intervalle de temps égal au précédent, avec la nouvelle vitesse qu'elle possédera immédiatement après que la force aura exercé son action sur elle, en B. A la fin de ce second intervalle de temps, la force agira de nouveau sur la planète pour modifier sa vitesse, et ainsi de suite.

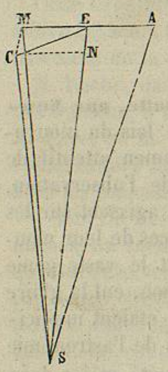

Fig. 337.

Comparons entre eux les mouvements de la planète pendant les deux premiers intervalles de temps dont nous avons parlé. Lorsque la planète arrive en B, elle continuerait à se mouvoir suivant la même direction que précédemment, si elle n'éprouvait pas en ce point B l'action de la force qui lui est appliquée; et elle parcourrait, pendant le second intervalle de temps, un chemin BM précisément égal à AB. Mais la force qui agit sur elle, lorsqu'elle est en B, lui communique instantanément, suivant la direction BS, une certaine vitesse qui se combine avec la vitesse qu'elle possédait déjà; et il résulte de cette combinaison une nouvelle vitesse dont la planète se trouve réellement animée pendant le second intervalle de temps. Soit BN le chemin que la planète parcourrait pendant ce temps, si elle ne possédait que la vitesse qui lui a été communiquée par la force en B; BM étant, d'un autre côté, le chemin que la planète aurait parcouru pendant le même temps, si elle eût conservé la vitesse qu'elle avait avant d'arriver en B, on sait que le chemin réellement parcouru par la planète n'est autre chose que la diagonale BC du parallélogramme construit sur les deux lignes BM, BN. La planète, qui est allée de A en B pendant le premier des intervalles de temps que nous considérons, va donc de B en C, pendant le second de ces intervalles de temps. Or, CM étant parallèle à BS, on voit que les deux triangles BCS, BMS, ont même surface, comme ayant même base BS, et ayant en outre leurs sommets C, M, situés sur une parallèle à cette base. Mais



les deux triangles ABS, BMS, ont aussi même surface, comme ayant des bases égales AB, BM, et une même hauteur, qui est la distance du point S à la ligne droite ABM. Donc les surfaces des deux triangles ABS, BCS, égales chacune à celle du triangle BMS, sont aussi égales entre elles. Ainsi, l'action que la force exerce sur la planète en B, suivant la direction BS, modifie en général la grandeur et la direction de la vitesse dont elle est animée; mais la surface du triangle décrit par la ligne droite qui joint la planète au soleil S, pendant l'intervalle de temps qui précède l'arrivée de la planète en B, a exactement la même valeur que la surface du triangle analogue décrit pendant l'intervalle de temps de même durée qui suit le passage de la planète par ce point B.

En suivant la planète dans son mouvement, pendant un temps quelconque, toujours dans l'hypothèse d'une action intermittente et régulière de la force qui lui est appliquée, on verra que la planète se meut en ligne droite pendant chacun des intervalles de temps compris entre deux actions consécutives de la force; que les diverses lignes droites qu'elle parcourt ainsi, pendant ces temps successifs égaux entre eux, ne sont ni égales ni de même direction, en sorte que, par leur ensemble, elles forment un polygone ABCDE (*fig.* 338), qui est la route suivie par la planète dans l'espace, et qui est situé tout entier dans le plan mené par son premier côté AB et par le soleil S; mais que les divers triangles ayant pour sommet le soleil, et pour bases les différents côtés de ce polygone, ont tous exactement même surface. L'aire totale du secteur polygonal SABCDE, décrit pendant un temps quelconque, par la ligne droite qui joint la planète au soleil, est donc proportionnelle au nombre des triangles dont ce secteur se compose; et, par conséquent, cette aire est aussi proportionnelle au temps employé par la planète à aller de A en E.

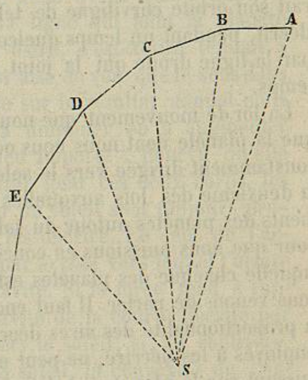

Fig. 338.

