Lorsqu'un mobile, faisant partie d'un système matériel, se meut par rapport aux points de ce système, son déplacement est le même, que le système soit en repos ou qu'il soit lui-même animé d'un mouvement de translation.

Lorsque le système est en repos, le mobile a un mouvement absolu; lorsque le système est lui-même en mouvement, le mobile a un mouvement relatif.

Le principe du mouvement relatif, énoncé pour la première fois par Galilée, est un de ces principes fondamentaux de la Mécanique qu'on a découverts par l'observation dans quelques cas particuliers, et qu'on a généralisés par l'induction. Ce principe ne se démontre pas *à priori*, mais il est vérifié expérimentalement dans les conséquences qu'on en tire.

Corollaire. — *Pour tout point matériel animé de deux ou de plusieurs mouvements simultanés, la position au temps* t *est la même que si ces mouvements étaient successifs.*

32. **Composition de deux mouvements rectilignes et uniformes.** — Soit un point matériel parcourant la droite OX (fig. 4) avec une vitesse constante, tandis que celle-ci est animée d'un mouvement de translation uniforme suivant la direction OY. On dit alors que *le point matériel est animé de deux mouvements rectilignes et uniformes.* Le mouvement composé ou résultant de ces deux mouvements est déterminé par la règle suivante, dite *règle du parallélogramme des vitesses :*

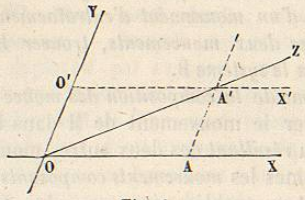

Fig. 4.

Règle du parallélogramme des vitesses. — *Lorsqu'un point matériel est animé de deux mouvements simultanés, rectilignes et uniformes, il prend un mouvement résultant rectiligne et uniforme, dont la vitesse est la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses des mouvements composants.*

Si les longueurs OA et OO′ représentent en grandeur et en direction les deux vitesses composantes, la ligne OZ représente en direction la trajectoire du mouvement composé, et la longueur OA′ représente en grandeur la vitesse constante de ce mouvement.

33. **Composition de plusieurs mouvements rectilignes et uniformes.** — Lorsqu'on sait composer deux mouvements, on peut en composer un nombre quelconque. Il suffit de généraliser, de la manière suivante, la règle du parallélogramme :

Remarquons qu'on peut obtenir la vitesse résultante OA′ (fig. 4)

en portant à la suite l'une de l'autre, à partir du point O, deux lignes OA et AA′, représentant les vitesses des deux mouvements en grandeur et en direction, et en joignant l'extrémité A′ de la dernière ligne à l'origine O de la première. La ligne OA′ ainsi obtenue s'appelle la *somme géométrique* des deux lignes OA et AA′. On peut donc énoncer la règle précédente en disant que : *La vitesse du mouvement composé est la somme géométrique des vitesses des mouvements composants.*

Sous cette forme, la règle de composition est générale et s'applique à un nombre quelconque de mouvements composants. On peut l'énoncer comme il suit :

Lorsqu'un point matériel est animé de plusieurs mouvements simultanés, rectilignes et uniformes, il prend un mouvement résultant rectiligne et uniforme, dont la vitesse est la somme géométrique des vitesses des mouvements composants.

Considérons, par exemple, quatre mouvements uniformes, dirigés suivant les lignes OA, OB, OC, OD (fig. 5), non situées dans un même plan, et de vitesses a, b, c, d, représentées respectivement en grandeur et en direction par les droites Oa, Ob, Oc, Od. Menons par le point a une droite ab', égale et parallèle à Ob, et joignons Ob'; la droite Ob' est la somme géométrique des lignes Oa et Ob : elle représente en grandeur et en direction la vitesse du mouvement uniforme résultant des deux mouvements uniformes OA et OB. Menons de même la droite $b'c'$, égale et parallèle à Oc, et joignons Oc'; cette ligne représentera la vitesse du mouvement composé qui résulte de Oc et de Ob', c'est-à-dire de OC, de OB et de OA. Enfin, menons la droite $c'd'$, égale et parallèle à Od, et joignons Od'; cette ligne est la somme géométrique de Od et de Oc', c'est-à-dire de Od, Oc, Ob et Oa : elle représente donc en grandeur et en direction la vitesse du mouvement uniforme qui résulte des quatre mouvements composants. Ce mouvement est dirigé suivant OR.

