La partie ensemencée en seigle vaut donc

$$100^f \times \frac{100}{3} = \frac{10\,000^f}{3}.$$

Or pour 8000 fr. ou $\frac{24\,000^f}{3}$, on a 309 ares.

Pour $\frac{1000^f}{3}$, on aurait .... $\frac{309^a}{24}$.

Pour $\frac{10\,000^f}{3}$, le terrain a .... $\frac{309^a}{24} \times 10 = 128^a,75$.

Le terrain en seigle a .... $128^a,75$.
Le terrain en blé a $309 - 128,75 = 180^a,25$.
2e MÉTHODE. — Soit x la valeur de la partie ensemencée en blé.
La valeur de la partie ensemencée en seigle sera $8000 - x$.
Les revenus des deux parties sont :

pour la 1re, $\frac{x \times 4,25}{100}$; pour la 2e, $\frac{8000 - x}{100} \times 3,50$.

On a donc l'équation

$$\frac{x \times 4,25}{100} + \frac{(8000 - x) \times 3,50}{100} = 315.$$

En chassant le dénominateur 100 et multipliant encore tous les termes par 100, on trouve :

$$425x + 2\,800\,000 - 350x = 3\,150\,000$$

De là on tire :

$$75x = 350\,000,$$
$$x = \frac{350\,000}{75} = \frac{140\,000}{3} \text{ fr.}$$

Pour 8000 fr., on a eu 309 ares.
On aurait :

pour 1000 fr., $\frac{309^a}{8}$; pour $\frac{1}{3}$ de 1000 fr. $\frac{309^a}{24}$.

Pour $\frac{14}{3}$ de 1000 fr., on a $\frac{309^a}{24} \times 14 = \frac{103 \times 7}{4} = 180^a,25$.

Le terrain en blé a donc $180^a,25$.

681. *Une personne qui avait emprunté 6000 fr. à intérêts simples s'est libérée en 10 ans du capital et des intérêts, en payant 800 fr. à la fin de chaque année. A quel taux avait-elle emprunté?*

Brevet supérieur. Aspirantes. — Grenoble, 1878.

Supposons le taux de 1 franc.
L'emprunteur doit au bout de 10 ans.............. $6000^f + 600^f$.
Les payements successifs de 800 fr. valent à l'époque du remboursement complet :

le 1er, $800^f + 8^f \times 9$; le 2e, $800^f + 8^f \times 8$; le 3e, $800^f + 8^f \times 6$;....
.... l'avant-dernier, $800^f + 8$; le dernier, 800^f

Leur total est :

$$800^f \times 10 + 8^f \times (9 + 8 + 7 + \ldots 2 + 1) = 8000^f + 8^f \times 45 = 8000^f + 360^f.$$

D'un côté l'emprunteur doit............. $6000^f + 600^f$
De l'autre, il donne....................... $8000^f + 360^f$
Différence... $2000^f - 240^f$.

Les 2000 fr. qu'il donne en sus du capital ne sont pas compensés par les 240 fr. d'intérêt qu'il y a en moins.

Quel que soit le taux, le capital de 8000 fr. ne change pas ; la différence 240 fr. seule varie. Si le taux était 2, 3, 4... %, elle deviendrait 2, 3, 4... fois plus grande. Donc le taux cherché contient autant de fois 1 fr. qu'il y a de fois 240 dans 2000.

Le taux est .... $2000 : 240 = 8\frac{1}{3}$.

(Voir Alg., *Solutions raisonnées*. Problème 133.)

682. *Un marchand gagne 18 % sur son prix d'achat en vendant une pièce de toile à raison de $2^f,97$ le mètre. Il vend à ce prix un certain nombre de mètres de la pièce et réalise un bénéfice de $18^f,80$.*

Voulant alors quitter le commerce et écouler plus rapidement sa marchandise, il vend le reste de la pièce avec un rabais de $8\frac{2}{3}$ % sur le prix de vente. Le bénéfice ainsi réalisé dans la vente totale de la pièce étant de $98^f,20$, on demande : 1° le prix d'achat du mètre ; 2° le nombre de mètres vendus avant la diminution du prix de vente ; 3° à combien pour cent se trouve réduit le bénéfice, sur le prix d'achat ; 4° le nombre de mètres de la pièce.

Admission à l'École normale de Charleville. — 1877.

1° *Prix d'achat.* — Pour 1 fr. d'achat, le marchand gagne dans la vente $0^f,18$. Pour 1 fr. d'achat, il retire $1^f,18$.

Donc autant il y a de fois $1^f,18$ dans $2^f,97$, autant il y a de francs dans le prix d'achat du mètre.

Ce prix est................ $\frac{2,97}{1,18} = \frac{297}{118} = 2^f,5169$ c.-à-d. $2^f,517$.

2° *Nombre de mètres de la 1re vente.* — Le bénéfice par mètre est

$$2{,}97 - 2{,}5169 = 0^{f}{,}4531.$$

Le nombre de mètres vendus est égal au nombre de fois que le bénéfice de 1 mètre est contenu dans $18^{f}{,}80$.

Ce nombre de mètres est donc......... $18{,}80 : 0{,}4531 = 41^{m}{,}49$.

3° *Nombre de mètres vendus après le rabais.* — Le bénéfice fait dans cette 2e vente est .... $98^{f}{,}20 - 18^{f}{,}80 = 79^{f}{,}40$.

La réduction de $8\frac{2}{3}$ ou $\frac{26}{3}$ % sur le prix de vente revient à une réduction de $\frac{0{,}26}{3}$ par franc. Sur le prix de vente, elle est

$$\frac{0{,}26}{3} \times 2{,}97 = 0{,}26 \times 0{,}99 = 0^{f}{,}2574.$$

Le prix du mètre dans la 2e vente est donc

$$2{,}97 - 0{,}2574 = 2^{f}{,}7126.$$

Le bénéfice par mètre est

$$2{,}7126 - 2{,}5169 = 0^{f}{,}1957.$$

Le nombre de mètres vendus ainsi est

$$79{,}40 : 0{,}1957 = 405^{m}{,}72.$$

Le nombre total de mètres dans les deux ventes est

$$41{,}49 + 405{,}72 = 447^{m}{,}21.$$

4° *Réduction du bénéfice pour 100 sur le prix d'achat.* — Pour l'achat, le marchand a déboursé

$$\frac{2{,}97}{1{,}18} \times 447{,}21 = 2^{f}{,}5169 \times 447{,}21 = 1125^{f}{,}58.$$

Pour $1125^{f}{,}58$, le bénéfice a été $98^{f}{,}20$.

