CHAPITRE XII

PROBLÈMES DIVERS

Nous avons classé les problèmes de ce chapitre en trois catégories.

La première contient des problèmes qu'on résout en supposant des nombres arbitraires pour les nombres cherchés et en modifiant ensuite ces nombres d'après le résultat qu'ils fournissent. La règle que l'on suit ainsi est ce que les vieux traités d'arithmétique nomment règle de *fausse position*.

La seconde renferme quelques problèmes qui n'ont pas de caractère commun.

Ceux qui composent la troisième sont des problèmes pour lesquels le raisonnement qui conduit à la solution ne diffère que par la forme de celui qu'emploie l'algèbre.

§ 1. — PROBLÈMES QUI SE RÉSOLVENT A L'AIDE DE NOMBRES SUPPOSÉS.

651. *On demande de payer 800 francs avec 67 pièces d'or, les unes de 20 francs, les autres de 5 francs. Combien donnera-t-on de pièces de chaque espèce ?*

Brevet élémentaire. Aspirantes. — Loiret, 1877.

D'abord, le nombre des pièces de 5 francs ne peut être qu'un nombre pair, puisque 800 est pair et que la somme formée par les pièces de 20 francs sera aussi un nombre pair.

Supposons qu'on donne 30 pièces de 5 fr. et par conséquent 37 pièces de 20 fr.

Les 30 pièces de 5^f font............ $5^f \times 30 = 150^f$
Les 37 pièces de 20^f font........... $20^f \times 37 = 740^f$
Total... 890^f

On a ainsi une somme trop forte de 90 fr.

Augmentons de 1 le nombre des pièces de 5^f et diminuons de 1 celui des pièces de 20 fr. L'excès de 90^f sera diminué de 20^f et augmenté de 5^f, et en définitive diminué de 15 fr.

Donc, autant de fois il y a 15^f dans 90^f, autant de pièces de 5^f on devra ajouter aux 30 qu'on avait d'abord données.

Ce nombre de fois est $90 : 15 = 6$.

Le nombre des pièces de 5^f est donc............ $30 + 6 = 36$.
Celui des pièces de 20^f sera..................... $37 - 6 = 31$.

(Voir ALG., *Solutions raisonnées*. Problème 9.)

652. *Dans une maison un peintre a peint 12 chambranles, les uns en marbre à 4 francs la pièce et les autres en granit à $2^f,50$. Il a reçu pour le tout $40^f,50$. Combien y a-t-il de chambranles en marbre et combien en granit?*

Brevet élémentaire. Aspirantes. — Paris, 1877.

Si tous les chambranles avaient été en marbre, on aurait payé :

$$4^f \times 12 = 48 \text{ fr.}$$

Entre cette somme et la somme donnée, la différence est:

$$48^f - 40^f,50 = 7^f,50.$$

Si on remplace un chambranle en marbre par un en granit, on diminue 48^f de 4^f et on l'augmente de $2^f,50$, ce qui fait une diminution de $1^f,50$ sur la différence de $7^f,50$.

Le nombre des chambranles en granit est donc égal au nombre de fois que $1^f,50$ est contenu dans $7^f,50$.

Le nombre de chambranles en granit est......... $7,5 : 1,5 = 5$.
Celui des chambranles en marbre est............. $12 - 5 = 7$.

653. *On veut distribuer une certaine somme à un certain nombre de pauvres. Si on donne 2 fr. à chacun, il reste 25 fr.; si on donne 3 fr. à chacun, il manque 15 fr. Trouver le nombre des pauvres et la somme à partager.*

Brevet élémentaire. Aspirantes.

1re MÉTHODE. — Si au lieu de 2 fr., on veut donner à chaque pauvre 1 fr. de plus, on devra donner en plus les 25 fr. qui restent et en outre 15 fr., c'est-à-dire 40 fr.

Il y a donc 40 pauvres.

La somme à partager est .... $80^f + 25^f = 105$ fr.

2e MÉTHODE. — Soit x le nombre des pauvres.

Si on donne 2 fr. à chacun, la somme à partager est.. $2x + 25$.

Si on donne 3 fr. à chacun, cette somme est......... $3x - 15$

On a donc : $3x - 15 = 2x + 25$.

De là on tire $x = 25 + 15 = 40$.

654. *Un vigneron doit acheter une maison avec le produit de sa récolte. S'il vendait la barrique de vin 145 francs, il aurait encore 830 francs après avoir payé la maison; s'il ne la vendait que 130 francs, il lui manquerait 220 francs. Trouver le prix de la maison et le nombre de barriques de vin du vigneron.*

Brevet élémentaire. Aspirantes.

En vendant la barrique 130^f au lieu de 145^f, on perd par barrique

$$145^f - 130^f = 15^f.$$

La perte totale se compose des 830^f qu'on n'a plus en sus et des 220^f, qui sont en moins; elle est donc égale à

$$830^f + 220^f = 1050^f.$$

Le nombre des barriques est égal au nombre de fois qu'il y a 15^f dans 1050 fr.

Ce nombre est....................... $1050 : 15 = 70$ barriques.

Or 70 barriques à 130 fr. font $130^f \times 70 = 9100^f$.

Le prix de la maison est donc

$$9100^f + 220^f = 9320^f.$$

655. *Un bassin de la contenance de 3 mètres cubes est alimenté par deux robinets, qui donnent par heure, le premier 480 litres et le second 360 litres. On demande pendant combien de temps il faudrait laisser couler séparément chaque robinet l'un après l'autre pour remplir le bassin en 7 heures.*

Brevet élémentaire. Aspirantes. — Niort, 1855.

1re MÉTHODE. — La capacité du bassin est de 3000 litres.