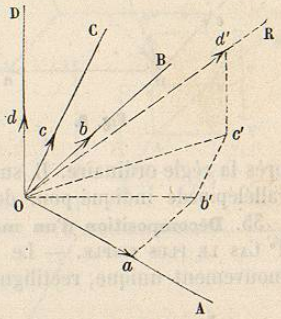

Fig. 5.

Remarque. — La construction serait évidemment la même pour un nombre quelconque de mouvements rectilignes et uniformes.

34. **Règles du polygone des vitesses et du parallélépipède des vitesses.** — Remarquons que la figure O$ab'c'd'$ (fig. 5) constitue

un polygone gauche dont la vitesse résultante Od' forme le dernier côté. De là un nouvel énoncé de la règle de composition de plusieurs mouvements rectilignes et uniformes : *Le mouvement résultant est rectiligne et uniforme, et sa vitesse est représentée en grandeur et en direction par le côté qui ferme le polygone $Oa\,b'\,c'\,d'$ dont les côtés sont respectivement égaux et parallèles aux vitesses Oa, Ob, Oc des mouvements composants.*

Sous cette forme, la règle prend le nom de *règle du polygone des vitesses.*

Dans le cas particulier de trois mouvements dont les trajectoires ne sont pas situées dans un même plan OA, OB, OC (fig. 6), la vitesse du mouvement résultant est la diagonale du parallélépipède construit sur les trois vitesses Oa, Ob, Oc des mouvements composants. La règle de composition prend alors le nom de *règle du parallélépipède des vitesses.* On voit en $Oa\,b'\,c'\,O$ le polygone construit d'après la règle ordinaire. Il suffit d'achever la construction du parallélépipède indiqué pour démontrer la règle du parallélépipède.

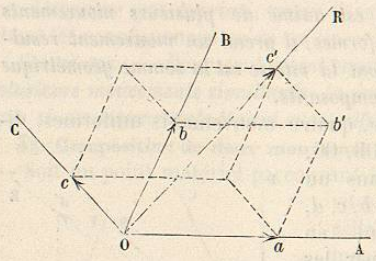

Fig. 6.

35. **Décomposition d'un mouvement rectiligne et uniforme.** — 1° Cas le plus simple. — Le problème de la décomposition d'un mouvement unique, rectiligne et uniforme en deux mouvements se présente, par exemple, dans la question suivante :

Un mobile M *se déplace par rapport à un système* A *qui se meut lui-même dans un système* B. *On connaît le mouvement absolu de* M *dans* B *ainsi que celui de* A *dans* B : *on demande de déterminer le mouvement relatif de* M *dans le système* A. Ce serait le cas de deux bateaux M et A se déplaçant l'un et l'autre, d'un mouvement rectiligne et uniforme, avec des vitesses connues, par rapport aux rives d'un lac B. On connaît donc les deux mouvements absolus de M et de A par rapport à B : il s'agirait de déterminer le mouvement relatif de M par rapport à A ; ce mouvement relatif serait

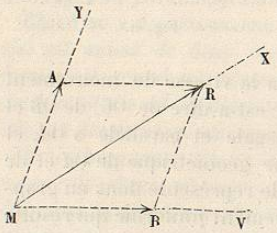

Fig. 7.

le *mouvement apparent* du bateau M pour les passagers du bateau A.

Soit MX (fig. 7) la direction du mouvement connu de M dans le système B et soit MR sa vitesse; par le point M menons une parallèle MY à la direction du mouvement connu du système A dans le système B et soit MA sa vitesse. Si l'on achève le parallélogramme ayant MR pour diagonale et MA pour côté, le deuxième côté MB de ce parallélogramme représentera évidemment la direction MV et la vitesse du mouvement inconnu de M dans le système B.

