

La densidad de la superficie, la densidad media y la del centro deberán estar, poco más ó menos, en la relación de los números 1, 2 y 4, en progresión geométrica, y las capas de densidad igual á la densidad media de la Tierra deberán hallarse á la cuarta parte del radio próximamente á partir de la superficie y á las tres cuartas partes de la distancia de ésta al centro (1).

### CAPÍTULO III

#### MOVIMIENTO DE LOS PROYECTILES

##### I

#### MOVIMIENTO DE LOS PROYECTILES SOMETIDOS Á LA ACCIÓN DE LA GRAVEDAD

¿Cuál es la acción de la gravedad en los cuerpos puestos en movimiento?

Cuando se dispara un proyectil al aire, mediante un impulso que se puede considerar como instantáneo, afectan el movimiento de aquél varias influencias ó fuerzas, cuyos efectos hay que conocer separadamente para resolver la cuestión tal como la hemos planteado: existe la *fuerza de impulso*, que por sí sola daría al cuerpo un movimiento rectilíneo, uniforme, indefinido, es decir, una velocidad constante; luego la *gravedad*, cuyas leyes hemos estudiado, cuando el móvil se halla en el vacío; y además la *resistencia del aire*, que se combina con la gravedad para modificar la velocidad inicial. Pero no es esto todo: la Tierra, en cuya superficie ocurre el fenómeno, no está en reposo; tiene dos movimientos, el de *traslación en el espacio* y el de *rotación uniforme* sobre su eje; estos movimientos engendran fuerzas aparentes, la de arrastre y la centrífuga, que influirán en la marcha del móvil, y cuyo efecto hay que calcular también, si se quiere resolver completamente la cuestión.

Este es en realidad un problema de mecánica, del cual no deberíamos ocuparnos aquí, si su solución no nos hiciera comprender por una serie de consecuencias cómo ejerce su acción más allá de nuestro globo la gravedad, esa fuerza cuyos efectos nos

(1) Plana estima tan sólo en 1,83 la densidad de las capas superiores con relación á la del agua. Sin duda tiene en cuenta la masa de las aguas del Océano que disminuye considerablemente la densidad de la costra terrestre, si no se atribuye á esta costra más que un espesor igual al de las profundidades exploradas. En cuanto á la densidad del centro de la Tierra, Plana la hace llegar á 16,27, es decir, á una cantidad de 8 á 9 veces mayor que la densidad superficial.

Cuando se habla de la densidad media de la Tierra, se sobreentiende que no se trata sino de la parte sólida y líquida del globo, y que se hace abstracción de la envoltura aérea de la atmósfera. Parécenos sin embargo que se podría tener legítimamente en cuenta el volumen y la masa de esta cubierta gaseosa, en cuyo caso la densidad media del globo terráqueo quedaría bastante reducida. He aquí el resultado probable que en tal caso se obtendría:

Podemos considerar la altura de la atmósfera igual á la 25.<sup>a</sup> parte del radio terrestre; ó sea de unos 250 kilómetros. El peso viene á ser igual á la 1.000.000.<sup>a</sup> parte del de la parte sólida. En tales condiciones, siendo el volumen total igual al volumen sólido más  $\frac{1}{8}$  (1,125), la densidad media sería á la densidad cuyo valor acabamos de indicar como 1.000,001 es á 1.125,000. El cálculo da entonces para la densidad media así definida el número 4,94.

Así pues, la agregación de la atmósfera reduciría la densidad 5,56 de la Tierra en la 9.<sup>a</sup> parte de su valor próximamente.

son tan conocidos y familiares, y cómo no es más que un caso particular de la fuerza que causa todos los movimientos de los cuerpos celestes.

Volvamos á nuestro móvil. Supongamos ante todo que se le ha disparado en el vacío y en una dirección rigurosamente vertical, ya sea de abajo arriba, ó viceversa.