Pour 1 fr., il serait $\frac{98{,}20}{1125{,}58}$; pour 100 fr., $\frac{9820}{1125{,}58} = 8{,}72$.

Le bénéfice primitif est donc réduit à 8,72 pour 100.

683. *On a deux sortes de vin. Le 1er peut être cédé au prix de 127f,84 la pièce de 270 litres, payable dans 65 jours ; le 2e au prix de 168f,21 la même pièce, payable dans 83 jours.*

Combien faut-il prendre de chacune de ces deux qualités de vin pour former 127 hectolitres d'un mélange pouvant être cédé au prix de 56f,25 l'hectolitre, payable dans 3 mois?

Brevet supérieur. Aspirantes. — Poitiers, 1879.

1° On cherche d'abord le prix actuel des trois qualités de vin en opérant l'escompte *commercial*. Soit 5 % le taux.

A 5 %, l'escompte est, d'après la règle des *nombres :*

sur $127^{f}{,}84$ pour 65 jours,

$$\frac{127{,}84 \times 65}{7200} = \frac{83{,}096}{72} = 1^{f}{,}154;$$

sur $168^{f}{,}21$ pour 83 jours,

$$\frac{168{,}21 \times 83}{7200} = \frac{139{,}6143}{72} = 1^{f}{,}939;$$

sur $56^{f}{,}25$ pour 90 jours,

$$\frac{56{,}25 \times 90}{7200} = \frac{5{,}625}{8} = 0^{f}{,}703.$$

Après l'escompte, le prix est actuellement :

pour 270^{l} de la 1re qualité, $127^{f}{,}84 - 1^{f}{,}154 = 126^{f}{,}686$,

pour 1 hectol., $\frac{126{,}686 \times 100}{270} = 46^{f}{,}92$;

pour 270^{l} de la 2e qualité, $168^{f}{,}21 - 1^{f}{,}939 = 166^{f}{,}271$;

pour 1 hectol., $\frac{166{,}271 \times 100}{270} = 61^{f}{,}58$;

pour 1 hectol. du mélange, $56^{f}{,}25 - 0^{f}{,}70 = 55^{f}{,}55$.

2° Il s'agit maintenant de résoudre le problème suivant.

On a des vins de deux qualités coûtant la 1re 61f,58 l'hectolitre et la 2e 46f,92. Combien faut-il prendre de litres de chaque qualité pour faire un mélange de 127 hectolitres du prix de 55f,55?

En appliquant la règle ordinaire on trouve :

61,58		863 litres de la 1re qualité
	55,55	
46,92		603 litres de la 2e qualité
	Total...	1466 litres de mélange.

Pour 12 700 litres de mélange, on prendra :

de la 1re qualité, $\frac{863^{l}}{1466} \times 12\,700 = 7476^{l}{,}1$

de la 2e qualité, $\frac{603^{l}}{1466} \times 12\,700 = 5223^{l}{,}8$.

Réponse. — On mettra dans le mélange :
74 hectol. 76 litres de la 1^{re} qualité.
52 hectol. 24 litres de la 2^{e} qualité.

684. *L'année se compose de 365 jours $\frac{1}{4}$ et une lunaison est égale à 29 jours $\frac{499}{940}$. Trouver le plus petit espace de temps qui soit un nombre exact d'années et un nombre exact de lunaisons.*
Brevet supérieur. Aspirants. — Saint-Denis (Réunion), 1881.

En convertissant d'abord la durée de l'année et celle de la lunaison en 940^{es} de jour, on trouve :

pour l'année, $365\,\frac{1}{4} = \frac{1461}{4} = \frac{1461 \times 235}{4 \times 235} = \frac{343\,335^{j}}{940}$;
pour la lunaison, $29\,\frac{499}{940} = \frac{27\,260 + 499}{940} = \frac{27\,759^{j}}{940}$.

Cherchons le plus petit multiple des deux nombres de 940^{es} de jour. La décomposition en facteurs premiers donne :

$$343\,335 = 3 \times 5 \times 47 \times 487$$
$$27\,759 = 3 \times 19 \times 487$$
$$940 = 2^2 \times 5 \times 47.$$

Le plus petit multiple des durées de l'année et de la lunaison en 940^{es} de jour est :

$$3 \times 5 \times 19 \times 47 \times 487.$$

Le plus petit nombre de jours qui contiendra un nombre entier de fois la durée de l'année et un nombre entier de fois la lunaison est donc

$$\frac{3 \times 5 \times 19 \times 47 \times 487}{2^2 \times 5 \times 47} = \frac{3 \times 19 \times 487}{4}$$

ou

$$\frac{27\,759}{4} = 6937^{j},5.$$

Ce nombre de jours vaut :

en années, $\frac{6937,5}{365,25} = 19^{a}$;

en lunaisons, $6937,5 : \frac{27\,759}{940} = 235^{l}$.

Réponse. — Le temps demandé est 19 années.

§ III. — PROBLÈMES A RÉSOUDRE PAR L'ALGÈBRE

685. *Deux personnes mettent chacune de côté 3500 fr. par an. La fortune de la 1^{re} est actuellement de 315 000 fr. ; celle de la 2^{e} est de 63 000 fr. Dans combien de temps la fortune de la 1^{re} sera-t-elle quadruple de la fortune de la 2^{e} ?*
Admission à l'École normale de garçons de l'Yonne. — 1879.