Remarque. — Au lieu d'appliquer ici la règle du parallélogramme en sens inverse, on pourrait appliquer la règle de la somme géométrique. On voit, en effet, que si, à la suite de la vitesse MR, *on porte une ligne* RB *égale, parallèle et de sens contraire à la vitesse composante connue*, l'autre vitesse sera donnée par la ligne MB, c'est-à-dire par la *somme géométrique* des deux lignes qui représentent la vitesse résultante et l'*inverse* de la vitesse composante connue.

2° Cas général. — *Étant donné un mouvement uniforme suivant la droite* AM, *on peut le décomposer en un nombre quelconque de mouvements rectilignes et uniformes.* Les vitesses composantes seront données dans chaque cas en appliquant en sens inverse l'une des règles précédentes. La règle du parallélépipède est celle qu'on applique le plus souvent, en choisissant trois directions rectangulaires. Soit v la vitesse du mouvement suivant AM, soient α, β, γ les angles de la direction du mouvement avec trois axes de coordonnées rectangulaires (fig. 8). Les vitesses composantes sont les trois côtés du parallélépipède construit sur AV, parallèlement aux axes. On a

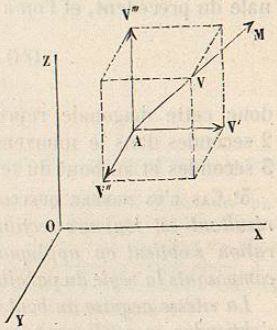

Fig. 8.

$$v' = v \cos \alpha, \qquad v'' = v \cos \beta \qquad \text{et} \qquad v''' = v \cos \gamma.$$

36. **Composition des mouvements rectilignes uniformément variés, sans vitesses initiales.** — 1° Cas de deux mouvements. — *Lorsqu'un point matériel est animé de deux mouvements simultanés rectilignes, uniformément variés, sans vitesses initiales, son mouvement résultant est rectiligne et uniformément varié; l'accélération de ce mouvement est la diagonale du parallélogramme construit sur les accélérations des mouvements composants.*

2° Composition des vitesses. — *La vitesse acquise au bout d'un temps quelconque par le point matériel est la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses acquises au bout du même temps dans les mouvements composants.*

En effet, soient OX, OY les directions des deux mouvements composants; construisons un parallélogramme sur les longueurs γ et γ' qui représentent les accélérations : la diagonale de ce parallélogramme représente la direction du mouvement résultant et son accélération Γ (fig. 9). Au bout de 2 secondes les vitesses acquises dans les mouvements composants sont 2γ et $2\gamma'$; si nous construisons un nouveau parallélogramme sur ces deux longueurs, il a son sommet O′ sur la direction de la diagonale du précédent, et l'on a

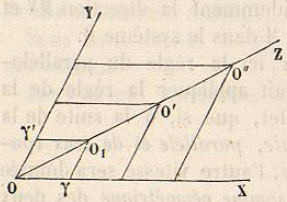

Fig. 9.

$$O'O = 2OO_1 = 2\Gamma;$$

donc cette diagonale représente la vitesse acquise au bout de 2 secondes dans le mouvement résultant; de même au bout de 3 secondes et au bout du temps t.

3° Cas d'un nombre quelconque de mouvements. — *Le mouvement résultant est toujours rectiligne et uniformément varié. Son accélération s'obtient en appliquant aux accélérations des mouvements composants la règle du parallélépipède des forces ou celle du polygone.*

La vitesse acquise au bout du temps t *dans le mouvement résultant s'obtiendra en appliquant les mêmes règles aux vitesses acquises au bout du temps* t *dans les mouvements composants.*

37. **Composition de deux mouvements rectilignes, l'un uniforme et l'autre uniformément accéléré, sans vitesse initiale.** — *Le mouvement résultant est un mouvement varié et curviligne. La trajectoire est une parabole qui est tangente à la direction du mouvement composant uniforme et a pour diamètre la direction du mouvement accéléré.*