Si se le dispara de abajo arriba, su velocidad inicial resultará disminuída á cada instante por la que la gravedad le imprime en sentido contrario, y claro está que esta velocidad inicial quedará anulada tan luego como el tiempo de la ascensión sea tal, que haya igualdad entre dicha velocidad y la adquirida por efecto de la gravedad. Un cálculo muy sencillo (1) demuestra que el tiempo de la ascensión debe ser igual á la velocidad inicial dividida por la intensidad de la gravedad en el punto en que se verifica el experimento. Al llegar el cuerpo al término de su trayectoria vertical, caerá únicamente por la acción de la gravedad, siendo fácil demostrar que el tiempo que invertirá en recorrer en sentido inverso el mismo camino, será exactamente igual á la duración de la ascensión.

Por lo demás, este es un caso imaginario, puesto que el movimiento de los proyectiles siempre tiene efecto en el aire. El fluido en que se mueven opone en realidad una resistencia que no es fácil calcular con todo rigor, dado que no se conoce la ley exacta de las variaciones de esta resistencia con la velocidad (2). La influencia de la resistencia indicada causará sin duda cierta disminución en la velocidad de ascensión así como en la de la caída, y también en la altura vertical á que llegará el cuerpo.

Pero no es esto todo. Hemos visto ya que, á causa de la rotación de la Tierra y de la fuerza centrífuga que de ella resulta, la caída de los graves por efecto de la gravedad no se efectúa en rigor siguiendo la vertical, sino que todo cuerpo que cae se desvía un tanto al Este. Fácilmente se comprende que cuando el cuerpo se eleva sucede lo contrario, esto es, se desvía al Oeste; al llegar al punto culminante se halla al Oeste de la vertical, es decir, en la vertical de un punto que está al Occidente del de partida; pero al caer no habrá lugar á que se desvíe con relación á esta nueva vertical. En resumen, se desviará al Oeste. En todo este raciocinio se hace abstracción de la resistencia del aire, que dista mucho de ser despreciable; y si se tratase de hacer un experimento positivo, claro está que no se podría comprobar rigurosamente el resultado que indica la teoría. Así lo consigna en las líneas siguientes M. J. Bertrand, uno de nuestros ilustres geómetras contemporáneos:

“Según parece, Varignón indicó por primera vez, en 1707, la contradicción geométrica de las leyes de Galileo sobre la caída de los cuerpos con la hipótesis de la rotación de la Tierra y la de una gravedad constante. Limitase á demostrar que la reunión de estas tres hipótesis implica contradicción, sin atreverse á decidir la que debe modificarse

(1) La fórmula es tan sencilla que la transcribiremos aquí. Llamando  $a$  á la velocidad inicial,  $t$  al tiempo en segundos,  $v$  á la velocidad de ascensión, y  $h$  á la altura de ascensión, tendremos

$$v = a - gt, \quad h = at - \frac{gt^2}{2}$$

Para  $v = 0$ ,  $t = a/g$ . Supongamos que el móvil tiene en París una velocidad de impulso de 9,81 metros: subirá durante un segundo y llegará tan sólo á 4<sup>m</sup>,90 de altura. Con una velocidad décuple, de 98<sup>m</sup>,10, la ascensión durará 10 segundos y el cuerpo se elevará 490 metros. Todos estos números suponen que la ascensión se verifica en el vacío.

(2) Según las hipótesis que se han comprobado prácticamente, la resistencia que opone el aire al movimiento de los proyectiles depende á la vez del peso del móvil, de la superficie de su sección transversal y de su velocidad; crece un poco más de prisa que el cuadrado de la velocidad; el exceso procederá en parte del aumento de densidad del aire empujado por el proyectil.

y sin indicar siquiera sus conjeturas; pero es de creer que, si se hubiera decidido, no habría tenido buena elección: en su obra sobre la causa de la gravedad se presenta poco dispuesto á tratar de semejantes cuestiones. Vese en la portada una viñeta muy elegante representando dos personajes, un militar y un religioso, junto á un cañón apuntado al zenit; miran al aire como siguiendo con la vista la bala que se acaba de disparar. En el grabado se leen estas palabras: "¿Volverá á caer?," El religioso es el célebre P. Mersenne, y su compañero M. Petit, intendente de fortificaciones. Muchas veces repitieron este peligroso experimento, y como no fueron bastante diestros para hacer que la bala les cayera en la cabeza, creyeron poder deducir que se habría quedado en el aire, donde sin duda permanecería mucho tiempo., Varignon no contradice el hecho, pero se manifiesta asombrado de él: "Una bala suspendida sobre nuestras cabezas, dice, es á la verdad cosa sorprendente., Los dos experimentadores, si es permitido llamarlos así, dieron cuenta á Descartes de sus pruebas y del resultado obtenido. Descartes no vió en aquel caso tenido por exacto más que una confirmación de sus sutiles lucubraciones sobre la gravedad.