Le résultat auquel nous venons de parvenir, en supposant qu'une planète soit soumise à l'action intermittente et régulière d'une force dirigée vers le soleil, ne dépend, en aucune manière, de la durée plus ou moins grande de l'intervalle de temps compris entre deux actions consécutives de la force. Si nous admettons que les intervalles de temps qui séparent les actions successives de cette force deviennent de plus en plus petits, tout en restant égaux entre eux, l'aire du secteur décrit, pendant un temps quelconque, par la ligne droite qui joint la planète au soleil, sera toujours proportionnelle à ce temps. Il en sera donc encore de même lorsque ces intervalles de temps seront infiniment petits, c'est-à-dire lorsque les actions successives de la force se produiront sans interruption, ou, en d'autres termes, lorsque la force agira d'une manière continue; mais alors il est clair que le polygone décrit par la planète se changera en une ligne courbe, comprise également tout entière dans un plan passant par le soleil. Ainsi dans le cas où une planète se mouvrait sous l'action incessante d'une force dirigée constamment vers le soleil, son mouvement s'effectuerait dans un plan passant par le soleil, et elle parcourrait son orbite curviligne de telle manière que l'aire du secteur décrit, pendant un temps quelconque à l'intérieur de cette orbite, par la ligne droite qui la joint au soleil, fût proportionnelle à ce temps.

La loi de mouvement que nous venons d'obtenir, en admettant que la planète dont nous nous occupons soit soumise à une force constamment dirigée vers le soleil, est précisément la même que la deuxième des lois auxquelles satisfont réellement les mouvements des planètes autour du soleil. Mais cela ne suffit pas encore pour que nous puissions en conclure tout de suite que la force à laquelle chacune des planètes est soumise a bien la direction dont nous venons de parler. Il faut encore que nous nous assurions que la proportionnalité des aires décrites autour du soleil, aux temps employés à les décrire, ne peut exister que dans le cas où la force agissant sur la planète est dirigée vers le soleil. C'est ce que nous ferons sans peine.

Reportons-nous à la figure 337. Si la force qui agit sur la planète, lorsqu'elle arrive en B, avait une direction autre que celle de la ligne BS,BN ferait un certain angle avec cette ligne BS;CM, qui est parallèle à BN, ne serait donc pas parallèle à BS; les deux triangles BCS, BMS, ayant même base BS, auraient leurs sommets C, M, à des distances inégales de cette base, et par suite leurs surfaces seraient inégales; le triangle ABS, toujours égal à BMS, ne serait donc pas égal au triangle BCS. Les divers triangles ABS, BCS, CDS,... (*fig.* 338), correspondant aux chemins, AB, BC, CD,... parcourus dans des temps égaux successifs, n'auraient



donc pas même surface; et, par conséquent, l'aire du secteur polygonal SABCDE ne serait pas proportionnelle au temps employé par la planète à aller de A en E. Ce qui a lieu dans le cas où la force agit par intermittences, aura lieu encore quand on supposera que la force agit d'une manière continue. On peut donc dire, d'après tout ce qui précède, que, d'une part, si la force qui agit sur une planète est constamment dirigée vers le soleil, les aires décrites par la ligne droite qui joint la planète au soleil sont proportionnelles aux temps employés à les décrire; et, d'une autre part, si la force qui agit sur la planète n'est pas dirigée vers le soleil, la proportionnalité de ces aires aux temps correspondants n'existe pas. La deuxième loi de Képler entraîne donc nécessairement cette conséquence, que la force à laquelle chaque planète est soumise est dirigée constamment suivant la ligne droite qui joint la planète au soleil.

Dans les raisonnements précédents, nous avons admis implicitement que la force agissant suivant la ligne qui joint la planète au soleil était dirigée vers ce dernier astre, c'est-à-dire tendait à rapprocher la planète du soleil. Il est aisé de voir que le sens dans lequel la force agit n'a pas d'influence sur le résultat auquel nous sommes arrivés. Que la force tende à diminuer ou à augmenter la distance de la planète au soleil, peu importe : pourvu qu'elle soit dirigée suivant la ligne droite qui joint ces deux corps, les aires décrites par la planète autour du soleil sont toujours proportionnelles aux temps employés à les décrire. Le sens de l'action de la force ne se manifeste que par le côté vers lequel l'orbite décrite par la planète tourne sa concavité. Si la force tend à rapprocher la planète du soleil, la concavité de la courbe décrite par la planète est évidemment tournée vers le soleil; si, au contraire, la force tend à éloigner la planète du soleil, la convexité de l'orbite est tournée vers ce dernier astre. L'observation indiquant que c'est le premier de ces deux cas qui a lieu, on en conclut que la force qui agit sur la planète tend à la rapprocher du soleil, comme nous l'avions supposé tout d'abord.