Soient O la position initiale du point matériel, OY la direction du mouvement uniforme de vitesse V_0, faisant un angle θ avec OX, direction du mouvement uniformément accéléré, dont l'accélération est γ. D'après les règles précédentes, la position du mobile au temps t s'obtiendra en construisant sur les directions des deux mouvements un parallélogramme, ayant pour côtés les espaces parcourus pendant le temps t dans chacun des mouvements :

$OA = \frac{1}{2}\gamma t^2$ et $OB = V_0 t$ (fig. 10). Le mobile est à l'extrémité de la diagonale OM.

En donnant au temps t différentes valeurs successives et construisant les parallélogrammes correspondants, on obtiendra autant de positions distinctes du point matériel. On pourra donc construire sa trajectoire par points.

Il suffit d'en avoir un seul pour démontrer qu'elle est *curviligne*. En effet, si la trajectoire était rectiligne, l'angle α que fait la diagonale avec l'axe OX serait constant et indépendant du temps; or il est facile de prouver le contraire. En effet, dans le triangle OMA on a

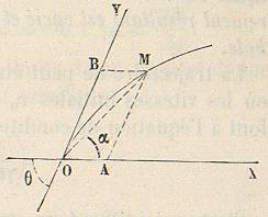

Fig. 10.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin OMA} = \frac{MA \text{ ou } V_0 t}{OA \text{ ou } \frac{1}{2}\gamma t^2};$$

or $OMA = (\theta - \alpha)$, donc

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)} = \frac{2V_0}{\gamma t}.$$

De cette équation on déduit

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{2V_0\sin\theta}{2V_0\cos\theta + \gamma t}.$$

On voit que l'angle α diminue quand le temps croît; par conséquent, la trajectoire s'infléchit vers l'axe OX.

Équation de la trajectoire. — Au lieu de construire la trajectoire par points, il est plus commode d'en déterminer l'équation. La méthode la plus simple consiste à rapporter les points de la courbe aux directions des deux mouvements, c'est-à-dire à choisir OX et OY comme axes de coordonnées. L'x et l'y d'un point quelconque M de la courbe sont alors précisément les côtés OA et AM du parallélogramme précédent. On a donc les deux équations

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 \quad \text{et} \quad y = V_0 t,$$

et, en éliminant t entre ces deux équations, on obtient la relation

$$y^2 = \frac{2V_0^2}{\gamma}x.$$

Cette relation est, par définition, l'équation de la courbe rapportée aux systèmes d'axes OX, OY. Elle représente une *parabole*, qui est tangente à la droite OY, c'est-à-dire à la direction du mouvement uniforme et qui a pour diamètre la droite OX, c'est-à-dire la direction du mouvement uniformément accéléré.

Remarque. — Le mouvement des projectiles dans le vide est un cas particulier de ce problème général.

38. **Composition de deux mouvements rectilignes, uniformément variés, avec vitesses initiales.** — On démontre que *le mouvement résultant est varié et curviligne : la trajectoire est une parabole.*

La trajectoire ne peut être rectiligne que dans le cas particulier où les vitesses initiales v_0 et v_0' et les accélérations γ et γ' satisfont à l'équation de condition

$$\gamma v_0' - v_0 \gamma' = 0.$$

C'est précisément ce qui avait lieu dans le cas précédent, où l'on avait $v_0' = 0$ avec $\gamma' = 0$.

Réciproques. — *La décomposition d'un mouvement rectiligne uniformément varié quelconque est possible dans tous les cas. Elle se fait en appliquant les réciproques des règles relatives à la composition.*

39. **Accélération dans un mouvement varié curviligne.** — Nous avons vu que la vitesse moyenne et la vitesse à l'instant t, dans un mouvement varié curviligne, se définissent et se calculent comme dans un mouvement varié rectiligne. Il n'en est pas de même de l'accélération. On ne peut définir l'accélération dans ce cas, et en calculer l'expression, qu'en appliquant les notions de vitesse résultante et de vitesses composantes.