Le 1er robinet en coulant seul pendant 7 heures donnerait

$$480^l \times 7 = 3360 \text{ litres},$$

c'est-à-dire 360 litres de trop.

Si on laisse couler le 1er seulement pendant 6 heures et le 2e pendant l'heure suivante, il y aura sur les 3360 litres une diminution égale à

$$480 - 360 = 120 \text{ litres}.$$

Le nombre d'heures pendant lequel on devra laisser couler le 2e robinet est donc égal au nombre de fois que 120^l sont contenus dans 360 litres.

Ce nombre d'heures sera........................ $360 : 120 = 3$.

2e MÉTHODE. — Soit x le nombre d'heures pour le 1er robinet; le nombre d'heures pour le 2e sera $7 - x$.

Pendant x heures le 1er fournit.............. $480^l \times x$ ou $480x$.

Pendant $7 - x$, le 2e fournit $360 \times (7 - x)$ ou $2520 - 360x$.

On a donc l'équation

$$480x + 2520 - 360x = 3000$$

On en tire

$$120x = 3000 - 2520,$$
$$120x = 480,$$
$$x = \frac{480}{120} = 4.$$

656. *On a partagé une certaine somme entre deux personnes. La part de la 1re égale les $\frac{3}{4}$ de celle de la 2e, et en ajoutant le 10e de la 1re aux $\frac{4}{5}$ de la 2e, on obtient 100 fr. Trouver la somme entière et les deux parts.*

Brevet élémentaire. Aspirants. — Aisne.

Au lieu de supposer un nombre, il est bien plus simple de représenter par x la part de la 2e personne; celle de la 1re est alors $\frac{3x}{4}$.

Le 10e de la 1re est $\frac{3x}{40}$; les $\frac{4}{5}$ de la 2e sont $\frac{4x}{5}$.

L'énoncé du problème donne ainsi l'équation

$$\frac{3x}{40} + \frac{4x}{5} = 100.$$

Réponse. — 1re part, $85^f,71$; 2e part, $114^f,29$. Total, 200 fr.

(Voir ALG., *Solutions raisonnées*. Problème 17.)

657. *Un ouvrier travaille chez un tailleur pendant le mois de janvier. Pour chaque jour de travail, il reçoit* 5f,40; *mais pour chaque jour de chômage de sa part, il paye à son patron* 3 *fr. Le compte réglé, il reçoit* 103f,80. *Le mois ayant eu quatre dimanches, combien l'ouvrier a-t-il fait de journées de travail?*

Brevet élémentaire. Aspirantes. — Grenoble, 1878.

Le nombre des jours destinés au travail pendant ce mois est 27.
Si l'ouvrier avait travaillé tous les jours, il aurait reçu

$$5^f,40 \times 27 = 145^f,80.$$

Cette somme surpasse celle qu'il a reçue de

$$145^f,80 - 103^f,80 = 42^f.$$

Il a donc perdu des journées de travail.

Pour 1 jour de chômage, il perd 5f,40 qu'il aurait reçus plus 3 fr. qu'il doit payer, c'est-à-dire 8f,40.

Autant de fois il y a 8f,40 dans 42f, autant il y a de jours de chômage.

Le nombre de jours perdus est .... $42 : 8,4 = 5$

(Voir Alg., *Solutions raisonnées*. Problème 13.)

658. *Deux ouvrières travaillent dans un même atelier. Le salaire journalier de l'une est égal aux* $\frac{3}{4}$ *du salaire de l'autre. On sait que* 20 *journées de celle qui gagne le plus et* 25 *journées de l'autre ont été payées ensemble* 232f,50. *Combien chacune gagne-t-elle par jour?*

Brevet élémentaire. Aspirantes. — Novembre, 1881.

Supposons que la 2e gagne 4f par jour; la 1re gagnera 3f.
20 journées à 4f font........................... $4^f \times 20 = 80^f.$
25 journées à 3f font........................... $3^f \times 75 = 75^f.$
Le total donné aux deux ouvrières serait .... $155^f.$

Autant de fois il y a 155f dans 232f,50, autant de fois la journée de l'une vaut 3f et la journée de l'autre 4f.

On trouve $232,5 : 155 = 1,5.$
Le prix de la journée de la 1re est............ $3^f \times 1,5 = 4^f,50.$
Le prix pour la 2e est........................ $4^f \times 1,5 = 6^f,00.$

659. *Dans une fabrique travaillent* 25 *ouvriers et* 25 *ouvrières et le salaire journalier d'une ouvrière est les* $\frac{2}{3}$ *de celui d'un ouvrier. Le patron paye chaque jour à ces deux groupes de travailleurs une somme totale de* 312f,25. *On demande ce que chaque ouvrier et chaque ouvrière gagnent par jour.*

Brevet élémentaire. Aspirantes. — Novembre, 1881.

Supposons que l'ouvrier reçoive 3f par jour, l'ouvrière recevra 2 fr.
25 journées à 3f font................ $3^f \times 25 = 75^f$
25 journées à 2f font................ $2^f \times 25 = 50^f$
Total... 125^f

Autant de fois il y a 125f dans 312f,25, autant de fois il y a 3 fr. dans la journée de l'ouvrier et 2 fr. dans celle de l'ouvrière.

On trouve $312,25 : 125 = 2,498.$
L'ouvrier gagne donc..................... $3^f \times 2,498 = 7^f,494;$
l'ouvrière................................ $2^f \times 2,498 = 4^f,996.$

660. *Un éditeur fait réimprimer un ouvrage qui avait* 13 *volumes. Le nombre des pages par volume sera augmenté d'un* 8e, *le nombre des lignes de la page d'un* 12e *et le nombre des mots de la ligne sera diminué d'un* 9e. *Combien la nouvelle édition aura-t-elle de volumes?*

Brevet supérieur. Aspirantes. — Alger, 1878.

