la ligne mP tend vers la valeur limite $(0m' - 0m)$ ou $v' - v$ ou Δv. On a donc

$$\left(\lim. \frac{m\mathrm{P}}{\Delta t}\right) = \lim. \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right).$$

Or $\lim. \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$ est la dérivée de la vitesse par rapport au temps, c'est-à-dire $f''(t)$. En appelant T la composante tangentielle de l'accélération, on aura donc

$$\mathrm{T} = f''(t).$$

Telle est l'expression de la composante tangentielle de l'accélération à l'instant t : c'est ce qu'on appelle ordinairement l'*accélération tangentielle* à l'instant t.

Accélération centripète. — De même, soit α l'angle des deux vitesses v et v'; d'une part, m'P tend vers la valeur de l'arc $v'\alpha$; et comme v' tend vers la valeur v lorsque Δt tend vers zéro, on peut dire que m'P tend vers $v\alpha$: donc

$$\lim. \left(\frac{m\mathrm{P}}{\Delta t}\right) = \lim. \left(\frac{v\alpha}{\Delta t}\right) = v \lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right).$$

Or nous savons que $\lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta s}\right) = \frac{1}{\rho}$, en appelant ρ le *rayon* de courbure en m. On peut donc écrire

$$\rho \lim. \alpha = \lim. \Delta s, \quad \text{d'où} \quad \lim. \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ (ou } v) = \rho \lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right).$$

Par conséquent $\lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right) = \frac{v}{\rho}$ et $v \lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right) = \frac{v^2}{\rho}$.

Soit N cette composante normale de l'accélération, on a donc $\mathrm{N} = \frac{v^2}{\rho}$: c'est ce qu'on appelle ordinairement l'*accélération centripète à l'instant* t. Enfin, posons $\omega = \lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right)$. On a en résumé :

$\mathrm{T} = f''(t)$, c'est l'accélération tangentielle à l'instant t.

$\mathrm{N} = \frac{v^2}{\rho}$, c'est l'accélération centripète.

$\omega = \frac{v}{\rho}$, c'est la vitesse angulaire à l'instant t.

40. **Mouvement circulaire uniforme.** — On peut déduire de ce calcul général les éléments du mouvement curviligne dans un cas particulier très intéressant, celui du mouvement circulaire uniforme.

Les équations précédentes se simplifient. On a successivement

[1] $$\mathrm{S} = f(t) = \mathrm{A}t,$$

A étant une constante : *l'espace parcouru est donc proportionnel au temps.*

[2] $$\mathrm{V} = f'(t) = \mathrm{A},$$

la vitesse est donc constante.

[3] $$\mathrm{T} = f'(t) = 0,$$

l'accélération tangentielle est donc nulle : cela signifie que l'accélération à l'instant t est *constamment normale à la trajectoire*, c'est-à-dire qu'elle se réduit à l'accélération centripète.

[4] $$\mathrm{N} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{R}},$$

l'accélération centripète est donc constante. R est le rayon de la circonférence décrite, et il est identique en chaque point au rayon de courbure.

Enfin, on a

[5] $$\omega = \lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right) = \frac{v}{\rho} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{R}},$$

la vitesse angulaire est donc constante. V étant ici l'arc parcouru dans l'unité de temps, et R le rayon de cet arc, le quotient $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{R}}$ représente l'angle au centre correspondant ω. Cela explique le nom de *vitesse angulaire* donné à $\lim. \left(\frac{\alpha}{\Delta t}\right)$.

CHAPITRE IV

MÉCANIQUE

NOTIONS DE STATIQUE

41. **Forces.** — Nous avons déjà vu qu'on appelle *force* toute cause capable de produire le mouvement et de le modifier. L'action des muscles chez les animaux, la pesanteur, les attractions et les répulsions magnétiques ou électriques sont des forces. Nous ignorons en quoi consistent les forces, mais la notion nous en est donnée nettement par la sensation de l'effort. Cette notion de force implique trois éléments qui la caractérisent, à savoir le *point d'application* de la force, sa *direction* et son *intensité*.

Les forces peuvent n'agir sur les corps que pendant un temps très court, comme cela a lieu dans les chocs, dans l'explosion de la poudre, ou bien, elles agissent pendant toute la durée du mouvement. On dit dans le premier cas qu'elles sont *instantanées*, et dans le second, qu'elles sont *continues;* mais on entend

par là qu'il y a non pas deux espèces de forces, mais seulement deux modes d'action des forces.