1° *Définitions.* — Soient M (fig. 11) la position du mobile sur sa tra-

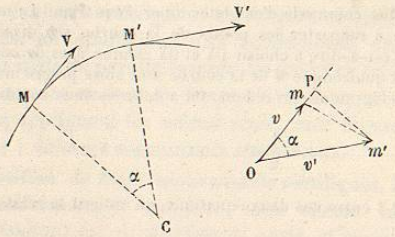

Fig. 11.

jectoire au temps t et M' sa position au temps $(t + \Delta t)$; soient v et v' les vitesses à ces deux instants. Par un point quelconque O de l'espace, menons les droites Om et Om' respectivement parallèles et égales aux vitesses v et v' et joignons mm'. D'après la règle de la composition des vitesses, on peut considérer la vitesse en M' comme la résultante des deux vitesses v et mm' : donc mm' représente en grandeur et en direction *la variation de vitesse pendant*

l'intervalle de temps Δt. En faisant le quotient $\frac{mm'}{\Delta t}$, on a *l'accélération moyenne pendant l'intervalle* Δt, à savoir : $\gamma_m = \frac{mm'}{\Delta t}$.

En faisant tendre Δt vers zéro, la limite de ce rapport donne *l'accélération à l'instant* t *du mouvement curviligne*

$$\gamma = \lim. \left(\frac{mm'}{\Delta t}\right).$$

La direction limite de mm' est la direction de γ. Elle est comprise dans la *position limite* du plan déterminé par les tangentes à la courbe aux points infiniment voisins M et M'.

Remarques. — I. On sait que ce plan limite est ce qu'on appelle le *plan osculateur* de la courbe au point M.

II. Rappelons aussi que si l'on prend le rapport $\frac{\text{angle } \alpha}{\text{arc MM}'} \left(= \frac{\alpha}{\Delta s}\right)$ de l'angle des deux tangentes à la courbe en M et M', et qu'on fasse tendre M' vers M, ce rapport tend vers une limite, qu'on appelle *courbure de la courbe au point* M. On désigne cette limite par le quotient $\frac{1}{\rho}$ et l'on a

$$\lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta s}\right) = \frac{1}{\rho}.$$

Le coefficient ρ s'appelle le *rayon de courbure* en M. C'est le rayon d'un cercle (*cercle osculateur*) qui serait tangent en M à la courbe et serait compris dans le plan osculateur.

2° *Calcul des deux composantes de l'accélération à l'instant* t. — Prolongeons Om et abaissons la perpendiculaire m'P. D'après la règle de la composition des vitesses, l'accroissement de vitesse $m'm$ peut être considéré comme la résultante des deux vitesses, l'une mP, dirigée suivant la tangente en M à la trajectoire, et l'autre Pm', dirigée suivant la normale. Par suite, lim. $\left(\frac{mm'}{\Delta t}\right)$, ou γ, peut être considéré comme la résultante des deux limites suivantes :

$$\lim. \left(\frac{m\text{P}}{\Delta t}\right) \quad \text{et} \quad \lim. \left(\frac{m'\text{P}}{\Delta t}\right).$$

Autrement dit, ces deux limites représentent, l'une la *composante tangentielle* de l'accélération à l'instant t et l'autre sa *composante normale.*

Accélération tangentielle. — Soit $S = f(t)$ l'équation du mouvement. S représente l'espace parcouru, compté sur la courbe. On sait que la vitesse à l'instant t est donnée par l'équation $V = f'(t)$.

Dans le triangle infiniment petit Om'P, la perpendiculaire m'P tend à se confondre avec l'arc décrit du point O comme centre avec Om' pour rayon ; donc

la ligne mP tend vers la valeur limite $(0m' - 0m)$ ou $v' - v$ ou Δv. On a donc

$$\left(\lim. \frac{m\mathrm{P}}{\Delta t}\right) = \lim. \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right).$$

Or $\lim. \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$ est la dérivée de la vitesse par rapport au temps, c'est-à-dire $f''(t)$. En appelant T la composante tangentielle de l'accélération, on aura donc

$$\mathrm{T} = f''(t).$$

Telle est l'expression de la composante tangentielle de l'accélération à l'instant t : c'est ce qu'on appelle ordinairement l'*accélération tangentielle* à l'instant t.