Supposons que dans l'édition en 13 volumes il y ait:
8 pages au volume, 12 lignes à la page, 9 mots à la ligne.
Dans la nouvelle édition, il y aura:
9 pages au volume, 13 lignes à la page, 8 mots à la ligne.
Dans la 1re édition, le nombre des mots des 13 volumes serait:

$$9 \times 12 \times 8 \times 13.$$

Si on désigne par x le nombre des volumes dans la 2e édition, le nombre des mots des x volumes sera:

$$8 \times 13 \times 9 \times x.$$

Ces deux nombres de mots dans les deux éditions étant égaux, on a:

$$8 \times 13 \times 9 \times x = 9 \times 12 \times 8 \times 13.$$

En divisant les deux nombres par les facteurs qui leur sont communs, on obtient

$$x = 12.$$

La 2e édition aura donc 12 volumes.

661. *Deux ouvriers travaillent ensemble, et le* 1er *gagne par jour un tiers de plus que le* 2e. *Au bout d'un certain temps,* 1er, *qui a travaillé 5 jours de plus que le 2e, a reçu 100 francs et le 2e 60 fr. Combien chacun gagnait-t-il par jour ?*

Brevet élémentaire. Aspirantes. — Laon, 1879.

Supposons que le prix de la journée du 2e soit 3 fr.; le prix de la journée du 1er sera 4 fr.

Dans ce cas, le nombre des journées du 1er serait $100 : 4 = 25$.
Le nombre des journées du 2e serait.............. $60 : 3 = 20$.
Or, la différence entre ces deux nombres de journées se trouvant précisément celle qui est énoncée dans le problème, les prix supposés sont les prix demandés.

Réponse. — Journée du 1er, 4 fr.; journée du 2e, 3 fr.

(Voir Alg., *Solutions raisonnées.* Problème 74.)

Observation. — La rapidité de cette solution tient au choix exceptionnel des nombres adoptés dans l'énoncé de la question; avec d'autres nombres il n'en serait pas tout à fait ainsi.

Supposons, par exemple, qu'au lieu de 5 jours, le 1er ait travaillé 9 jours de plus que le 2e.

Voici comment on raisonnera.

Le 1er, pour le même nombre de journées que le 2e, aurait reçu 60 fr. plus le tiers de 60 fr., qui est 20 fr., c'est-à-dire 80 fr.

L'excès de 100 fr. sur 80 fr. est le prix des journées faites en sus.

Or le prix de la journée du 1er vaut $\frac{4}{3}$ du prix de la journée du 2e; donc 9 fois les $\frac{4}{3}$ du prix de la journée du 2e, c'est-à-dire 12 fois le prix de la journée du 2e, valent 20 fr.

Le prix de la journée du 2e est...... $20 : 12 = 1^f\frac{2}{3} = 1^f,666$

Le prix de la journée du 1er sera :

$$1\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{3} = 2\,\frac{2^f}{9} = 2^f,222.$$

Réponse. — Journée du 1er 2f,22; journée du 2e 1f,67

662. *Il faut payer pour le passage d'un pont 15 centimes par voiture à deux chevaux, 10 centimes par voiture à un cheval, 5 centimes par cavalier et 3 centimes par piéton. Dans la quinzaine le nombre des voitures à deux chevaux a été les $\frac{2}{5}$ de celui*

des voitures à un cheval; le nombre de ces voitures a été les $\frac{3}{11}$ de celui des cavaliers; le nombre des cavaliers a été les $\frac{5}{27}$ de celui des piétons. La recette de la quinzaine s'est élevée à 168f,72. On demande combien il est passé de voitures à deux chevaux, de voitures à un cheval, de cavaliers et de piétons.

Admission à l'école normale des Ardennes. — 1855.

Pour abréger l'écriture, désignons par P le nombre des piétons, par C le nombre des cavaliers, par V_1 le nombre des voitures à un cheval, par V_2 le nombre des voitures à deux chevaux.

Le produit des dénominateurs des trois fractions

$$\frac{2}{5},\ \frac{3}{11},\ \frac{5}{27}$$

étant $5 \times 11 \times 27 = 1485$, supposons que P soit......... 1485.
C sera 5 fois le 27e de P, c.-à-d........ $5 \times 11 \times 5 = 275$;
V_1 sera 3 fois le 11e de 275, c.-à-d..... $5 \times 5 \times 3 = 75$;
V_2 sera 2 fois le 5e de 75, c.-à-d....... $5 \times 3 \times 2 = 30$.

Dans ce cas, la recette serait :

pour les piétons..............	$0^f,03 \times 1485 =$	$44^f,55$
pour les cavaliers............	$0^f,05 \times 275 =$	$13^f,75$
pour les voitures à 1 cheval..	$0^f,10 \times 75 =$	$7^f,50$
pour les voitures à 2 chevaux.	$0^f,15 \times 30 =$	$4^f,50$
Total...		$70^f,30$

Autant de fois il y a 70f,30 dans 168f,72, autant de fois les quatre nombres demandés vaudront les quatre nombres supposés.

Or on trouve........................... $168,72 : 70,3 = 2,4$.

On a donc :

$$P = 1485 \times 2,4 = 3564;$$
$$C = 275 \times 2,4 = 660;$$
$$V_1 = 75 \times 2,4 = 180;$$
$$V_2 = 30 \times 2,4 = 72.$$

(Voir Alg., *Solutions raisonnées.* Problème 37.)