42. **Équilibre. — Statique.** — Plusieurs forces étant appliquées à un même corps, il peut arriver qu'elles se neutralisent mutuellement et que l'état de repos ou de mouvement du corps ne soit pas modifié. On dit alors que *le corps est en équilibre* et que les forces appliquées au corps *se font équilibre.*

On appelle *Statique* la partie de la mécanique qui traite des forces considérées à l'état d'équilibre et qui détermine les conditions de cet équilibre.

43. **Mesure des forces. — Dynamomètre.** — On dit que deux forces sont *égales*, quand, appliquées en sens contraire à un même point matériel, elles se font équilibre. On dit qu'une force est *double*, *triple* d'une autre, lorsqu'elle fait équilibre à deux, trois forces égales à celle-ci, et appliquées simultanément en sens contraire au même point matériel.

L'état d'équilibre fournit le moyen de *comparer* l'intensité d'une force à l'intensité d'une autre force, prise comme unité, c'est-à-dire de *mesurer* les forces. L'unité ordinairement adoptée, d'après le système métrique, est le *kilogramme. Théoriquement*, c'est la force avec laquelle une masse d'eau pure, à la température de 4°, du volume de 1 litre, est sollicitée par la pesanteur. *Pratiquement*, c'est la force avec laquelle la pesanteur sollicite une masse en platine, construite de manière à réaliser le kilogramme théorique, et conservée aux Archives sous le nom de *kilogramme-étalon.*

La comparaison des forces avec l'unité se fait au moyen d'instruments spéciaux appelés *dynamomètres.* Ils se composent tous essentiellement d'un ressort, dont l'élasticité peut faire équilibre à des forces variables. En appliquant successivement au ressort des poids connus, et en notant les flexions correspondantes, on graduera l'instrument en kilogrammes. Une force inconnue quelconque appliquée ensuite au ressort et produisant *la même flexion* qu'un poids de *n* kilogrammes vaudra elle-même, par définition, *n* kilogrammes.

Nous décrirons quelques dynamomètres usuels dans le chapitre des Instruments de mesure.

Remarque. — Si la force conserve toujours la même intensité de *n* kilogrammes, on dit que c'est une *force constante;* si son intensité augmente ou diminue avec le temps, on dit que c'est une *force variable en grandeur;* si elle change de direction en même temps que d'intensité, on dit qu'elle est *variable en grandeur et en direction.*

44. **Représentation des forces.** — Une force est complètement déterminée lorsqu'on connaît son point d'application, sa direction et son intensité. On peut représenter ces divers éléments d'une force, comme on a représenté, en cinématique, les vitesses et les accélérations. On mène par son point d'application, dans le sens de sa direction, une ligne droite indéfinie; puis sur cette ligne, à partir du point d'application, et dans le sens où agit la force, on porte une unité de longueur arbitraire, le centimètre par exemple, autant de fois que la force donnée contient l'unité de force. On a ainsi une ligne droite qui représente complètement la force. Pour distinguer les forces entre elles, on les désigne par les lettres P, Q, R..., qu'on place sur leurs directions respectives à l'extrémité de la longueur qui en représente l'intensité (fig. 12).

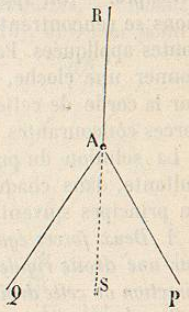

Fig. 12.

Remarque. — Ce procédé de figuration graphique permet d'appliquer à l'étude des forces les mêmes méthodes géométriques qu'à l'étude des mouvements. La statique est donc, comme la cinématique, une sorte de géométrie, qui joint à l'idée d'espace, non seulement l'idée de temps, mais aussi l'idée nouvelle de force. Étant donnés ces notions fondamentales et les principes d'observation qu'elles comportent, la statique procède géométriquement, comme la cinématique, et arrive de déductions en déductions à l'établissement des conditions d'équilibre d'un système de forces quelconques appliquées à un système de points matériels.

45. **Composition et décomposition des forces.** — Le premier problème qui se présente en statique est celui de la *composition* et de la *décomposition* des forces. La solution de ce problème est indispensable à connaître pour résoudre toutes les questions d'équilibre.

Résultante et composantes. — Lorsque plusieurs forces P, Q, R..., appliquées à un même point matériel A (fig. 12), se font équilibre, *il est évident que* l'une quelconque d'entre elles, R par exemple, peut, à elle seule, annuler l'action de toutes les autres. Une force S, égale et opposée à R, produirait donc à elle seule le même effet que le système des forces P et Q. Toute force qui peut ainsi produire le même effet que plusieurs forces simultanées se nomme leur *résultante*, et les autres forces, par rapport à la résultante, en sont les *composantes.* La force S est la résultante des forces P et Q, et celles-ci en sont les composantes.