"Más de un siglo después, d'Alembert, que analizó perfectamente el fenómeno, calculó la desviación de la bala, haciendo abstracción de la resistencia del aire. Un proyectil, disparado verticalmente de abajo arriba, con una velocidad de 1,800 pies por segundo, debe desviarse al Este y caer á 600 pies de su punto de partida; en concepto de aquel sabio, si Mersenne y Petit no pudieron averiguar el paradero de los que dispararon fué por haberlos buscado demasiado cerca. Pero esta explicación no es admisible; la resistencia del aire, desdeñada por d'Alembert, ejerce grandísima influencia. Según los cálculos de Poisson, una bala de fusil, disparada con una velocidad de 400 metros por segundo, y que caería en el vacío á 50 metros de su punto de partida, no se desviaría en el aire más que unos cuantos centímetros. Por consiguiente, el experimento de Mersenne tan sólo prueba la dificultad de disparar una bala de cañón en una dirección rigurosamente vertical; la de un fusil sería más fácil de dirigir; pero el error de la puntería, unido á la influencia de las corrientes de aire, produciría sin duda desviaciones mucho mayores que las que se necesita medir.

"Según Poisson, las desviaciones son siempre muy pequeñas, y para comprobarlas sería preciso hacer prolijas pruebas, casi siempre irrealizables.

"En la hipótesis, irrealizable por supuesto, de que el aire no se opusiera al movimiento, de que la atmósfera no existiera, la distancia á que se alejaría de la Tierra un móvil disparado verticalmente, iría creciendo indefinidamente á medida que creciera la velocidad inicial. Más aún: al pasar de cierto límite, el cuerpo se alejaría para no volver ya: esto es lo que sucedería si la velocidad inicial de impulso excediera de unos 11 kilómetros por segundo. Este caso singular no tiene aplicación en nuestro globo, porque existe la resistencia del aire y su acción crece rápidamente con la velocidad misma. Pero si es cierto que la Luna está absolutamente privada de atmósfera, ó que tiene una de extraordinaria tenuidad, como las observaciones permiten creerlo, un proyectil disparado en su superficie con la rapidez conveniente podría abandonar á nuestro satélite; y si además su dirección fuese tal que lo atrajese la gravedad terrestre, podría venir á caer en la superficie de la Tierra ó al menos á dar vueltas alrededor de nuestro globo como un nuevo satélite.

"Esta cuestión se ha debatido con motivo de los meteoritos, de los bólidos que de vez en cuando caen en la Tierra. Se ha pensado que estas caídas de minerales podían proceder de la expulsión de las materias lanzadas por las erupciones de los volcanes de la

Luna. Laplace, Biot y Poisson han calculado la velocidad con que los volcanes lunares debían despedir semejantes masas para que pudieran llegar á la esfera de atracción de nuestro satélite, traspasarla, y obedeciendo á la influencia de la gravedad terrestre, caer en nuestro planeta. Esta velocidad no tendría nada de extraordinaria, sobre todo dada la escasa intensidad de la gravedad en la superficie de la Luna, así como la carencia de toda atmósfera resistente; no pasaría de 2,500 metros por segundo. Pero la objeción decisiva, al menos para la mayor parte, cuando no para la totalidad de los meteoritos observados, es siempre la enorme velocidad con que han penetrado en nuestra atmósfera., (*El Cielo.*)

## II

## MOVIMIENTO DE LOS PROYECTILES DISPARADOS EN DIRECCIÓN DISTINTA DE LA VERTICAL

Acabamos de considerar el movimiento de un proyectil disparado en sentido vertical. Veamos ahora cómo obra la gravedad para modificar este movimiento cuando el impulso inicial tiene distinta dirección.