§ 309. Le résultat auquel nous venons de parvenir, en nous appuyant sur la deuxième loi de Képler, est la seule conséquence qu'on puisse tirer de cette loi. La proportionnalité des aires décrites par la ligne droite qui joint une planète au soleil, aux temps employés à les décrire, nous a fait connaître quelle est à chaque instant la direction de la force qui agit sur la planète; mais elle ne peut rien nous indiquer sur la manière dont varie l'intensité de cette force d'un instant à un autre. Que la force agissant sur la planète ait une grandeur constante ou variable, qu'elle aille en augmentant ou en diminuant, qu'elle varie lentement ou rapidement, qu'elle agisse d'une manière continue ou discontinue, peu importe; pourvu qu'elle ne cesse pas d'être dirigée suivant la ligne droite qui va de la planète au soleil, la proportionnalité dont il s'agit subsistera toujours, comme on s'en assure sans peine en examinant les raisonnements que nous avons faits il n'y a qu'un instant. Ce n'est donc qu'en ayant recours aux deux autres lois de Képelr qu'on peut espérer d'arriver à quelque chose de plus.

La troisième loi, qui consiste en ce que les carrés des temps des révolutions des planètes sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites, ne dépend en aucune manière des excentricités de ces orbites. On conçoit donc qu'elle subsisterait encore, si ces excentricités étaient toutes nulles, c'est-à-dire si les orbites étaient des circonférences de cercle ayant pour centre le soleil. Ainsi, pour tirer de la troisième loi de Képler les conséquences qu'elle renferme, nous pourrons regarder les planètes comme décrivant des cercles autour du soleil, sans qu'il en résulte la moindre inexactitude; nous substituerons par là, aux planètes réelles, des planètes idéales qui, si elles existaient, satisferaient également à cette troisième loi. La deuxième loi, qui est aussi indépendante des excentricités des orbites, montre en outre que, si une planète décrivait un cercle ayant son centre au soleil, la vitesse de cette planète sur son orbite resterait constamment la même. C'est donc en considérant des planètes animées de mouvements uniformes, suivant des circonférences de cercle ayant le soleil pour centre, que nous allons raisonner pour tirer de la troisième loi de Képler les conséquences auxquelles elle peut conduire.

§ 310. Rappelons-nous d'abord de quelle manière on évalue l'intensité d'une force, d'après le mouvement qu'elle communique au corps sur lequel elle agit, et prenons pour exemple la force qui nous est la plus familière, la force de la pesanteur. Un corps tombant librement sous la seule action de la pesanteur, sans qu'on lui ait donné de vitesse initiale, prend un mouvement uniformément accéléré, suivant la verticale; au bout d'une seconde de temps comptée à partir du commencement de son mouvement, il a acquis une vitesse telle, que, s'il continuait à se mouvoir en vertu de cette vitesse seule, sans que la pesanteur exerçât de nouveau son action sur lui, il parcourrait pendant une deuxième seconde un chemin double de celui qu'il a parcouru pendant la première seconde. La grandeur de cette vitesse acquise, au bout



d'une seconde de chute, est proportionnelle à la force qui détermine le mouvement du corps; si l'intensité de la pesanteur devenait double, triple,... de ce qu'elle est, la vitesse qu'acquerrait un corps, après une seconde de chute, deviendrait également double, triple... La force qui fait tomber le corps, et qui n'est autre chose que son poids, est d'ailleurs proportionnelle à la masse du corps; et l'on sait que son intensité peut être représentée par le nombre que l'on obtient en multipliant la masse du corps par la vitesse qu'elle possède après une seconde de chute. La force qui agit sur l'unité de masse du corps est donc représentée simplement par la vitesse acquise par le corps après une seconde de chute; ou bien, ce qui revient au même, par le double de l'espace qu'il parcourt pendant une seconde à partir du commencement de son mouvement.