Le problème de la composition des forces consiste à trouver la résultante d'un système de forces quelconques. Le problème inverse de la décomposition des forces consiste à trouver un système de forces qui produise le même effet qu'une force unique donnée. On suppose toujours ces forces appliquées soit à un point matériel unique, soit à un système de points matériels séparés par des intervalles invariables, et constituant des *corps solides* absolument *rigides*, c'est-à-dire incompressibles et indéformables. Nous traiterons d'abord le cas des *forces concourantes*, puis celui des *forces parallèles*, qui se déduit aisément du premier.

46. **Composition des forces concourantes.** — 1° *Définitions et principes.* — On appelle *forces concourantes* celles dont les directions se rencontrent en un même point où l'on peut les supposer toutes appliquées. Par exemple, lorsque plusieurs hommes, pour sonner une cloche, tirent des cordeaux fixés à un même nœud sur la corde de cette cloche, les efforts de ces hommes sont des forces concourantes.

La solution du problème général et la détermination de la résultante, dans chaque cas particulier, se déduisent des lemmes ou principes suivants :

I. *Deux forces égales et contraires, appliquées à deux points liés par une droite rigide* (de longueur invariable) *et agissant dans la direction de cette droite, se font équilibre.*

On admet ce principe comme évident.

II. *Une force* F *étant appliquée en un point* A, *on peut l'appliquer en tout autre point* B *de sa direction, pourvu que ce nouveau point d'application soit lié invariablement au premier* (fig. 13).

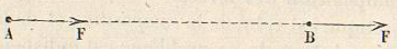

Fig. 13.

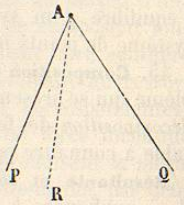

Fig. 14.

III. Réciproquement, *si une force* F *agissant sur un point libre* A *peut être transportée en un point* B *lié invariablement au point* A, *le second point est sur la direction de la force.*

Ce principe et sa réciproque se déduisent du premier principe.

IV. *Lorsque deux forces* P *et* Q (fig. 14) *agissent simultanément sur un point matériel* A, *leur résultante* R *est nécessairement comprise dans le plan des deux forces et à l'intérieur de l'angle formé par leurs directions.*

Ce principe est une conséquence de celui de la composition des mouvements : le mouvement que produira la résultante étant le mouvement résultant des mouvements que produirait chacune des composantes, la trajectoire du mouvement résultant (supposé rectiligne) ou l'élément de trajectoire du mouvement résultant (supposé curviligne) est dans le plan des trajectoires ou des éléments de trajectoire des mouvements composants, d'après la règle du parallélogramme des vitesses.

2° Théorème général. — *Lorsque plusieurs forces concourent en un même point matériel et qu'elles ne se font pas équilibre, il existe toujours une force unique ou* résultante *par laquelle on peut les remplacer.*

I. *Cas de deux forces. — Parallélogramme des forces.* — Soient d'abord deux forces concourantes F et F′ (fig. 15), et O leur point d'application. Ces deux droites qui se coupent déterminent un plan que nous prenons pour plan de la figure 15. On déduit des principes qui précèdent la règle du *parallélogramme des forces* qui détermine la résultante de deux forces, comme la règle du parallélogramme des vitesses détermine la vitesse résultante de deux mouvements.

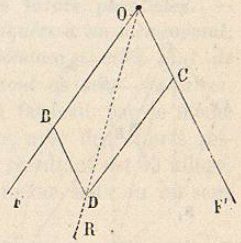

Fig. 15.

La résultante de deux forces concourantes est représentée, en direction et en grandeur, par la diagonale du parallélogramme construit sur ces forces.

Ainsi la résultante R des forces F et F′ est dirigée suivant la diagonale OD et contient l'unité de force autant de fois que cette diagonale contient elle-même l'unité linéaire qui a été portée sur OB et OC pour représenter les forces F et F′.