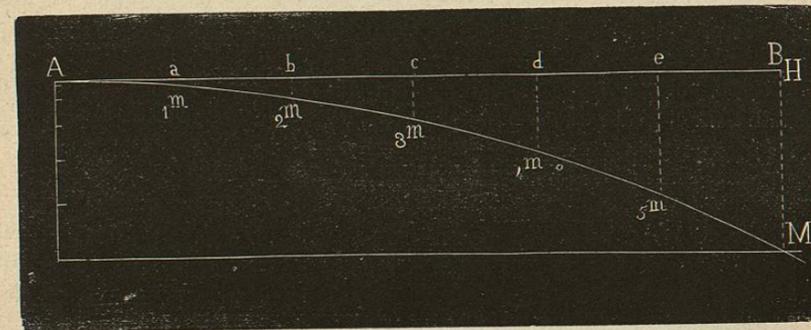


Fig. 115.—Movimiento parabólico de un proyectil lanzado en dirección horizontal

Supongamos ante todo que se dispara el proyectil en una dirección rigurosamente horizontal A H (fig. 115), y que no tiene que vencer la resistencia del aire. Fácilmente se ve que su trayectoria A M será el arco de una parábola cuyo vértice está en el punto de partida y su concavidad dirigida hacia el suelo. En virtud de la inercia, el móvil describiría, en los segundos sucesivos, líneas rectas iguales, Aa, ab, bc, etc., si no interviniese la gravedad. Por otra parte, caería bajo la acción de esta fuerza en sentido de la vertical y recorriendo espacios proporcionales á los cuadrados de los tiempos. La composición de estos dos movimientos dará lugar á una trayectoria Am<sub>1</sub>, m<sub>2</sub>, m<sub>3</sub>.... M, que, según lo demuestra el análisis, es una parábola.

Refiriéndose al experimento hecho con la máquina Morin, es fácil conocer que los dos casos son enteramente semejantes. En dicha máquina, el cilindro se mueve con movimiento uniforme en sentido horizontal; pero claro está que se podría suponer inmóvil al cilindro y sustituir á su movimiento otro movimiento igual y opuesto, en sentido horizontal, del cuerpo que cae.

La trayectoria descrita será la misma en ambos casos, si la velocidad de impulso del proyectil es la misma que la velocidad uniforme de un punto del cilindro.

Compruébase prácticamente de otro modo la forma parabólica de la trayectoria de un móvil lanzado horizontalmente con velocidades diferentes.

Por los diversos puntos de una ranura curva A B (fig. 116) se dejan caer bolitas, que

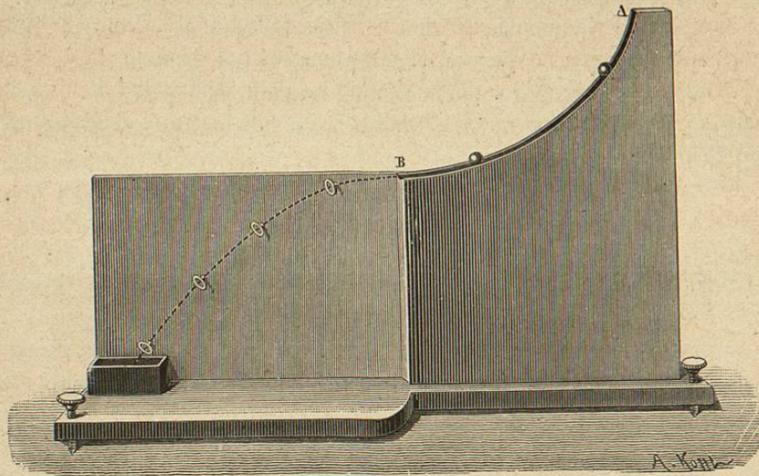


Fig. 116. — Comprobación práctica del movimiento parabólico de los proyectiles

llegan al punto más bajo con velocidades horizontales tanto mayores cuanto más alto está en la ranura el punto de partida. En un cuadro vertical situado en el plano de la