Lorsqu'un corps pesant est lancé horizontalement, avec une vitesse quelconque, il ne reste pas sur la ligne droite AM (*fig.* 339), suivant laquelle il a été lancé, parce que la pesanteur tend constamment à l'abaisser au-dessous de cette ligne; il décrit une ligne courbe ABC, dont les divers points sont de plus en plus éloignés de la ligne AM. Or, on sait que, lorsque le corps est arrivé en un point quelconque B de sa trajectoire, la quantité BD dont il se trouve abaissé au-dessous de la ligne AM est précisément égale au chemin AE qu'il aurait parcouru suivant la verticale, s'il était tombé sans vitesse initiale, pendant le temps qu'il a mis à aller de A en B. Si l'on prend le point B de la trajectoire où se trouve le corps après une seconde de mouvement, BD sera précisément le chemin qu'il aurait parcouru pendant une seconde à partir du commencement de son mouvement, si on l'avait laissé tomber du point A, sans lui donner de vitesse : le double de la distance BD sera donc, d'après ce qui précède, la mesure de la force qui détermine la chute de l'unité de masse du corps.

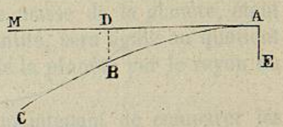


FIG. 339.

Voyons maintenant comment, en nous fondant sur ces considérations, nous pourrons déterminer la grandeur de la force qui agit sur l'unité de masse d'une planète, en admettant que cette planète se meut uniformément suivant une circonférence de cercle ayant le soleil pour centre. Arrivée en A (*fig.* 340), la planète est animée d'une vitesse dirigée suivant la tangente AM, et elle se trouve dans les mêmes conditions que si on la lançait de ce point suivant la direction AM, avec la vitesse même qu'elle possède. Elle se mouvrait indéfiniment suivant cette direction, si aucune force ne venait agir sur elle pour l'en faire sortir. Mais il n'en est pas ainsi. Elle est soumise à l'action d'une force qui est constam-

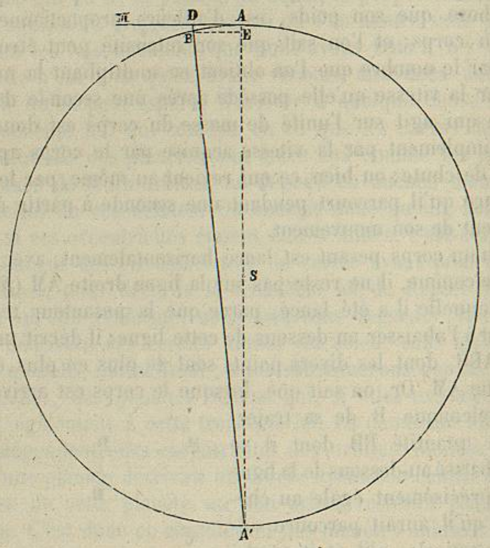


Fig. 340.

ment dirigée vers le soleil, et qui tend à la rapprocher de cet astre; aussi s'éloigne-t-elle de plus en plus de la tangente AM, en cédant à cette action : on peut dire qu'elle tombe vers le soleil, comme on dit qu'un corps pesant tombe à la surface de la terre, lorsqu'il a été lancé suivant une ligne AM (*fig.* 339), et qu'il se meut suivant la ligne courbe ABC. Si nous considérons le mouvement de la planète dans une très-petite portion de son orbite, à partir du point A (*fig.* 340), la direction de la force qui agit sur elle ne change pas sensiblement pendant tout le temps qu'elle parcourt cette portion d'orbite, et nous pouvons la regarder comme restant constamment parallèle à elle-même. Nous nous trouvons dès lors dans un cas entièrement analogue à celui d'un corps qu'on a lancé horizontalement à la surface de la terre, et qui, en vertu de l'action de la pesanteur, s'abaisse de plus en plus au-dessous de la direction suivant laquelle on l'a lancé. Si nous prenons,



sur l'orbite de la planète, l'arc AB qu'elle parcourt en une seconde de temps, la distance BD du point B à la tangente AM sera la quantité dont la planète sera tombée vers le soleil pendant cette seconde; et le double de BD servira de mesure à la force qui agit sur l'unité de masse de la planète.