1^{re} MÉTHODE. — La différence des deux fortunes est actuellement

$$315\,000 - 63\,000 = 252\,000 \text{ fr.}$$

Cette différence reste la même à la fin de chaque année.
Si on désigne par F la fortune de la 2^{e} personne à l'époque cherchée, celle de la 1^{re} sera 4 F et on aura

$$4F - F = 252\,000 \quad \text{ou} \quad 3F = 252\,000 \text{ fr.}$$

Ainsi, la différence des deux fortunes est alors le triple de la fortune de la 2^{e}.
La fortune de la 2^{e} est donc........... $252\,000^{f} : 3 = 84\,000$ fr.
Son accroissement a été.......... $84\,000^{f} - 63\,000^{f} = 21\,000$ fr.
Le nombre d'années est donc........... $21\,000 : 3500 = 6$ ans.
2^{e} MÉTHODE. — Soit x le nombre d'années cherché.
A l'époque demandée la fortune est :
pour la 1^{re} personne................ $315\,000 + 3500 \times x$;
pour la 2^{e}.......................... $63\,000 + 3500 \times x$.
On a d'après l'énoncé :

$$315\,000 + 3500 \times x = (63\,000 + 3500 \times x) \times 4.$$

En effectuant les opérations, on trouve successivement :

$$315\,000 + 3500\,x = 252\,000 \times 3500\,x \times 4 ;$$
$$315\,000 - 252\,000 = 3500\,x \times 3 ;$$
$$63\,000 = = 10\,500\,x.$$
$$x = \frac{63\,000}{10\,500} = 6.$$

686. *Deux lingères économisent l'une le tiers et l'autre le quart de leurs gains journaliers. Au bout de l'année, leurs économies s'élèvent à 400 francs. Combien chacune d'elles a-t-elle gagné dans l'année, si le gain total de l'année est de 1350 francs ?*
Brevet élémentaire. Aspirantes. — Besançon, 1878.

La 1[re] économise le tiers de son gain.

Si la 2[e] économisait aussi le tiers du sien, la somme de leurs économies serait 1350 : 3 = 450 fr.

Entre cette somme et l'économie réelle, la différence est 50 fr.

Ce nombre est précisément la différence qu'il y a entre le tiers et le quart du gain de la 2[e] lingère.

Or on a :

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}.$$

La 12[e] partie du gain de la 2[e] lingère est donc 50 fr.

La 2[e] gagne par an .... $50^f \times 12 = 600$ fr.

La 1[re] gagne .... $1350 - 600 = 750$ fr.

(Voir Alg., *Solutions raisonnées*. Problème 24.)

687. *Deux personnes employées dans le même établissement ont des salaires différents, dont la somme s'élève annuellement à 4400 fr. La 1[re] ne dépense chaque année que les deux tiers de son salaire, et la 2[e] les 3 quarts du sien. Le montant de leurs économies au bout de l'année est de 1310 francs.*

Trouver le salaire de chacune.

Brevet élémentaire. Aspirantes. — Ariège, 1877.

Soit x le salaire de la 1[re] ; celui de la 2[e] est $4400 - x$.

La 1[re] économise $\frac{x}{3}$; la 2[e] économise $\frac{4400 - x}{4}$.

Le problème donne l'équation

$$\frac{x}{3} + \frac{4400 - x}{4} = 1310$$

Réduisons tous les termes au dénominateur commun 12 et supprimons ce dénominateur, ce qui revient à multiplier par 12 les deux membres de l'équation ; nous aurons

$$4x + 13\,200 - 3x = 15\,720.$$

De là on tire

$$x = 15\,720 - 13\,200$$
$$x = 2520$$

Réponse. — Le salaire de la 1[re] est de 2520 fr.

La 2[e] reçoit $4400 - 2520 = 1880$ fr.

688. *On a acheté 210 litres, les uns de vin et les autres de rhum pour 288 francs. Trouver le prix du litre de vin et celui du litre de rhum, si on a acheté 6 fois plus de vin que de rhum et si on a payé 5 litres de rhum autant que 16 litres de vin.*

Brevet élémentaire. Aspirants. — Saint-Denis (Réunion), 1882.

1[re] MÉTHODE. — Avec 1 litre de rhum, on a pris 6 litres de vin, ce qui fait un total de 7 litres.

Le nombre de litres de rhum est donc la 7[e] partie du nombre total de litres achetés, c'est-à-dire .... $210 : 7 = 30$ litres.

Le nombre de litres de vin est..... $210 - 30 = 180$ litres.

Mais 5^l de rhum valent 16^l de vin.

1^l de rhum vaut $\frac{16}{5}$ ou $\frac{32}{10}$ du prix du litre de vin.

Supposons que le litre de vin coûte 10 décimes, c'est-à-dire 1 fr.

Le litre de rhum coûtera 32 décimes, c'est-à-dire $3^f,20$.

Or 180^l de vin à 1 fr. vaudraient .... 180^f

30^l de rhum à $3^f,20$ vaudraient..... $3^f,2 \times 30 = 96^f$

Total... 276^f.

Autant de fois il y a 276 dans 228, autant de fois le litre de vin vaut 1 fr.; autant de fois le litre de rhum $3^f,20$.

Ce nombre de fois est $\frac{288}{276} = \frac{72}{69} = \frac{24}{23}$.

Le prix du litre est donc :

pour le vin, $1^f \times \frac{24}{23} = 1^f,043$; pour le rhum, $3^f,2 \times \frac{24}{23} = 3^f,339$.

Réponse. — Prix du litre de vin $1^f,04$; du litre de rhum $3^f,34$.