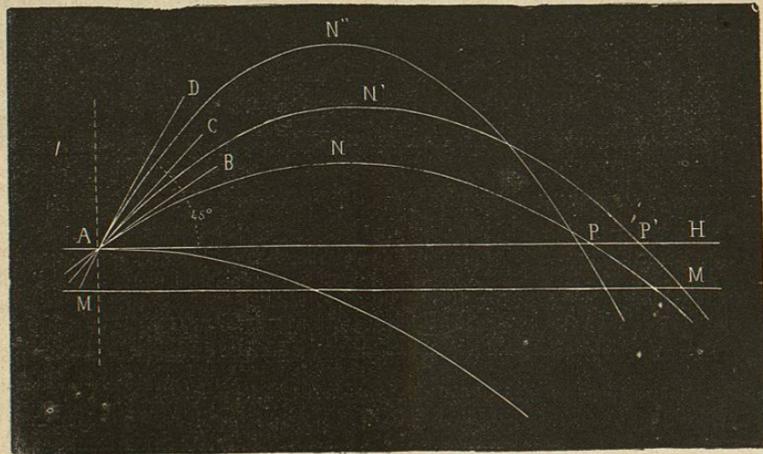


Fig. 117. — Movimiento parabólico de los proyectiles: amplitud del tiro, variable con la dirección del impulso inicial

trayectoria hay trazados varios arcos de parábola, en el cual se han fijado algunas anillas: al pasar las bolitas sucesivamente por el hueco de las anillas que pertenecen á una misma parábola, indican toscamente, por esto mismo, que su trayectoria tiene una forma parabólica.

Cuando se dispara el proyectil en dirección oblicua al horizonte, como AB, AC, AD..... (fig. 117), las trayectorias que describe, abstracción hecha de la velocidad del

aire, son también parábolas cuya forma y dimensiones dependen á la vez de la velocidad inicial y de la inclinación de la dirección del tiro. Empieza por elevarse hasta un punto culminante en que la dirección de su movimiento resulta horizontal, y luego baja describiendo una curva simétrica á la descrita en su movimiento ascendente. Dicho punto culminante N, N', N'' es el vértice de la parábola trazada por el proyectil en su marcha.

Demuéstrase en mecánica que para una misma velocidad inicial las distancias AP, AP', AP'' en que el proyectil corta la horizontal del punto de partida (á lo que se da el nombre de *amplitud del tiro*) varían con la inclinación, y que esta amplitud llega á su máximo cuando el ángulo formado por la línea de tiro con el horizonte es de  $45^\circ$  (1); tal es en el grabado la distancia AP', formando la dirección AC con el horizonte un ángulo igual á medio ángulo recto. La amplitud del tiro va aumentando al principio,

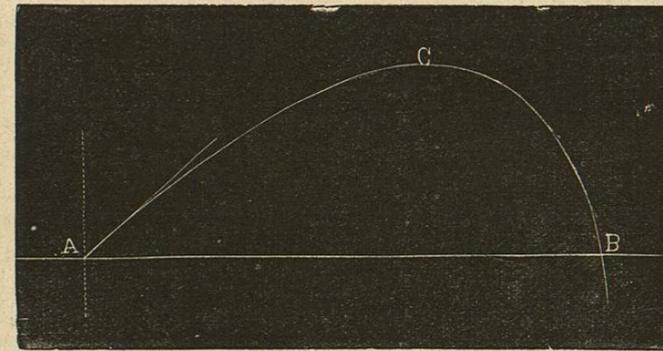


Fig. 118. — Curva descrita por un proyectil cuando se tiene en cuenta la resistencia del aire

cuando la inclinación aumenta á partir de  $0^\circ$ , y esto hasta  $45^\circ$ ; desde aquí disminuye hasta ser nula para una dirección vertical.

En todo esto se prescinde, como hemos dicho, de la resistencia del aire; pero si se tiene en cuenta este elemento, la trayectoria no tiene ya la misma forma: las dos partes AC, CB (fig. 118) dejan de ser simétricas relativamente al punto culminante, y el proyectil se acerca rápidamente á la vertical al caer, como lo demuestra dicha figura.