663. *Pour 5 kilogrammes de chocolat on paye autant que pour 16 kilogrammes de sucre, et 2 kilogrammes de café coûtent autant que 25 hectogrammes de chocolat.*

On a acheté pour 32f,25 de ces trois marchandises. Combien vaut le kilogramme de chacune d'elles, si l'on a eu 1 kilogr. 7 hect. de chocolat, 11 hectogr. de sucre et 374 décagr. de café ?

Brevet élémentaire. Aspirantes. — Paris, 1880.

De l'énoncé résulte d'abord la relation suivante :

$$4^{kg} \text{ café} = 5^{kg} \text{ chocolat} = 16^{kg} \text{ sucre.}$$

Supposons que 1 kilogr. de sucre coûte.................. 1fr.
1^{kg} chocolat coûtera le 5^e de 16 fr., c.-à-d............. $3^f,20$.
1^{kg} café coûtera le quart de 16 fr., c.-à-d.............. $4^f,00$.
Dans ce cas, on aurait payé:
pour $1^{kg},1$ sucre................................ $1^f,10$
pour $1^{kg},7$ chocolat.............. $3^f,2 \times 1,7 = 5^f,44$
pour $3^{kg},74$ café................... $4 \times 3,74 = 14^f,96$
Total... $21^f,50$.

Or la somme de $32^f,25$ est égale à 1 fois et demie $21^f,50$.
Le prix d'achat est donc 2 fois et demie celui qu'on avait supposé
On trouve ainsi pour le prix du kilogramme :

sucre.......... $1^f + 0^f,50 = 1^f,50$;
chocolat.... $3^f,20 + 1^f,60 = 4^f,80$;
café............... $4^f + 2^f = 6$ fr.

664. *Un marchand a acheté 10 pièces d'étoffe d'égale longueur, à raison de $13^f,75$ le mètre. Il en a vendu la moitié à $15^f,50$ le mètre, la 6^e partie à $16^f,25$, le quart à $17^f,50$ et le reste à 17 fr. le mètre. Il a fait aux divers acheteurs une remise de 2 % sur le montant de leur facture, et il a ainsi réalisé avec la vente totale un bénéfice de 2349 francs. Trouver combien chaque pièce contenait de mètres et combien le marchand a gagné pour cent.*

Brevet supérieur. Aspirantes. — Loire-Inférieure, 1879.

En trois fois le marchand a vendu

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12} \text{ de toute l'étoffe.}$$

La 4^e fois, il a vendu le reste contenant $\frac{1}{12}$ de toute l'étoffe.

Supposons qu'il n'y ait que 12 mètres en tout.
6^m à $15^f,50$ donnent............. $15^f,50 \times 6 = 93^f,00$
2^m à $16^f,25$ donnent............. $16^f,25 \times 2 = 32^f,50$
3^m à $17^f,50$ donnent............. $17^f,50 \times 3 = 52^f,50$
1^m à 17 fr. donne.................................. $17^f,00$
La vente de 12^m donnerait..................... $195^f,00$.
A déduire $0^f,02$ par franc, c'est-à-dire $0^f,02 \times 195 =$ $3^f,90$
Produit net de la vente de 12 mètres.......... $191^f,10$.
Prix d'achat de 12 mètres..... $13^f,75 \times 12 = 165^f,00$
Bénéfice... $26^f\,10$

Autant de fois il y a $26^f,10$ dans 2349 fr., autant il y a de fois 12 mètres dans l'achat des 10 pièces.
On trouve $2349 : 26,1 = 90$.
Les 10 pièces contiennent donc............ $12^m \times 90 = 1080^m$.
Chaque pièce a le 10^e de 1080^m, c.-à-d. 108 mètres.
Sur 165 fr. le gain est de $26^f,10$; sur 1 fr. il est $26^f,10 : 165$.
Sur 100 fr., le gain est $2610 : 165 = 15,818$.

665. *Un propriétaire emploie la 9^e partie de sa fortune pour acheter une maison ; avec le quart du reste il achète un bois ; enfin de ce qui lui reste encore il fait deux parts qui sont entre elles comme 2 et 3. La 1^{re} part étant placée à 4 % et la 2^e à 5,5 %, il se fait un revenu de 8820 fr. Calculer les deux parts, la fortune entière et le prix du bois.*

Brevet supérieur. Aspirantes. — Douai.

Après l'achat de la maison, il reste $\frac{8}{9}$ de la fortune.

Le bois coûte le quart de ce reste, c'est-à-dire $\frac{2}{9}$ de la fortune.

La maison et le bois ont pris :

$$\frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ de la fortune.}$$

Le capital placé est donc les $\frac{2}{}$ de la fortune.

Supposons que l'une des deux parts soit 200 fr., l'autre sera 300 fr.
Or 200 fr. à 4 % rapportent.................. 8 fr.
300 fr. à 5,5 % rapportent................ $16^f,50$
500 fr. ainsi placés rapportent.............. $24^f,50$.
1000 rapporteraient......................... $24^f,50 \times 2 = 49$ fr.
Autant de fois il y a 49 fr. dans 8820 fr., autant de fois le capital placé vaut 1000 fr. Ce capital est donc

$$\frac{8820}{49} \times 1000 = 180\,000 \text{ fr.}$$

La 1^{re} part est les $\frac{2}{5}$ ou 0,4 du capital ; la 2^e en est les $\frac{3}{5}$ ou 0,6.

La 1^{re} part est donc $18\,000^f \times 4 = 72\,000$ fr.
La 2^e part est...... $18\,000^f \times 6 = 108\,000$ fr.

Le capital placé étant les $\frac{2}{3}$ de la fortune, cette fortune vaut 3 fois la moitié de 180 000 fr. On a donc :

Fortune.................. $90\,000 \times 3 = 270\,000$ fr.
Prix de la maison...... $270\,000 : 9 = 30\,000$ fr.
Prix du bois .... $30\,000 \times 2 = 60\,000$ fr.