Pour trouver la valeur de BD, nous opérerons de la manière suivante. Abaissons du point B la perpendiculaire BE sur le rayon AS, puis joignons le même point B au point A' de l'orbite qui est diamétralement opposé au point A. La ligne AE sera égale à BD; et, si nous regardons l'arc AB comme se confondant avec sa corde, ce qui est permis en raison de la petitesse de cet arc, l'angle ABA' sera droit comme étant inscrit dans une demi-circonférence de cercle. Mais, dans le triangle rectangle ABA', on a la proportion suivante :

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AB}{AA'}, \text{ d'où l'on déduit } AE=\frac{AB^2}{AA'}=\frac{AB^2}{2AS}$$

L'arc AB, étant le chemin parcouru par la planète en une seconde, est précisément sa vitesse. Donc la quantité AE, ou BD, dont la planète tombe vers le soleil en une seconde, s'obtient en divisant le carré de sa vitesse par le double du rayon de son orbite. La force qui agit sur l'unité de masse de la planète, étant mesurée, par le double de cette quantité, sera égale au quotient de la division du carré de la vitesse de la planète par le rayon du cercle qu'elle décrit.

§ 311. Nous sommes en mesure maintenant de comparer les intensités des forces qui agissent sur l'unité de masse des diverses planètes, au moyen de la troisième loi de Képler. Supposons pour cela que les planètes, se mouvant uniformément et suivant des cercles ayant le soleil pour centre, soient situées à des distances de cet astre proportionnelles aux nombres

1, 2, 3, 4, 5, .....

Pour avoir la vitesse d'une quelconque de ces planètes, il faut diviser la longueur de la circonférence qu'elle parcourt par le nombre de secondes qu'elle met à la parcourir. Le carré de cette vitesse sera donc égal au quotient de la division du carré de la circonférence de l'orbite de la planète par le carré du temps de sa révolution. Or, les carrés des circonférences des orbites des diverses planètes que nous considérons sont entre eux comme les carrés des distances de ces planètes au soleil, c'est-à-dire qu'ils sont proportionnels aux nombres

1, 4, 9, 16, 25, .....

D'ailleurs, d'après la troisième loi de Képler, les carrés des temps des révolutions de ces planètes étant proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites, c'est-à-dire aux cubes des diamètres des cercles qu'elles décrivent, ou bien encore aux cubes de leurs distances au soleil, sont entre eux comme les nombres

$$1, \quad 8, \quad 27, \quad 64, \quad 125, \quad \ldots\ldots$$

Les carrés des vitesses des planètes qui s'obtiennent en divisant les carrés des circonférences des orbites par les carrés des temps des révolutions, seront donc entre eux comme les quotients que l'on obtiendra en divisant respectivement les nombres 1, 4, 9, 16,.... par les nombres, 1, 8, 27, 64,.... c'est-à-dire qu'ils seront entre eux comme les nombres

$$1, \quad \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{1}{4}, \quad \tfrac{1}{5}, \quad \ldots\ldots$$

Mais, pour avoir la mesure de la force qui agit sur l'unité de masse de chacune de nos planètes, il faut diviser le carré de sa vitesse par le rayon du cercle qu'elle décrit. Les quotients que l'on obtiendra ainsi, pour les diverses planètes, seront évidemment proportionnels aux quotients de $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ divisés respectivement par 1, 2, 3, 4,.... c'est-à-dire qu'ils seront entre eux comme les nombres

$$1, \quad \tfrac{1}{4}, \quad \tfrac{1}{9}, \quad \tfrac{1}{16}, \quad \tfrac{1}{25}, \quad \ldots\ldots$$

Donc les forces qui agissent sur l'unité de masse des diverses planètes sont en raison inverse des carrés des distances de ces planètes au soleil.

C'est uniquement pour simplifier l'exposition du raisonnement précédent, que nous l'avons appliqué, non pas aux planètes réelles, mais à des planètes idéales dont les distances au soleil sont proportionnelles aux nombres 1, 2, 3, 4...... Si l'on remplace ces nombres entiers par les nombres qui représentent les distances moyennes du soleil à Mercure, à Vénus, à la terre, etc. (§ 268), on arrivera exactement au même résultat : on trouvera toujours que les forces qui agissent sur l'unité de masse de chacune de ces planètes sont en raison inverse des carrés des distances des planètes au soleil.