2[e] MÉTHODE. — Soit x le nombre de litres de rhum ; celui des litres de vin sera $6x$. On aura :

$$x + 6x = 210 \quad \text{d'où } x = \frac{210}{7} = 30 \text{ litres de rhum.}$$

Le nombre des litres de vin est .... $30 \times 6 = 180$

Soit y le prix du litre de rhum et v celui du litre de vin. On a :

$$5y = 16v, \text{ d'où } v = \frac{5y}{16}.$$

On peut ensuite écrire l'équation

$$30y + 180 \times \frac{5y}{16} = 288.$$

En résolvant, on trouve

$$y = \frac{1152}{345} = 3,339.$$

689. *Le tiers de la valeur d'une pièce de soie est égal au 5e de la valeur d'une pièce de drap. La différence des prix des deux pièces est de 192 fr.; le mètre de drap vaut 8 fr., et la longueur de la pièce de drap est égale à 10 fois le tiers de la longueur de la pièce de soie. Trouver la valeur et la longueur de chaque pièce.*

Brevet élémentaire. Aspirantes. — Paris, 1880.

Désignons par D la valeur en francs de la pièce de drap.

Le tiers de la valeur de la pièce de soie sera $\frac{D}{5}$.

La valeur de la pièce de soie sera $\frac{D}{5} \times 3$ c'est-à-dire $\frac{3D}{5}$.

La différence entre les valeurs de ces deux pièces est

$$\frac{3D}{5} - \frac{D}{5}, \text{ c'est-à-dire } \frac{2D}{5}.$$

Cette différence étant égale à 192 fr., on a :

$$\frac{2D}{5} = 192 \text{ d'où } \frac{D}{5} = 96.$$

La valeur de la pièce de drap est donc.. $96 \times 5 = 480$ fr.
Celle de la pièce de soie est.......... $480 - 192 = 288$ fr.
La longueur de la pièce de drap est...... $480 : 8 = 60$ mètres.
La longueur de la pièce de soie est...... $6^m \times 3 = 18^m$.

(Voir Alg., *Solutions raisonnées*. Problème 79.)

690. *Un industriel emploie deux ouvriers, dont le 1er reçoit pour sa journée un salaire double de celui que reçoit le 2e. On donne au 1er pour 12 journées 40 francs et 10 litres de vin; au 2e pour 9 journées 16f,40 et 2 litres de vin. Quel est le prix du litre?*

Brevet élémentaire. Aspirants. — Ardennes, 1878.

On a donné :
au 1er pour 12 journées................ 40 fr. plus 10^l de vin;
au 2e pour 9 journées.................. 16f,40, plus 2^l de vin.
Pour 36 journées (plus petit multiple de 12 et 9), on aurait donné :
au 1er .... 120 fr., plus 30^l de vin;
au 2e................. 65f,60, plus 8^l de vin.
Or le salaire du 1er est le double de celui du 2e.
Ainsi 120 fr. plus 30^l valent 131f,20 plus 16^l.
30^l moins 16^l valent donc 131f,20 moins 120 fr.
Donc 14 litres de vin valent 11f,20.
Le litre de vin vaut........................... $11^f,20 : 14 = 0^f,80$.

(Voir Alg., *Solutions raisonnées*. Problème 19.)

691. *Un marchand a vendu à trois personnes une pièce de toile à 3f,50 le mètre. La 1re a pris le tiers de la pièce, plus 4 mètres; la 2e a pris la moitié du reste plus 6 mètres; la 3e a payé le coupon restant 164f,50.*

Quelle était la longueur de la pièce, et quel est le nombre de mètres acheté par chaque personne?

Concours d'admission à l'École normale de filles. — Troyes, 1879.

D'abord le nombre de mètres pris par la 3e personne est

$$164,5 : 3,5 = 47 \text{ mètres.}$$

Maintenant désignons par x le nombre de mètres de la pièce.

La 1re personne prend $\frac{x}{3} + 4$. Il reste $x - \frac{x}{3} - 4$, c.-à-d. $\frac{2x}{3} - 4$.

La part de la 2e est la moitié du reste plus 6 mètres, c'est-à-dire

$$\frac{x}{3} - 2 + 6 \quad \text{ou} \quad \frac{x}{3} + 4.$$

Ainsi la 2e a pris la même part que la 1re.

Ensemble elles ont $\frac{2x}{3} + 8^m$.

On a donc :

$$x = \frac{2x}{3} + 8 + 47 \text{ ou } \frac{x}{3} = 55.$$

On obtient : $x = 55 \times 3 = 165$ mètres.

Réponse. — Longueur de la pièce 165 mètres.

Part de la 1re personne 59^m; de la 2e, 59^m; de la 3e, 47^m.

(Voir Alg., *Solutions raisonnées*. Problème 33.)

692. *Un fermier, voulant acheter une maison avec le produit de sa récolte de blé, disait à son voisin : Si je vends mon blé 20 fr. le sac, il me restera 2000 fr. après le payement de la maison; mais si je ne le vends que 18 francs, il me manquera $\frac{1}{25}$ du prix qui m'est demandé. Trouver d'après cela le prix de la maison et le nombre de sacs de blé du fermier.*

Brevet élémentaire. Aspirants.

Soit x le nombre des sacs et y le prix de la maison.

Le problème donne les deux équations

$$20x - y = 2000$$

et $$18x = y - \frac{y}{25}, \text{ ou } 18x = \frac{24y}{25}.$$

De cette dernière, on tire

$$y = \frac{18x \times 25}{24} = \frac{3x \times 25}{4} = \frac{75x}{4}.$$

En remplaçant dans la 1re y par cette valeur, on a

$$20x - \frac{75x}{4} = 2000.$$

En multipliant tous les termes par 4, on obtient

$$80x - 75x = 8000.$$

De là on tire

$$5x = 8000 \text{ et } x = 1600.$$

Pour connaître y, on a

$$y = \frac{75 \times 1600}{4} = 75 \times 400 = 30\,000.$$

Réponse. — Nombre de sacs 1600 ; prix de la maison 30 000 fr.

693. *On engage une domestique en lui promettant* 300 *francs par an, plus un habillement complet. Au bout de* 9 *mois et* 12 *jours, elle est renvoyée en recevant* 211 *francs et en gardant l'habillement. Quelle est la valeur de cet habillement ?*

(*L'année sera comptée de* 360 *jours*).