§ 2. — PROBLÈMES DE DIVERSES ESPÈCES.

666. *On a déboursé 111 francs pour payer deux ouvriers dont l'un a fait 12 journées et l'autre 15 ; le 2e recevait par journée 2 francs de plus que le 1er. Trouver le prix de la journée de chacun.*

Brevet élémentaire. Aspirantes.

1re MÉTHODE. — Le 2e ouvrier a reçu 15 fois le prix de la journée du 1er, plus 15 fois 2 francs ou 30 francs.

La somme totale de 111 fr. égale donc 27 fois le prix de la journée du 1er, plus 30 francs.

27 fois la journée du 1er égalent........ $111^{f} - 30^{f}$ c.-à-d. 81 fr.

Le prix de cette journée est donc................ $81 : 27 = 3$ fr.

Le prix de la journée du 2e est $3 + 2 = 5$ fr.

2e MÉTHODE. — Écrivons ce qui précède avec la notation algébrique.

Soit x le prix de la journée du 1er évaluée en francs ; le prix de la journée du 2e sera $x + 2$.

Le 1er a reçu $12x$; le 2e $(x + 2) \times 15$, c.-à-d. $15x + 30$.

On a donc l'équation

$$12x + 15x + 30 = 111.$$

On en tire :

$$27x = 81.$$

$$x = \frac{81}{27} = 3.$$

667. *Deux ouvriers ont reçu 120 francs pour un ouvrage. Le premier y avait travaillé 15 jours et le second 12 jours, et le premier faisait 4 mètres pendant que le second en faisait 3. Combien revient-il à chacun ?*

Brevet élémentaire. Aspirantes.

Le travail de la journée du 1er égale $\frac{4}{3}$ de celui du 2e.

Les 15 journées du 1er valent donc 15 journées du 2e plus le tiers de 15, qui est 5, ce qui fait 20 journées.

La somme doit donc être partagée proportionnellement aux deux nombres 20 et 12.

En appliquant la règle, on a :

$$120^{f} : 32 = 3^{f},75.$$

Part du 1er.... $3^{f},75 \times 20 = 75$ fr.

Part du 2e..... $3^{f},75 \times 12 = 45$ fr.

668. *Un cultivateur a fait deux acquisitions successives. Il a acheté la 1re fois 2 hectares 75 centiares de vigne et 3 hectares 34 centiares de champ pour la somme totale de 15 042f,25.*

La 2e fois il a acheté deux parcelles de vigne, ayant l'une 1 hect. 72 ares 33 centiares et l'autre 28 ares 42 centiares, et deux parcelles de champ, l'une de 2 hect. 25 ares et l'autre de 4 hect. 53 ares 75 centiares, et pour le tout il a donné 23 316f,25. L'hectare de vigne a été payé le même prix dans ces deux acquisitions, ainsi que l'hectare de champ. Trouver le prix de l'hectare de vigne et celui de l'hectare de champ.

Concours pour les bourses d'enseignement primaire supérieur. — Paris, 1880.

1er achat	vigne...........................	$200^{a},75$
	champ..........................	$300^{a},34$;
2e achat	vigne.......	$172^{a},33 + 28^{a},42 = 200^{a},75$
	champ	$225^{a},00 + 453^{a},75 = 678^{a},75$.

La différence est :

entre les surfaces des deux achats......... $378^{a},41$ de champ ;

entre les prix payés.......... $23\,316^{f},25 - 15\,042^{f},25 = 8274$ fr.

Le prix de l'are du champ est donc :

$$8274^{f} : 378,41 = 21^{f},86517.$$

Le prix payé pour le champ dans le 1er achat est :

$$21^{f},8651 \times 300,34 = 6\,566^{f},96.$$

Le prix des $200^{a},75$ de vigne est donc :

$$15\,042^{f},25 - 6\,566^{f},96 = 8\,475^{f},29.$$

Le prix de l'are de vigne est par conséquent :

$$8\,475^{f},29 : 200,75 = 42^{f},2181.$$

Réponse. — L'hectare de champ a coûté $2186^{f},52$.
L'hectare de vigne........ $4221^{f},81$.

669. *Une pièce de vin pur contenant 228 litres, on en tire 20 litres que l'on remplace par de l'eau. On tire de nouveau 20 litres du mélange que l'on remplace par de l'eau, et l'on répète indéfiniment cette opération.*

Quelle loi suivront les quantités décroissantes de vin pur contenues dans le tonneau (mêlées à l'eau)? Calculer ce qui restera de vin après la 3e opération.

Brevet supérieur. Aspirantes. — Dijon, 1879.

Après qu'on a tiré 20 litres de vin, il n'en reste que 208 litres. Ce reste est une fraction du vin primitif exprimée par

$$\frac{208}{228} \text{ ou } \frac{52}{57}.$$

Le tonneau ayant ensuite été rempli avec de l'eau, on tire 20 litres de ce mélange ; il reste 208 litres, c'est-à-dire $\frac{208}{228}$ ou $\frac{52}{57}$ du mélange qui remplissait le tonneau.