§ 312. Newton, étant parvenu de cette manière à trouver la loi suivant laquelle la force appliquée à l'unité de masse de chaque planète varie avec la distance de chaque planète au soleil, chercha ensuite à reconnaître si la forme elliptique des orbites ne résultait pas immédiatement de cette loi même. Il étudia donc le mouvement que devait prendre un corps auquel on aurait donné une vitesse initiale quelconque, et qui serait ensuite soumis à l'action d'une force constamment dirigée vers un point fixe et variant en raison inverse du carré de la distance du corps à ce point fixe. Il reconnut que l'orbite décrite par le corps, dans les conditions qui viennent d'être indiquées, était nécessairement une *section conique*, ayant le point fixe pour foyer. Or, on sait que les sections coniques, c'est-à-dire les lignes courbes suivant lesquelles la surface d'un cône peut être coupée par un plan, sont de trois espèces, savoir : 1° l'*ellipse*, que nous avons déjà définie précédemment (§ 103), et que l'on obtient en coupant le cône par un plan rencontrant toutes les génératrices d'un même côté du sommet; 2° la *parabole*, qui correspond au cas où le cône est coupé par un plan parallèle à un de ses plans tangents, et qui peut se déduire de l'ellipse comme nous l'avons expliqué (§ 292); 3° enfin l'*hyperbole*, dont nous n'avons pas eu occasion de parler, et qui résulte de l'intersection du cône par un plan parallèle à deux de ses génératrices.



La variation de la force qui agit sur une planète, en raison inverse du carré de la distance de cette planète au soleil, se trouve donc manifesté par la forme elliptique de son orbite, et par la position du soleil à l'un des foyers de cette orbite.

Si nous nous en tenons à la conséquence qui a été déduite de la troisième loi de Képler, dans le paragraphe précédent, nous pourrions croire que l'inégalité des forces qui agissent sur l'unité de masse des diverses planètes résulte de ce que les forces totales appliquées à ses planètes n'émanent pas d'une même cause, et agissent sur des corps de masses différentes. L'existence de la troisième loi de Képler, d'où nous avons tiré, comme conséquence nécessaire, la relation simple qui existe entre les intensités de ces forces appliquées à l'unité de masse des planètes, et les distances des planètes au soleil, pourrait être attribuée, soit à un pur effet du hasard, soit aux circonstances inconnues qui ont accompagné l'arrangement primitif des planètes autour du soleil; de telle sorte que, si l'on venait à modifier l'ordre établi, en plaçant quelques-unes des planètes plus près ou plus loin du soleil, les forces qui agiraient sur l'unité de masse de chacune d'elles ne seraient plus en raison inverse des carrés des distances de ces planètes au soleil. Mais le nouveau résultat auquel nous venons de parvenir ne peut laisser aucun doute à ce sujet. Le seul fait du changement de la distance d'une planète au soleil entraîne un changement correspondant dans la grandeur de la force à laquelle cette planète est soumise; la forme elliptique de l'orbite qu'elle décrit démontre que la force qui lui est appliquée varie en raison inverse du carré de sa distance au soleil. Si une planète, située à une distance 1 du soleil, s'éloignait de cet astre jusqu'à venir occuper la place d'une autre planète, dont la distance au soleil est 2, la force qui lui est appliquée se réduirait au quart de ce qu'elle était d'abord; la force agissant sur l'unité de masse de la planète deviendrait donc également quatre fois plus petite, c'est-à-dire qu'elle prendrait précisément la valeur de la force agissant sur l'unité de masse de la planète dont elle vient prendre la place. Les forces appliquées à l'unité de masse des diverses planètes ne sont donc inégales que parce que les planètes sont à des distances différentes du soleil; si elles se trouvaient placées toutes à une même distance de cet astre, l'unité de masse de chacune d'elles serait soumise exactement à la même force. Les forces totales qui agiraient sur les diverses planètes, dans le cas où elles seraient ainsi ramenées à une même distance du soleil, ne différeraient les unes des autres qu'en raison de l'inégalité des masses des planètes; ces forces seraient proportionnelles aux masses des corps auxquels elles seraient appliquées.