Añadamos por último que la rotación de la Tierra ejerce cierta influencia en la trayectoria y produce una desviación lateral, de suerte que el proyectil se aparta del plano de la línea de tiro. Así es que una bala de cañón disparada en dirección horizontal, sin movimiento giratorio alrededor de su eje, sufre una desviación notable á la derecha por efecto de la fuerza centrífuga compuesta. Como todos los cuerpos en movimiento experimentan la influencia de esta fuerza, no están exentas de ella las corrientes de agua, y la masa líquida de un río se aglomera en el hemisferio Norte más en la orilla derecha que en la izquierda; aun cuando la velocidad sea bastante escasa, como la acción depende de la magnitud de la masa en movimiento, es decir, del caudal del río, los resultados distan mucho de ser insignificantes en las avenidas. En el hemisferio Sur esta desviación ocurre á la izquierda. Ofrece interés el citar las observaciones positivas de un hecho mecánico que procede del movimiento de rotación del globo, y que demuestra así la realidad de esta rotación. Tomaremos algunos ejemplos del sabio geógrafo Eliseo Reclus.

(1) La amplitud es entonces precisamente igual al doble de la altura á que se eleva el proyectil cuando se le dispara verticalmente.

“La dificultad está únicamente en escoger, dice en su amena obra *La Tierra*, para citar ejemplos de ríos que modifican gradualmente su curso en el sentido previsto por la teoría. Al Sur del ecuador tenemos los afluentes del gigantesco río de la Plata, que después de nivelar al Oeste la extensión de las Pampas, corren sin cesar su orilla izquierda. En el hemisferio Norte, el Eufrates, que procura desembocar enteramente en el lecho del Hindiah, á la derecha de su propio curso; el Ganges, que abandona la ciudad de Gur, en medio de los bosques, y que se inclina á 7 ú 8 kilómetros al Oeste de su delta; el Indo, que socava las colinas guijarrosas de su orilla occidental para llevar su delta 1,000 kilómetros más al Oeste; el Nilo, que se separa de su antiguo lecho en el desierto de Libia para dirigirse hacia la cordillera arábiga. En Europa tenemos el Gironda, el Loira, el Elba, que minan la base de las escarpaduras de su orilla derecha, y el Vístula, que hace más profunda su desembocadura oriental á expensas de la de la izquierda. Los geógrafos han advertido además en el curso del Rhin, del Danubio y del Volga fenómenos análogos producidos por la misma causa.” “En la Rusia de Europa y de Asia, sigue diciendo el mismo autor, es donde la desviación normal de los ríos se presta especialmente á los estudios más interesantes. Allí se reúnen en efecto las condiciones más á propósito para la invasión gradual de las aguas en su orilla derecha; longitud considerable, poderosas masas líquidas que pueden allanar muchos obstáculos, enormes avenidas que aumentan periódicamente la fuerza de erosión de la corriente, peñas compuestas de un suelo friable, y por último la marcada curvatura del globo, causa de un cambio rápido de la velocidad angular en diferentes latitudes (1).” Y cita en apoyo de estas afirmaciones los movimientos de desviación del lecho del Volga á la derecha de su curso, es decir, hacia el Oeste. En Siberia, las corrientes se desvían en la misma dirección más rápidamente todavía.

Esta ley de desviación es asimismo aplicable á las corrientes marinas, siendo uno de sus más sorprendentes testimonios el Gulf-Stream, que se desvía al Este. Finalmente, ya veremos más adelante que una desviación parecida es la causa de la dirección que siguen los vientos alisios así al Norte como al Sur del ecuador.

Aunque un cuerpo se halle en un reposo relativo en la superficie de la Tierra, no por ello deja de estar sometido á la fuerza centrífuga desarrollada por la rotación común, y ya hemos visto que de aquí resulta una disminución en la fuerza de la gravedad y por consiguiente en el peso del cuerpo. Esta disminución llega á su máximum en el ecuador, porque la fuerza centrífuga tiene en él su mayor valor. El cálculo demuestra que este valor es la 289.<sup>a</sup> parte de la fuerza de atracción terrestre. Por otra parte, como la fuerza centrífuga crece como el cuadrado de la velocidad angular de rotación, resulta de aquí con evidencia que si el movimiento de la Tierra fuese 17 veces más rápido, la fuerza centrífuga sería en el ecuador  $17 \times 17$ , ó 289 veces más considerable: sería igual á la atracción terrestre, y por consiguiente los cuerpos no pesarían nada. Si la velocidad de rotación fuese todavía mayor, predominaría la fuerza centrífuga, y todos los cuerpos