Le vin qui reste alors est les $\frac{52}{57}$ des $\frac{52}{57}$ du vin primitif, c.-à-d.

$$\frac{52}{57} \times \frac{52}{57} \text{ ou } \left(\frac{52}{57}\right)^2.$$

En raisonnant de la même manière, on trouve que la fraction du vin primitif qui reste dans le tonneau est :

$$\text{après la 3}^\text{e} \text{ opération } \left(\frac{52}{57}\right)^3 \text{; après la 4}^\text{e} \left(\frac{52}{57}\right)^4\text{, etc.}$$

Le nombre de litres de vin qui restent dans le tonneau après la 3e opération est

$$228 \times \left(\frac{52}{57}\right)^3 = 228 \times \frac{140\,608}{185\,193} = 173 \text{ litres.}$$

670. *A 28 mètres au-dessous du sol à Paris, la température est constante et égale à* $11^d,7$ *du thermomètre centigrade; à 505 mètres au-dessous du sol, la température est* $27^d,33$.

En admettant que l'accroissement de température soit proportionnel à la quantité dont on s'enfonce au-dessous de la couche invariable, on demande à quelle profondeur la température sera de 100 degrés centigrades,

Chercher aussi quelle serait la température du centre de la terre, le rayon moyen de la terre étant de 6366 kilomètres.

Brevet élémentaire. Aspirants. — Paris, 1877.

1° De la couche invariable à la profondeur de 505 mètres, la distance est

$$505 - 28 = 477 \text{ mètres.}$$

L'augmentation de température entre ces deux couches est

$$27,33 - 11,70 = 15^d,63.$$

De la couche invariable jusqu'à la couche où la température est de 100 degrés, l'augmentation de température est de

$$100 - 11,7 = 88^d,3.$$

Ainsi une augmentation de température de $15^d,63$ correspond à un abaissement de 477^m à partir de la couche invariable.

Une augmentation de 1 degré correspondrait à une distance de

$$\frac{477}{15,63} = 30^m,52.$$

La distance correspondante à une augmentation de température de $88^d,3$ sera égale à

$$30^m,52 \times 88,3 = 2694^m,9.$$

La profondeur à partir de la surface sera

$$2695 + 28 = 2723 \text{ mètres.}$$

2° La distance de 28 mètres est négligeable par rapport à la distance de 6 366 000 mètres entre la surface et le centre de la terre. En outre, on peut prendre 30 mètres en nombre rond pour la distance moyenne correspondant à une élévation de température de 1 degré.

Dans ce cas, il y aurait autant de degrés dans la température au centre de la terre qu'il y a de fois 30 dans 6 366 000.

On trouverait.................. 6 366 000 : 30 = 212 200 degrés.

671. *Deux frères travaillent chez le même patron, et l'aîné gagne par jour un 5e de plus que le cadet. Au bout du mois le patron règle leur compte. L'aîné qui a travaillé 4 jours de plus que le cadet reçoit 168 francs, tandis que celui-ci ne reçoit que 120 francs. Trouver le prix de la journée pour chacun et le nombre de journées.*

Brevet élémentaire. Aspirants.

Ce problème est semblable au problème 661.

Réponse. — Pour l'aîné : 28 journées à 6 francs ;
Pour le cadet : 24 journées à 5 francs.

672. *Un marchand prélève tous les ans au commencement de chaque année une somme de 4000 francs sur les fonds qu'il a en commerce, et cependant chaque année sa fortune s'augmente du* *tiers de ce qui lui reste. Il se trouve avoir 118 400 francs au bout de 3 ans. Combien avait-il au commencement de la* 1^re^ *année?*

Brevet élémentaire. Aspirants. — Aisne, 1879.

A la fin de la 3^e^ année, il a 4 fois le tiers de la somme qu'il avait au commencement de cette année après le prélèvement de 4000 fr.

4 tiers de cette somme valent 118 400 fr.

Le tiers vaut........................ $118\,400^f : 4 = 29\,600$ fr.

La somme est........................ $29\,600^f \times 3 = 88\,800$ fr.

Il avait donc à la fin de la 2^e^ année :

$$88\,800^f + 4000^f = 92\,800 \text{ fr.}$$

Cette nouvelle somme vaut aussi 4 fois le tiers de ce qu'il avait au commencement de la 2^e^ année, après le prélèvement de 4000 francs. Ce qu'il avait à ce moment était donc

$$\frac{92\,800^f}{4} \times 3 + 4000^f = 69\,600^f + 4000^f = 73\,600 \text{ fr.}$$

Cette dernière somme vaut de même 4 fois le tiers de ce qu'il avait au commencement de la 1^re^ année, après le prélèvement de 4000 fr. Ce qu'il avait en commençant était donc

$$\frac{73\,600^f}{4} \times 3 + 4000^f = 55\,200^f + 4000^f = 59\,200 \text{ fr.}$$

Réponse. — Capital primitif, 59 200 fr.

673. *Une usine produit 8575 tonnes de fonte, qui reviennent à* $8^f,40$ *les 100 kilogr. plus* $0^f,30$ *pour le salaire des ouvriers. La fonte est vendue 125 fr. la tonne. Le capital de l'usine est de 360 000 fr. et produit un intérêt de 10 %. Le fonds de roulement est de 340 000 fr. et produit un intérêt de 6 %.*

On demande : 1° le bénéfice produit par l'usine ; 2° de combien il faudrait diminuer l'intérêt du fonds de roulement pour augmenter le salaire des ouvriers de $\frac{12}{65}$ *sans diminuer le bénéfice.*

Brevet supérieur. Aspirants. — Caen, 1877.

L'intérêt des $360\,000^f$ est........................ $36\,000^f$

L'intérêt des $340\,000^f$ est........ $6^f \times 3400 =$ $20\,400^f$

On a à payer un intérêt total de... $56\,400^f$.

Le prix de fabrication de 100^kg^ de fonte est $8^f,70$.

Le prix de revient de la tonne de fonte est 87 francs.

La vente de la tonne produit un bénéfice égal à

$$125^f - 87^f = 38 \text{ fr.}$$

Le bénéfice total est........... $38^f \times 8575 = 325\,850^f$

Retranchons les intérêts à payer.............. $56\,400^f$

On a pour bénéfice net... $269\,450^f$.