Il résulte évidemment, de tout ce qui précède, que *les choses se passent comme si le soleil attirait les planètes vers lui, les forces d'attraction étant proportionnelles aux masses des planètes et en raison inverse des carrés de leurs distances au soleil.* Nous disons que les choses se passent comme si le soleil attirait les planètes, parce qu'il nous est impossible d'arriver à une connaissance complète de la nature intime de la force à laquelle chaque planète est soumise. Cette force ne se manifeste à nous que par les effets qui résultent de son action sur la planète, et tout ce que nous pouvons conclure de l'examen attentif de ces effets, c'est la connaissance de la grandeur et de la direction de la force à chaque instant. Nous ne pouvons, en aucune manière, décider si le soleil attire réellement les planètes, ou bien si la tendance des planètes à se rapprocher du soleil est due à une cause toute différente de ce que nous entendons par une attraction émanant de cet astre.

§ 313. C'est en réfléchissant sur la chute des corps à la surface de la terre, que Newton fut amené à chercher les conséquences auxquelles pouvaient conduire les lois de Képler. Il se demanda, tout d'abord, si la force en vertu de laquelle les corps tombent, c'est-à-dire ce que nous nommons la force de la *pesanteur*, n'était pas la même que celle qui retient la lune dans son orbite autour de la terre. Mais, pour résoudre cette question, il lui fallait savoir



s'il pouvait regarder l'intensité de la pesanteur comme constante, quelle que fût la distance comprise entre le corps sur lequel elle agit et le centre de la terre; et, dans le cas où cette intensité ne serait pas constante, il avait besoin de connaître la loi de sa variation avec la distance. Il pensa alors que les forces qui retiennent les planètes dans leurs orbites autour du soleil pouvaient bien être aussi de même nature que la pesanteur, et que l'examen des lois auxquelles satisfont leurs mouvements pourrait lui fournir les indications dont il avait besoin, relativement à la variation de cette force avec la distance. C'est ainsi qu'il analysa les lois de Képler, et qu'il en déduisit les conséquences que nous venons de développer.

Il revint ensuite à la question qui l'avait préoccupé tout d'abord, et chercha à reconnaître si la force qui retient la lune dans son orbite n'est autre chose que la pesanteur terrestre diminuée conformément à la loi qu'il avait trouvée, c'est-à-dire dans le rapport inverse du carré de la distance au centre de la terre. Le résultat de ses recherches fut complétement d'accord avec ses prévisions.

On sait que la vitesse acquise, après une seconde de chute, par un corps qui tombe près de la surface de la terre, sans avoir reçu de vitesse initiale, est égale à $9^{m},8088$. Cette vitesse sert de mesure à l'intensité de la force qui agit sur l'unité de masse du corps, et qui détermine sa chute. Si l'on admet que l'action de la pesanteur sur un même corps varie en raison inverse du carré de la distance de ce corps au centre de la terre, il suffira de diviser le nombre 9,8088 par le carré de 60 ou par 3600, pour avoir l'intensité de la force de la pesanteur agissant sur l'unité de masse d'un corps placé, comme la lune, à une distance du centre de la terre égale à 60 rayons terrestres (§ 204); le quotient de cette division est égal à 0,002724. D'un autre côté, la circonférence de la terre étant de 40 millions de mètres, la circonférence de l'orbite de la lune est 60 fois plus grande; si l'on divise la longueur de cette dernière circonférence par le nombre de secondes contenues dans la durée de la révolution sidérale de la lune (§ 212), on trouve que la vitesse de la lune est de $1016^{m},7$ par seconde. En divisant le carré de cette vitesse de la lune par le rayon de son orbite, on doit obtenir la mesure de la force qui agit sur l'unité de masse de la lune (§ 309); on trouve ainsi le nombre 0,002706. Ce nombre diffère à peine de celui que nous venons de trouver pour l'intensité de la pesanteur relative à un corps qui serait placé à la même distance du centre de la terre que la lune : si l'on néglige la petite différence qui existe entre ces deux nombres

0,002724 et 0,002706, on voit que la force qui retient la lune dans son orbite est bien la même que celle qui fait tomber les corps à la surface de la terre, en tenant compte de ce que l'intensité de cette force varie en raison inverse du carré de la distance au centre de la terre. La théorie de Newton explique d'ailleurs, sans la moindre difficulté, pourquoi les deux nombres que nous venons d'obtenir ne sont pas tout à fait égaux.

§ 314. La force qui agit sur la lune, et qui change à chaque instant la grandeur et la direction de sa vitesse dans son mouvement autour de la terre, n'étant autre chose que la pesanteur terrestre, on doit en conclure que la terre exerce, aussi bien que le soleil, une sorte d'attraction sur tous les corps qui existent dans l'espace; et que l'intensité de cette attraction varie en raison inverse du carré de la distance qui existe entre le corps qui y est soumis et le centre de la terre.