Brevet élémentaire. Aspirantes. — Loiret, 1876.

Pour abréger, désignons par H la valeur de l'habillement.
On a d'abord : $9^m\ 12^j = 30^j \times 9 + 12^j = 282$ jours.

$$282^j = \frac{282}{360} = \frac{47}{60} \text{ de l'année.}$$

Au moment du départ, on devait à la domestique :
les $\frac{47}{60}$ de 300^f, c.-à-d. $300^f \times \frac{47}{60} = 235$ fr., plus les $\frac{47}{60}$ de H.
Or elle a reçu 211 fr. plus H.
Ainsi H plus 211 fr. égalent 235 fr. plus $\frac{47}{60}$ de H.

Par suite H moins $\frac{47}{60}$ de H vaut 24 fr. ; donc $\frac{13}{60}$ de H valent 24 fr.
$\frac{1}{60}$ de H vaut $\frac{24^f}{13}$; H vaut $\frac{24}{13} \times 60 = 110^f,769$.

Réponse. — L'habillement valait $110^f,77$.

(Voir ALG., *Solutions raisonnées.* Problème 14.)

694. *Un terrain est divisé en deux parties inégales dont la différence est de* 29 *ares* 65 *centiares* 3 *dixièmes. Les* $\frac{7}{9}$ *de la* 1re *égalent les* $\frac{10}{11}$ *de la* 2e. *On demande le prix du terrain tout entier et de chacune des parties, en sachant que l'hectare vaut* 9876 *fr.*

Brevet élémentaire. Aspirants. — Paris, 1880.

Si on représente par x la surface de la 1re partie en ares, celle de la 2e sera $x - 29,653$.
Les $\frac{7}{9}$ de x égalent les $\frac{10}{11}$ de $(x - 29,653)$; on écrira donc :

$$\frac{7x}{9} = (x - 29,653) \times \frac{10}{11}.$$

(Voir ALG., *Solutions raisonnées.* Problème 18.)

Réponse. — 1re partie $205^a,29$; prix $20\,274^{fr},44$.
2e partie $175^a,637$; prix $17\,345^{fr},91$.
Prix total, $37\,620^{fr},35$.

695. *Un train allant de Paris à Bordeaux emmène* 27 *voyageurs de* 1re *classe et* 56 *de* 2e *classe, qui ont payé en tout* $5405^f,45$. *S'il y avait eu au contraire* 56 *voyageurs de* 1re *classe et* 27 *de* 2e *classe, la recette eût été de* $5973^f,85$.
On demande le prix du billet de 1re *classe et celui du billet de* 2e *classe.*

Brevet élémentaire. Aspirantes. — Paris, nov. 1882.

Soit x le prix du billet de 1re classe et y celui de la 2e classe.
Dans le 1er voyage les voyageurs ont payé :
ceux de 1re classe $27\,x$; ceux de 2e classe $56\,y$.
On a donc l'équation :

$$27\,x + 56\,y = 5405,45.$$

Dans le 2e cas ils auraient payé :

ceux de 1re classe $56\,x$; ceux de 2e classe $27\,y$.

On a donc cette autre équation :

$$56\,x + 27\,y = 5973{,}85.$$

En multipliant tous les termes de la 1re par 56 et ceux de la 2e par 27 on obtient :

$$\begin{aligned}1512\,x + 3136\,y &= 302\,705{,}20,\\ 1512\,x + 729\,y &= 161\,293{,}95.\end{aligned}$$

En retranchant la 2e de la 1re membre à membre, on trouve

$$2407\,y = 141\,411{,}25$$

d'où
$$y = \frac{141\,411{,}25}{2407} = 58^{f},75.$$

En remplaçant y par 58,75 dans la 1re des deux équations du problème, on a :

$$27\,x + 58{,}75 \times 56 = 5405{,}45$$

ou

$$27\,x + 3290 = 5405{,}45.$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned}27\,x &= 5405{,}45 - 3290,\\ 27\,x &= 2115{,}45\\ x &= \frac{2115{,}45}{27} = 78{,}35.\end{aligned}$$

Réponse. — Le billet de 1re classe coûte 78 fr. 35 centimes ;
celui de 2e classe coûte 58 fr. 75 centimes.

696. *Trouver le traitement d'un instituteur, en sachant qu'il doit subir une retenue égale au 20e de ce traitement ; qu'il dépense par an les $\frac{4}{5}$ de son traitement diminué de la retenue, plus encore 200 francs ; qu'enfin, au bout de 6 ans, il est arrivé à économiser les $\frac{227}{550}$ de son traitement annuel.*

Brevet élémentaire. Aspirants. — Douai, 1879.

Pour simplifier, représentons par x le traitement demandé.

Après la retenue du 20e, la somme touchée est $\frac{19}{20}$ de x.

Les $\frac{4}{5}$ de cette somme étant dépensés, il lui reste $\frac{1}{5}$ de $\frac{19}{20}$ de x, c'est-à-dire $\frac{19}{100}$ de x.

L'instituteur économise ainsi à la fin de l'année $\frac{19}{100}$ de $x - 200^{f}$.

L'économie au bout de 1 an est $\frac{1}{6}$ de $\frac{227}{550}$ de x ou $\frac{227}{3300}$ de x.

Donc $\frac{19}{100}$ de x moins 200 fr. valent $\frac{227}{3300}$ de x.

Par suite, $\frac{19}{100}$ de x moins $\frac{227}{3300}$ de x valent 200 fr.

En effectuant la soustraction des deux fractions, on trouve :

$$\frac{19}{100} - \frac{227}{3300} = \frac{627}{3300} - \frac{227}{3300} = \frac{400}{3300} = \frac{4}{33}.$$

Ainsi $\frac{4}{33}$ de x valent 200 fr. ; $\frac{1}{33}$ de x vaudrait 50 fr.

Le traitement demandé égale donc $50^{f} \times 33 = 1650$ fr.