2° Le salaire des ouvriers par 100^kg^, augmenté de ses $\frac{12}{65}$, sera

$$0^f,30 + 0^f,30 \times \frac{12}{65} = 0^f,355.$$

L'excédent de dépense sera donc :

par 100 kilogrammes $0^f,055$; par tonne $0^f,55$;

pour 8575 tonnes $0^f,55 \times 8575 = 4716^f,25$.

On devra réduire l'intérêt du fonds de roulement d'une somme égale à

$$20\,400^f - 4716^f,25 = 15\,683^f,75.$$

674. *Une petite Société au capital de 14 575 fr. perd la* 1^re^ *année 7 % de son capital ; la* 2^e^ *année elle perd 6,5 % du capital restant ; enfin la* 3^e^ *année, elle gagne 23 % sur le capital qui lui restait. Quel est le capital à la fin de la* 3^e^ *année ?*

Que reviendra-t-il à chaque action de 25 fr. ?

Admission à l'École normale de garçons. — Toulouse, 1879.

Pour abréger, désignons par C le capital de 14 575 francs.

A la fin de la 1^re^ année, la Société a seulement........ $C \times 0,93$.

Pendant la 2^e^ année, la perte est les 0,065 de l'avoir du commencement de cette année ; il n'en reste que les 0,935.

L'avoir à la fin de la 2^e^ année est donc....... $C \times 0,93 \times 0,935$

Pendant la 3^e^ année, on gagne 0,23 de l'avoir du commencement de cette année, c'est-à-dire............. $C \times 0,93 \times 0,935 \times 0,23$.

Le capital à la fin de la 3^e^ année est donc :

$$C \times 0,93 \times 0,935 + C \times 0,93 \times 0,935 \times 0,23$$

ou

$$C \times 0,93 \times 0,935 \times 1,23 = C \times 1,069\,5465.$$

En effectuant la multiplication, on trouve :

$$14\,575 \times 1,069\,5465 = 15\,588^f,64$$

De cette somme ôtons .... $14\,575^f,00$

Le bénéfice réalisé est... $1013^f,64$.

Pour un capital de 14 575 fr., le gain est $1013^f,64$.

Pour un capital de 25 fr., le gain sera

$$\frac{1013,64}{14\,575} \times 25 = \frac{1013,64}{583} = 1,738.$$

Réponse. — Capital final 15 588^f,64. — Gain 1^f,738 par action.

675. *Un négociant augmente sa fortune du tiers de sa valeur au bout de la 1re année. Au bout de la 2^e année elle est augmentée du quart de ce qu'elle était au commencement de cette année; au bout de la 3^e année elle est augmentée de la 5^e partie de la valeur qu'elle avait au commencement de la 3^e année. Elle vaut alors 57 800 fr. Calculer sa valeur primitive.*

Brevet élémentaire. Aspirants. — Paris, 1878.

Pour plus de clarté, désignons par F la fortune primitive.

Au bout de la 1re année, le capital est $\frac{4}{3}$ de F.

Au bout de la 2^e année, le capital vaut :

$$\frac{}{3} \text{ de F} + \frac{1}{3} \text{ de F, c'est-à-dire } \frac{5}{3} \text{ de F.}$$

Au bout de la 3^e année, le capital vaut :

$$\frac{5}{3} \text{ de F} + \frac{1}{3} \text{ de F, c'est-à-dire } \frac{6}{3} \text{ de F ou 2 F.}$$

Le double de F est ainsi 57 800 fr.
La fortune primitive était donc 57 800 : 2 = 28 900 fr.

(Voir Alg., *Solutions raisonnées.* Problème 43.)

676. *Une personne fait valoir sa fortune de la manière suivante : le 5^e est placé à 15 % par an ; les 2 tiers du reste produisent 7^f,40 % ; le surplus donne 660 francs d'intérêt à raison de 2^f,75 %. Calculer d'après ces données : 1° la fortune totale de cette personne ; 2° son revenu annuel ; 3° le taux moyen auquel est placé le capital.*

Brevet élémentaire. Aspirants. — Clermont, 1878.

Pour abréger, désignons la fortune par F.

1° $\frac{1}{5}$ de F est placé à 15 % ; il reste $\frac{4}{5}$ de F.

Les $\frac{2}{}$ du reste sont $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$ de F placés à 7,40 %.

Le total de ces deux parties est $\frac{1}{5} + \frac{8}{15} = \frac{11}{15}$ de F.

La 3^e partie est $\frac{4}{15}$ de F ; elle produit 660^f à 2,75 %.

Elle vaut autant de fois 100 fr. qu'il y a de fois 2^f,75 dans 660 fr.

$\frac{4}{15}$ de F valent $\frac{660}{2,75} \times 100 = 24\,000$ fr.

$\frac{1}{15}$ de F vaut le quart de 24 000 fr., c.-à-d. 6000 fr.

La valeur entière de F est.............. 6000^f × 15 = 90 000 fr.
2° La 1re partie placée à 15 % est 90 000 : 5 = 18 000 fr.
Son intérêt annuel est.................. 15^f × 180 = 2700 fr.
La 2^e partie placée à 7,4 % est 6000^f × 8 = 48 000 fr.
Son intérêt est.......................... 7^f,4 × 480 = 3552 fr.
3° L'intérêt total est............ 2700^f + 3552^f + 660^f = 6912 fr.
Un capital de 90 000 fr. rapporte donc 6912 fr.
Un capital de 100 fr. rapportera 6912 : 900 = 7^f,68.