(1) La reacción lateral de que se trata es una fuerza proporcional á la masa puesta en movimiento, á su velocidad de traslación y al seno de la latitud. Estos son los tres factores que influyen en los fenómenos en cuestión; no creemos que la longitud tenga ni pueda tener influencia, por lo que respecta á los ríos, sino en cuanto su caudal crezca con la longitud de su curso; pero en este caso lo que influye es la masa de las aguas y su velocidad. La curvatura de que habla Reclus es una expresión falsa ó por lo menos impropia, pues aquélla es más marcada en las latitudes bajas que en las altas. El ángulo que forma el horizonte con el eje de rotación del globo es el que crece del ecuador á los polos, haciendo tanto más poderosa la acción de la fuerza centrífuga compuesta, cuanto mayor es la distancia entre éstos.

que no estuvieran sujetos al suelo irían á parar al espacio; se separarían de nuestro globo describiendo una curva cuyos primeros elementos serían verticales. Luego veremos cómo se hace uso de esta hipótesis para averiguar el límite extremo de la atmósfera terrestre, y por consiguiente, el de la atmósfera de cualquier cuerpo celeste.

## CAPÍTULO IV

### LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

#### I

##### ¿ES LA GRAVEDAD UNA FUERZA EXCLUSIVAMENTE TERRESTRE?

La gravedad, tal como acabamos de estudiarla en sus fenómenos y en sus leyes, es una fuerza que hasta el presente parece inherente á la Tierra; su dirección, siempre encaminada, ya que no á un punto determinado que debe ser el centro de nuestro globo, al menos á regiones muy próximas á este centro; su acción, que no tan sólo comprime de continuo todas las capas terrestres unas sobre otras y precipita los cuerpos abandonados á sí mismos en el aire ó en el vacío, sino que también atrae á la superficie del suelo los móviles lanzados en cualquier dirección, y se ejerce en todas las profundidades accesibles del propio modo que en todas las alturas de la atmósfera; sus variaciones de intensidad, que se patentizan cuando la latitud cambia, haciendo así ostensibles las variaciones mismas de la forma de la Tierra ó los accidentes de su superficie, y que dependen, como se ha visto, de la distancia al centro ó al eje de rotación; en una palabra, todo cuanto hasta ahora conocemos acerca de la gravedad, parece presentárnosla como fuerza eminentemente terrestre. Se ha visto que todos los cuerpos son pesados y que si no cambian de posición, si su latitud y la altitud del lugar en que se encuentran son invariables, su peso tampoco varía.

Sabemos, pues, que la gravedad, circunscrita á estos últimos límites, es una fuerza constante, y podemos añadir que es universal, por cuanto no hay en la Tierra un cuerpo sólido ó fluido, una partícula ni un átomo de materia que no sientan su influencia, tanto si están en reposo como si se mueven.

Ahora debemos ir más lejos; ahora debemos pasar desde la Tierra, donde hemos permanecido confinados y donde se han hecho hasta aquí todas las observaciones, todos los experimentos de que nos hemos ocupado, á las regiones celestes, á los cuerpos que se mueven en las profundidades del cielo. No ignoramos que la Tierra misma recorre esos espacios, y en realidad podría decirse que los explora y los conoce, que transporta á ellos por doquiera esa fuerza de gravedad que le es propia. Pero lo que se ha ignorado por espacio de mucho tiempo, más aún, lo que se ha venido negando, bajo el imperio de no sabemos qué ideas de vana metafísica, es que los cuerpos celestes están sujetos como los cuerpos terrestres á dicha fuerza. La Luna, que acompaña á la Tierra en su movimiento anual de traslación, ¿pesa hacia nuestro globo? El Sol, los planetas y todos los astros son, como el nuestro, asiento de fuerzas análogas á la gravedad terrestre, y si es así, todas esas fuerzas diseminadas por el espacio á toda distancia, ¿ejercen alguna reacción entre sí? Finalmente, si estas acciones y reacciones son reales, ¿cuál es su ley común?