697. *Avec le même capital on pouvait le 7 mars 1878 acheter 1800 fr. de rente 3 % ou 2021f,73 de rentes 5 %. L'écart par franc de rente, c'est-à-dire la différence des sommes nécessaires pour acheter 1 franc de rente était 2f,72. Quels étaient les cours de ce jour et le capital ?*

Brevet supérieur. Aspirantes. — Rennes, 1878.

Soit x le cours du 5 %, c'est-à-dire le prix de 5 fr. de rente.

Le prix d'une rente de 1 franc en 5 % serait $\frac{x}{5}$.

Le prix d'une rente de 1 fr. en 3 % serait $\frac{x}{5} + 2^{f},72$.

Le prix de 2021f,73 de rentes 5 % était :

$$\frac{x}{5} \times 2021{,}73, \text{ c'est-à-dire } 404{,}346 \times x.$$

Le prix de 1800 fr. de rentes 3 % était :

$$\left(\frac{x}{5} + 2{,}72\right) \times 1800, \text{ c'est-à-dire } 360x + 4896.$$

Ces deux prix étant égaux, on peut écrire :

$$404{,}346 \times x = 360\,x + 4896.$$

En ôtant $360x$ aux deux membres, on obtient :

$$44,346 \times x = 4896 \quad \text{ou} \quad 44346x = 4896000.$$

De là on tire $\quad x = \frac{4896000}{44346} = 110,404.$

Le prix de 1 fr. de rente 5 °/₀ était

$$110,404 : 5 = 22^f,0809.$$

Le capital donné pour acheter $2021^f,73$ de rentes 5 °/₀ était

$$22,0809 \times 2021,73 = 44641^f,62.$$

Le prix de 1 fr. de rente 3 °/₀ était

$$22^f,0809 + 2^f,72 = 24^f,8009.$$

Le cours de la rente 3 °/₀ était

$$24,8009 \times 3 = 74^f,40.$$

Réponse. — Le capital était $44641^f,62$.
Les cours étaient : 110,40 pour le 5 °/₀ ; 74,40 pour le 3 °/₀.

698. *On a acheté 8 kilogr. de sucre, 7 kilogr. de chocolat et 2 kilogr. de thé pour $44^f,50$. On sait que 3 kilogr. de chocolat ont la même valeur que 5 kilogr. de sucre et que 2 kilogr. de thé valent autant que 6 kilogr. de chocolat. Combien vaut le kilogramme de chacune de ces substances ?*

Brevet élémentaire. Aspirants. — Douai, 1873.

De la relation : 3^{kg} Ch. = 5^{kg} S et 6^{kg} Ch. = 2^{kg} Thé,
on tire : 3^{kg} Ch. = 5^{kg} S = 1^{kg} Thé.
Supposons que le kilogr. de thé coûte.................... 15 fr.
Le kilogr. de chocolat en coûte le tiers, c'est-à-dire........ 5 fr.
Le kilogr. de sucre coûte le 5^e de 15 fr., c'est-à-dire........ 3 fr.
Dans ce cas, on aurait payé :
pour 2 kgr. de thé.................. $15^f \times 2 = 30$ fr.
pour 7 kgr. de chocolat.............. $5^f \times 7 = 35$ fr.
pour 8 kgr. de sucre................ $3^f \times 8 = 24$ fr.
Total... 89 fr.

Or, la somme déboursée $44^f,50$ est précisément la moitié de 89 fr. ; donc les prix demandés sont la moitié des prix supposés.
Les prix du kilogramme sont donc :

thé, $7^f,50$; chocolat, $2^f,50$; sucre, $1^f,50$.

(Voir Alg., *Solutions raisonnées.* Problème 90.)

699. *Une personne achète : une 1^{re} fois 15 kilogr. de café et 12 kilogr. de sucre pour 69 francs ; une 2^e fois 17 kilogr. de café et 14 kilogr. de sucre pour 79 francs. Quels sont les prix du kilogramme de sucre et du kilogramme de café ?*

Brevet élémentaire. Aspirantes. — Paris, 1880.

Le plus petit multiple des deux poids de sucre (12 et 14) est 84.
On a, en effet :.................. $84 = 12 \times 7$ et $84 = 14 \times 6$.
Si donc on avait acheté 7 fois plus de marchandises la 1^{re} fois et 6 fois plus la 2^e fois, on aurait acheté :
une 1^{re} fois, 105^{kg} de café et 84^{kg} de sucre pour 483 fr. ;
une 2^e fois, 102^{kg} de café et 84^{kg} de sucre pour 474 fr.
Le poids de sucre étant le même dans les deux achats, la différence des sommes payées provient de la différence des poids de café achetés.
Ainsi 3^{kg} de café coûtent $483^f - 474^f = 9$ fr.
1^{kg} de café coûte le tiers, c'est-à-dire 3 fr.
Les 15 kgr. de café du 1^{er} achat ont coûté..... $3^f \times 15 = 45$ fr.
Les 12 kgr. de sucre ont donc coûté......... $96^f - 45^f = 24$ fr.
Le prix du kilogr. de sucre est.................. $24^f : 2 = 2$ fr.

(Voir Alg. *Solutions raisonnées.* Poblème 83.)

700. *On a payé $48^f,80$ pour 8 kilogr. de sucre et 3 kilogr. de thé. Si l'on avait pris 5 kilogr. de sucre et 7 kilogr. de thé, on aurait dû une somme de 92 francs. Quel est le prix du kilogramme de sucre et le prix du kilogramme de thé ?*

Certificat d'études primaires. — Seine-et-Oise, 1881.