Le soleil ne doit pas échapper à cette attraction de la terre; d'ailleurs la terre, qui est une planète, est attirée par le soleil comme toutes les autres planètes : le soleil et la terre s'attirent donc mutuellement. L'existence de satellites qui se meuvent autour de Jupiter, de Saturne, d'Uranus et de Neptune, montre que chacune de ces planètes exerce une attraction sur les corps qui l'environnent; et l'on peut en conclure de même qu'elles doivent attirer le soleil, comme elles sont attirées par lui. C'est en se fondant sur les considérations de ce genre, que Newton fut conduit à admettre que deux corps quelconques, placés comme on voudra dans l'espace, *gravitent* l'un vers l'autre, c'est-à-dire tendent à se rapprocher, comme s'ils s'attiraient mutuellement. Il admit, en outre : 1° que les forces qui se développent ainsi entre les deux corps sont égales entre elles, et agissent en sens contraires suivant la ligne droite qui joint les deux corps; 2° que l'intensité de chacune de ces deux forces est proportionnelle aux masses des deux corps, et en raison inverse du carré de la distance qui les sépare. Tel est le grand principe de la *gravitation universelle*, dont l'exactitude a été confirmée depuis, de la manière la plus complète, et qui a conduit à un grand nombre de résultats des plus importants.

Les corps célestes étant formés de la réunion d'un grand nombre de molécules matérielles, on doit regarder la gravitation comme existant de molécule à molécule. Ainsi, toutes les molécules de la terre attirent à elles une molécule placée près de la surface du globe terrestre; cette dernière molécule se trouve donc soumise à l'action d'autant de forces qu'il y a de molécules dans la terre, et c'est la résultante de toutes ces forces qui constitue ce que l'on appelle son poids. Les diverses molécules d'un même corps, étant attirées chacune par toutes les molécules de la terre, se trouvent dans les mêmes conditions que si chacune d'elles était soumise à la force unique, résultant de la composition de toutes les forces qui lui sont réellement appliquées. La résultante générale de toutes les résultantes partielles, correspondant ainsi aux diverses molécules du corps, est ce que l'on appelle le poids du corps; c'est cette résultante générale qui détermine le mouvement que prend le corps quand on l'abandonne à lui-même et que rien ne s'oppose à ce qu'il se rapproche de la terre. Il en est de même de l'action exercée par le soleil sur une planète; chaque molécule de la planète est attirée à la fois par toutes les molécules du soleil, et peut être regardée comme soumise à la résultante de toutes ces attractions; la résultante générale de toutes les résultantes partielles, correspondant à chaque molécule, est la force qui produit à chaque instant les changements de grandeur et de direction qu'éprouve la vitesse de la planète.



§ **315. Perturbations du mouvement des planètes.** — En se fondant sur l'existence de la gravitation universelle, telle que nous venons de la faire connaître, il est aisé de se faire une idée générale des circonstances que doivent présenter les mouvements des divers corps de notre système planétaire.

Newton a trouvé qu'une planète, attirée vers un point fixe, en raison inverse du carré de la distance qui la sépare de ce point, doit décrire une section conique ayant ce point fixe pour foyer (§ 312). Les planètes ne sont pas précisément dans ce cas; le soleil, qui les attire, n'est pas plus fixe dans l'espace que chacune d'elles. Mais si l'on étudie les mouvements que prennent simultanément le soleil et une planète, par suite de leur attraction mutuelle, en supposant qu'ils ne soient d'ailleurs soumis à l'action d'aucune autre force, on trouve que chacun de ces deux corps décrit une section conique ayant pour foyer leur centre de gravité commun; et, en cherchant quelles apparences présenterait le mouvement de la planète, pour un observateur qui serait placé sur le soleil, et qui participerait au mouvement de cet astre, on reconnaît que la planète lui semblerait décrire une section conique ayant le soleil pour foyer : les mouvements absolus du soleil et de la planète autour de leur centre de gravité commun et le mouvement relatif de la planète autour du soleil regardé comme immobile, sont de même nature que le mouvement d'une planète attirée vers un point fixe, en raison inverse du carré de la distance à ce point.