Réponse. — Fortune 90 000 fr. — Revenu annuel 6912 fr.
Taux moyen du placement 7,68 %.

677. *Un spéculateur a augmenté au bout d'un an sa fortune des $\frac{2}{27}$ de sa valeur ; l'année suivante des $\frac{6}{11}$ de sa nouvelle valeur ; au bout de la 3^e année des $\frac{7}{18}$ de la valeur qu'elle avait à la fin de la 2^e. Elle atteint alors 428 694 fr. Quelle était sa valeur primitive ?*

Brevet élémentaire. Aspirants. — Charente, 1876.

Ce problème est semblable au problème 675.

Réponse. — Valeur primitive 185 947^f,10.

(Voir Alg., *Solutions raisonnées.* Problème 41.)

678. *Un commerçant est établi depuis 4 ans. Pendant la 1re année son capital s'est accru de ses $\frac{2}{7}$; pendant la 2^e année il a diminué de $\frac{1}{8}$ de ce qu'il était après la 1re. Le bénéfice de la 3^e année représente la 12^e partie du capital primitif. Enfin pendant la 4^e année, le gain est égal à celui de l'ensemble des trois* *premières. Au bout des 4 ans, l'avoir du commerçant s'élève à 30 100 francs. Combien avait-il en commençant ?*

Brevet élémentaire. Aspirants. — Nevers, 1879.

Pour plus de clarté, désignons par C le capital primitif.

Au bout de la 1re année, on a $C + \frac{2}{7}$ de C ou $\frac{9}{7}$ de C.

Pendant la 2e année, on perd $\frac{1}{8}$ de $\frac{9}{7}$ de C, c'est-à-dire $\frac{9}{56}$ de C.

On a donc à la fin de la 2e année seulement :

$$\frac{7}{8} \text{ de } \frac{9}{7} \text{ de C ou } \frac{9}{8} \text{ de C.}$$

Le bénéfice pendant la 3e année est $\frac{1}{12}$ de C ; on a donc à la fin de la 3e année :

$$\frac{9}{8} + \frac{1}{12} = \frac{27}{24} + \frac{2}{24} = \frac{29}{24} \text{ de C.}$$

Le gain pendant la 4e année est :

$$\frac{2}{7} - \frac{9}{56} + \frac{1}{12} = \frac{24}{168} - \frac{27}{168} + \frac{14}{168} = \frac{35}{168} \text{ de C.}$$

A la fin de la 4e année, l'avoir du commerçant est donc :

$$\frac{29}{24} + \frac{35}{168} = \frac{203}{168} + \frac{35}{168} = \frac{238}{168} = \frac{119}{84} \text{ de C.}$$

119 fois la 84e partie du capital primitif valent ainsi 31 000 fr.

La 84e partie de ce capital vaudrait $\frac{30\,100^f}{119}$.

Le capital entier valait $\frac{30\,100}{119} \times 84 = 21\,247$ fr.

(Voir Alg., *Solutions raisonnées*. Problème 42.)

679 *Un négociant a acheté du charbon au prix de $48^f,65$ les 1000 kil. Il paye 4540 fr. pour transport et par hectolitre 18 centimes de droits. En revendant son charbon $5^f,40$ l'hectolitre, il gagne 15 %. Si l'on admet que le mètre cube de charbon pèse 849 kilogr., on demande le poids du charbon qui a été vendu.*

Brevet élémentaire. Aspirants. — Caen, 1877.

En gagnant 15 % on vend $1^f,15$ ce qui a coûté 1 fr.
L'hectolitre coûte au marchand $5,40 : 1,15 = 4^f,695\,652$.
Or 1000^{kg} lui avaient coûté $48^f,65$.
Le mètre cube ou 0,849 de 1000^{kgr} coûtaient donc

$$48^f,65 \times 0,849 = 41^f,303\,85$$

Le prix d'achat de l'hectolitre était $4^f,130\,385$.
Avec les droits, l'hectol. coûtait $0^f,18$ de plus, c.-à-d. $4^f,310385$
Or le prix de revient est........................... $4^f,695652$

Différence... $0^f,385267$.

Cette différence est le prix du transport par hectolitre.
Le nombre d'hectolitres vendus est donc

$$4540 : 0,385\,268 = 11\,784 \text{ hectolitres.}$$

Le poids du charbon vendu est

$$84^{kg},9 \times 11\,784 = 1\,000\,461 \text{ kilogr.}$$

(Voir Alg., *Solutions raisonnées*. Problème 29.)

680. *On a payé 8000 francs un champ de 3 hectares 9 ares. Une partie ensemencée en blé donne un revenu net de 4,25 % ; l'autre partie ensemencée en seigle ne donne que 3,5 %. Le revenu total ayant été de 315 francs, on demande quelle est la superficie de chacune des deux parties.*

Brevet élémentaire. Aspirants. — Douai, 1879.

1re méthode. — Pour un terrain de 100 fr. ensemencé en blé, le revenu serait $4^f,25$.
Le terrain tout entier produirait $4^f2,5 \times 80 = 340$ fr.
La différence entre ce revenu et le revenu donné est

$$340^f - 315^f = 25 \text{ fr.}$$

La différence entre les revenus de 100^f de terrain, l'un en blé et l'autre en seigle est

$$4^f,25 - 3^f,50 = 0^f,75.$$

Si on prend sur le champ total un espace du prix de 100 fr. pour le mettre en seigle, la différence de 25 fr. diminue de $0^f,75$; donc autant de fois il y aura $0^f,75$ dans 25 fr., autant il y a d'espaces au prix de 100 fr. ensemencés en seigle. Ce nombre de fois est

$$\frac{25}{0,75} = \frac{2500}{75} = \frac{100}{3}.$$