1° Méthode ordinaire. — 1^{er} achat : 3^{kg} sucre et 3^{kg} thé pour $48^f,80$;
2^e achat : 5^{kg} sucre et 7^{kg} thé pour 92 fr.
Supposons qu'on ait acheté 5 fois plus de marchandises dans le 1^{er} achat et 8 fois plus dans le 2^e, on aurait :
1^{er} achat : 40^{kg} sucre et 15^{kg} thé pour 244 fr. ;
2^e achat : 40^{kg} sucre et 56^{kg} thé pour 736 fr.
Différence des marchandises, 41^{kg} thé ; différence de prix, 492 fr.
Prix du kilogr. de thé...................... $492^f : 41 = 12$ fr.
Dans le 1^{er} achat, on a donné pour 3^{kg} de thé 36 fr.
Les 8^{kg} de sucre ont donc coûté .... $48^f,80 - 36^f = 12^f,80$.
Le prix du kilogr. de sucre est.............. $12^f,80 : 8 = 1^f,60$.
2° Méthode algébrique. — Soit x le prix du kilogr. de sucre et y celui du kilogr. de thé.
On a les équations :

$$8x + 3y = 48,8$$
$$5x + 7y = 92.$$

En multipliant la 1re équation par 5 et la 2e par 8, on obtient

$$40x + 15y = 244$$
$$40x + 56y = 736.$$

Retranchant la 1re de la 2e, membre à membre, on trouve

$$41y = 492$$

d'où $$y = \frac{492}{41} = 12.$$

OBSERVATION. — Il est bon de remarquer que la 2e méthode ne diffère de la 1re qu'en ce que le raisonnement y est exprimé par la notation abrégée de l'algèbre.

701. *On a dépensé 80 379 francs pour acheter des vignes et des terres. L'hectare de vignes a coûté 819 francs et l'hectare de terres 528 francs. Si l'on avait payé 528 fr. l'hectare de vignes et 819 fr. l'hectare de terres, on aurait dépensé 9894 francs de moins. Quelle est l'étendue des vignes et celle des terres ?*

Brevet élémentaire. Aspirants. — Saint-Denis (Réunion), 1881.

1re MÉTHODE. — Dans le 2e cas, on payerait 9894 francs de moins, il y a donc moins d'hectares de terres que d'hectares de vignes.

La différence entre les prix de l'hectare de chaque terrain est

$$819^f - 528^f = 291 \text{ fr.}$$

Autant de fois cette différence sera contenue dans 9894 fr., autant il y aura d'hectares de terres *en moins* ou d'hectares de vignes *en plus*.

On trouve $9894 : 291 = 34$.

Il y a donc 34 hectares de vignes en plus du nombre d'hectares de terres.

Le prix payé pour 34 hectares de vignes a été

$$819^f \times 34 = 27\,846 \text{ fr.}$$

Si on retranche cette somme du prix total d'achat, le reste sera le prix d'un égal nombre d'hectares de vignes et de terres.

Ce reste est........................ $80\,379 = 27\,846 = 52\,533$ fr.

Or le prix total d'un hectare de vignes et d'un hectare de terres est

$$819 + 528 = 1347 \text{ fr.}$$

Autant de fois il y a 1347 dans 52 533, autant il y a d'hectares de terres dans l'achat.

On trouve........................ $52\,533 : 1347 = 39^{ha}$ de terres.

En hectares de vignes, il y a.................. $39 + 34 = 73^{ha}$.

2e MÉTHODE ALGÉBRIQUE. — Représentons par x le nombre d'hectares de vignes et par y celui des terres.

On a payé : pour les vignes, $819x$; pour les terres, $528y$.

On a donc l'équation

$$819x + 528y = 30\,379.$$

Dans le 2e cas, on aurait payé :

pour les vignes $528x$; pour les terres $819y$.

En outre le prix d'achat aurait été

$$80\,379 - 9894 = 70\,485 \text{ fr.}$$

On a donc cette autre équation

$$528x - 819y = 70\,485.$$

Les termes étant divisibles par 3 dans chaque équation, on obtient, en faisant cette division, les équations :

$$273x + 176y = 26\,793 \qquad [1]$$
$$176x + 273y = 23\,495. \qquad [2]$$

Pour les résoudre, multiplions tous les termes de l'équation [1] par 176 et tous les termes de l'équation [2] par 273 ; ces équations sont remplacées par les deux suivantes :

$$48\,048x + 30\,976y = 4\,715\,568$$
$$48\,048x + 74\,529y = 6\,414\,135.$$

En retranchant la 1re de la 2e, membre à membre, on obtient

$$43\,553y = 1\,698\,567.$$

d'où $$y = \frac{1\,698\,567}{43\,553} = 39.$$

Pour avoir la valeur de x, on remplace y par 39 dans l'équation [1], ce qui donne

$$273x + 6864 = 26\,793.$$

De là on tire

$$x = \frac{19\,929}{273} = 73.$$

702. *Pour remplir un tonneau de 450 litres, un marchand emploie une certaine quantité d'eau et trois espèces de vins qui coûtent respectivement 40 francs, 44 francs et 55 francs l'hectolitre. Pour 1 litre de vin de 40 fr. il met 3 litres de vin de 44 fr. et il ajoute 1 litre d'eau pour 24 litres de vin. En vendant le mé-*

lange à raison de 60 centimes le litre, il gagne 54 francs. Combien a-t-il employé de litres de chaque espèce de liquides?

Brevet supérieur. Aspirantes. — Melun, 1879.

La vente des 450 litres rapporte

$$0^f,60 \times 450 = 270 \text{ fr.}$$

Le prix d'achat était .... $270^f - 54^f = 216$ fr.

Représentons par x le nombre de litres de la 3e qualité que le marchand met avec 1 litre de la 1re et 3 litres de la 2e.

Ce premier mélange contient un nombre de litres égal à $4 + x$.

On y ajoute un nombre de litres d'eau égal à la 24e partie de $4 + x$; le volume du mélange de vin et d'eau est donc

$$4 + x + \frac{4+x}{24}, \text{ c'est-à-dire } \frac{100+25x}{24}.$$

Le litre de la 1re qualité coûte 40 centimes.

Les 3 litres de la 2e coûtent $44^c \times 3 = 132^c$.

Les x litres de la 3e coûtent $55\,x$.

Le prix de ce mélange de vin et d'eau est donc en centimes

$$40 + 132 + 55x \text{ ou } 172 + 55x.$$

Le prix du litre sera

$$(172 + 55x) : \frac{100+25x}{24}, \text{ c'est-à-dire } \frac{(172+55x)\times 24}{100+25x}.$$

Le prix de 450 litres sera 450 fois ce prix de 1 litre.