Accélération centripète. — De même, soit α l'angle des deux vitesses v et v'; d'une part, m'P tend vers la valeur de l'arc $v'\alpha$; et comme v' tend vers la valeur v lorsque Δt tend vers zéro, on peut dire que m'P tend vers $v\alpha$: donc

$$\lim. \left(\frac{m\mathrm{P}}{\Delta t}\right) = \lim. \left(\frac{v\alpha}{\Delta t}\right) = v \lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right).$$

Or nous savons que $\lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta s}\right) = \frac{1}{\rho}$, en appelant ρ le *rayon* de courbure en m. On peut donc écrire

$$\rho \lim. \alpha = \lim. \Delta s, \quad \text{d'où} \quad \lim. \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ (ou } v) = \rho \lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right).$$

Par conséquent $\lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right) = \frac{v}{\rho}$ et $v \lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right) = \frac{v^2}{\rho}$.

Soit N cette composante normale de l'accélération, on a donc $\mathrm{N} = \frac{v^2}{\rho}$: c'est ce qu'on appelle ordinairement l'*accélération centripète à l'instant* t. Enfin, posons $\omega = \lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right)$. On a en résumé :

$\mathrm{T} = f''(t)$, c'est l'accélération tangentielle à l'instant t.

$\mathrm{N} = \frac{v^2}{\rho}$, c'est l'accélération centripète.

$\omega = \frac{v}{\rho}$, c'est la vitesse angulaire à l'instant t.

40. **Mouvement circulaire uniforme.** — On peut déduire de ce calcul général les éléments du mouvement curviligne dans un cas particulier très intéressant, celui du mouvement circulaire uniforme.

Les équations précédentes se simplifient. On a successivement

[1] $$\mathrm{S} = f(t) = \mathrm{A}t,$$

A étant une constante : *l'espace parcouru est donc proportionnel au temps.*

[2] $$\mathrm{V} = f'(t) = \mathrm{A},$$

la vitesse est donc constante.

[3] $$\mathrm{T} = f'(t) = 0,$$

l'accélération tangentielle est donc nulle : cela signifie que l'accélération à l'instant t est *constamment normale à la trajectoire*, c'est-à-dire qu'elle se réduit à l'accélération centripète.

[4] $$\mathrm{N} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{R}},$$

l'accélération centripète est donc constante. R est le rayon de la circonférence décrite, et il est identique en chaque point au rayon de courbure.

Enfin, on a

[5] $$\omega = \lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right) = \frac{v}{\rho} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{R}},$$

la vitesse angulaire est donc constante. V étant ici l'arc parcouru dans l'unité de temps, et R le rayon de cet arc, le quotient $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{R}}$ représente l'angle au centre correspondant ω. Cela explique le nom de *vitesse angulaire* donné à $\lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right)$.

CHAPITRE IV

MÉCANIQUE

NOTIONS DE STATIQUE

41. **Forces.** — Nous avons déjà vu qu'on appelle *force* toute cause capable de produire le mouvement et de le modifier. L'action des muscles chez les animaux, la pesanteur, les attractions et les répulsions magnétiques ou électriques sont des forces. Nous ignorons en quoi consistent les forces, mais la notion nous en est donnée nettement par la sensation de l'effort. Cette notion de force implique trois éléments qui la caractérisent, à savoir le *point d'application* de la force, sa *direction* et son *intensité*.

Les forces peuvent n'agir sur les corps que pendant un temps très court, comme cela a lieu dans les chocs, dans l'explosion de la poudre, ou bien, elles agissent pendant toute la durée du mouvement. On dit dans le premier cas qu'elles sont *instantanées*, et dans le second, qu'elles sont *continues;* mais on entend