On peut par conséquent écrire

$$\frac{(172+55x)\times 24 \times 450}{100+25x} = 21\,600.$$

En multipliant les deux membres par le dénominateur du 1er membre, on a :

$$(172 + 55x) \times 24 \times 450 = 21\,600 \times (100 + 25x).$$

Or 216 est égal à 24×9 et 45 est égal à 5×9.

On a donc successivement :

$$(172 + 55x) \times 24 \times 50 \times 9 = 24 \times 9 \times 100 \times (100 + 25x),$$

$$172 + 55x = 2 \times (100 + 25x),$$
$$172 + 55x = 200 + 50x,$$
$$5x = 28$$
$$x = \frac{28}{5} = 5{,}6.$$

Ainsi, pour 1 litre de la 1re qualité et 3 litres de la 2e, le marchand emploie $5^l,6$ de la 3e, ce qui fait un total de $9^l,6$.

Il y ajoute un volume d'eau égal à la 24e partie de ce total, c'est-à-dire $0^l,4$. Le mélange est ainsi de 10 litres.

Il met donc :

de la 1re qualité	....	45 litres
de la 2e	.... $3 \times 45 =$	135 litres
de la 3e	.... $5{,}6 \times 45 =$	252 litres
eau	....	18 litres
	Total...	450 litres.

703. *Un négociant a acheté pour 52 560 francs de vins de qualités différentes : 159 hectol. de la 1re qualité, 186 de la 2e et 428 de la 3e. Le prix de l'hectolitre de le 2e qualité n'a été que les $\frac{5}{6}$ du prix de l'hectolitre de la 1re, et l'hectolitre de la 3e n'a coûté que les $\frac{3}{4}$ du prix de l'hectolitre de la 2e.*

Le négociant a dû vendre le vin de la 2e qualité avec 6 % de perte ; mais il a gagné 18 % sur le vin de la 3e qualité. On demande le prix qu'il doit vendre l'hectolitre de la 1re qualité pour que cette affaire lui rapporte 11 % de bénéfice.

Brevet supérieur. Aspirantes. — Poitiers, 1877.

Représentons par x le prix de l'hectolitre de la 1re qualité.

L'hectol. de la 2e coûte $\frac{5x}{6}$; celui de la 3e $\frac{5x}{6} \times \frac{3}{4}$, c.-à-d. $\frac{5x}{8}$.

Le marchand a payé :

pour la 1re qualité............... $159x$;

pour la 2e qualité, $\frac{5x}{6} \times 186 = 155x$.

pour la 3e......... $\frac{5x}{8} \times 428 = 267{,}5x$.

La somme déboursée pour ces trois achats est 52560 fr.

On a donc l'équation

$$159x + 155x + 267{,}5x = 52\,560.$$

En additionnant les trois termes en x, on trouve

$$581{,}5x = 52\,560,$$

$$\text{d'où} \quad x = \frac{52\,560}{581{,}5} = 90^f,3869.$$

Le prix de l'hectol. de la 2e qualité est $90^f,386 \times \frac{5}{6} = 75^f,32$.

Celui de l'hectol. de la 3e qualité est $90^f,386 \times \frac{5}{8} = 56^f,49$.

Le négociant a perdu dans la vente de la 2e qualité $0^f,06$ par franc ;
sur 1 hectolitre.................................. $0^f,06 \times 75,32$;
sur 186 hectolitres........... $0^f,06 \times 75,32 \times 186 = 840^f,59$.
Il a gagné dans la vente de la 3e qualité $0^f,18$ par franc ;
sur 1 hectolitre................................ $0^f,18 \times 56,49$;
sur 428 hectolitres.......... $0^f,18 \times 59,46 \times 428 = 4352^f,07$.
Sur ces deux ventes, il gagne

$$4352^f,07 - 840^f,59 = 3511^f,48.$$

Or le bénéfice total à réaliser doit être

$$0^f,11 \times 52\,560 = 5781^f,60.$$

Il reste à gagner

$$5781^f,60 - 3511^f,48 = 2270^f,12.$$

Pour les 159^{hl} de la 1re qualité, il a payé :
$90^f,3869 \times 159 = 14371^f,51$
Ajoutons le gain à faire.................... $2270^f,12$
La somme à retirer des 159 hectol. sera.... $16641^f,63$.
Le prix de vente de l'hectol. de la 1re qualité sera

$$16641^f,63 : 159 = 104^f,66.$$

CHAPITRE XIII

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

On a déjà énoncé la règle à suivre pour calculer la surface d'un rectangle (chapitre III) et le volume d'un corps à six faces rectangulaires (chapitre IV) ; il convient d'y ajouter les règles qui se trouvent appliquées dans les problèmes suivants (1).

1° La surface d'un triangle est égale au demi-produit de sa base multipliée par sa hauteur.

2° La surface d'un losange est égale au demi-produit des deux diagonales.

3° La surface d'un trapèze est égale au produit de la demi-somme de ses bases multipliée par sa hauteur.

4° La longueur de la circonférence est égale au produit du diamètre par le nombre $\pi = 3,14$ ou $\pi = 3,1416$.

5° La surface d'un cercle est égale au demi-produit de la circonférence par le rayon.

Elle est aussi égale au carré du rayon multiplié par le nombre π.

6° La surface latérale d'un cylindre est égale au produit de la circonférence de sa base multipliée par sa hauteur.

7° Le volume d'un cylindre est égal au produit de la surface de sa base multipliée par sa hauteur.

8° Le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.

9° La surface latérale d'un cône est égale au demi-produit de la circonférence de sa base par la distance du sommet à cette circonférence,

(1) Voir la démonstration très élémentaire de ces théorèmes dans notre *Géométrie élémentaire pour l'enseignement primaire*. 1 vol. in-12 cart. Prix : 1 fr. 60 c.