II. *Cas de plusieurs forces. — Polygone des forces.* — La règle précédente est susceptible d'un autre énoncé, comme dans le cas des mouvements. On voit en effet que la diagonale du parallélogramme construit sur les deux forces est la *somme géométrique* des deux lignes qui représentent ces forces. On peut donc dire aussi que *la résultante de deux forces est représentée en grandeur et en direction par la somme géométrique des lignes qui représentent ces forces.*

Sous cette forme l'énoncé est général et s'applique au cas d'un nombre quelconque des forces. En effet, soient les forces F, F′, F″, F‴ sollicitant le point matériel O et représentées, en grandeur et en direction, par les droites OA, OB, OC, OD, non situées

dans un même plan (fig. 16) : si l'on applique la règle du parallélogramme aux deux premières forces, on obtient une résultante partielle OB_1 ; si l'on compose OB_1 avec la force suivante, on obtient la deuxième résultante partielle OC_1 ; enfin, en composant OC_1 avec la dernière force OD, on a OR, qui est évidemment la résultante totale. Or la droite OR est, par définition, la somme géométrique des droites OA, OB, OC, OD : on l'eût donc obtenue directement en appliquant la règle de la somme géométrique.

On voit aussi que la ligne OR n'est pas autre chose que *le dernier côté d'un polygone construit en menant par le point* O, *à la suite les unes des autres, des lignes parallèles et égales aux forces concourantes.* C'est pourquoi l'on appelle aussi *règle du polygone des forces* cette règle de composition.

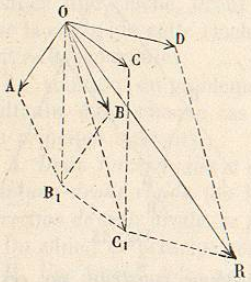

Fig. 16.

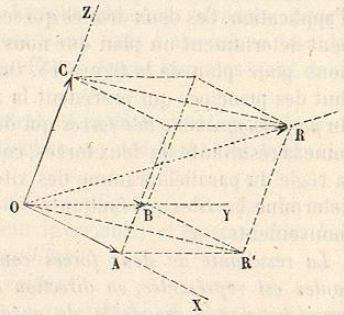

Fig. 17.

III. *Parallélépipède des forces.* — Dans le cas particulier où le système des forces concourantes se réduit à trois forces OA, OB, OC (fig. 17) formant un trièdre quelconque, la règle de composition se simplifie. Il suffit d'appliquer soit la règle du polygone, soit celle de la somme géométrique, pour voir que la résultante OR est la diagonale d'un parallélépipède construit sur les trois lignes OA, OB, OC. De là cette autre règle, dite *règle du parallélépipède*, qui s'applique au cas particulier de trois forces :

La résultante d'un système de trois forces concourantes est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélépipède construit sur ces trois forces.

IV. *Décomposition d'une force unique en plusieurs forces concourantes.* — Inversement, une force unique étant donnée, on peut la décomposer en deux ou plusieurs forces concourantes qui produisent le même effet. Ces composantes de la force unique sont

déterminées dans chaque cas en appliquant l'une des réciproques des règles de composition.

1° Cas de deux forces. — *Une force unique* R (fig. 15) *peut être décomposée en deux autres* F *et* F′, *appliquées au même point que la première et dirigées suivant des droites données.* Il suffit pour cela de construire sur ces droites un parallélogramme dont la force donnée soit la diagonale ; les longueurs des côtés représentent les composantes cherchées.

2° Cas de trois forces. — *Une force* R (fig. 17) *peut être décomposée d'une infinité de manières, suivant trois directions* OA, OB, OC, *formant un angle trièdre quelconque.*

3° Cas de plusieurs forces. — *Étant donnée une force* R (fig. 16), *on peut la décomposer suivant un nombre quelconque de forces concourantes.* Il suffit d'appliquer en sens inverse la règle du polygone.

47. **Composition et décomposition des forces parallèles.** — 1° *Lorsque deux forces parallèles sont appliquées à un même point, elles ont une résultante égale à leur somme si elles sont de même sens, et à leur différence si elles sont de sens contraires.* Par exemple, si deux hommes tirent un fardeau par le même point et suivant des directions parallèles, avec des efforts respectifs de 20 kilogr. et 15 kilogr., l'effort résultant est 35 kilogr. ou 5 kilogr., suivant qu'ils tirent dans le même sens ou en sens contraires.

Lorsque les forces parallèles sont appliquées, non pas au même point d'un solide rigide, mais suivant la même direction, la règle de composition est la même, parce qu'on peut transporter fictivement les points d'application réels de ces forces en un même point quelconque de leur direction sur le corps rigide.

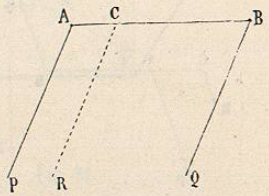

Fig. 18.

2° *Lorsque deux forces parallèles et de même sens sont appliquées aux points* A *et* B *d'un solide rigide* (fig. 18), *leur résultante* R *est égale à leur somme, leur est parallèle et partage la droite* AB *en deux segments inversement proportionnels aux intensités des forces* P *et* Q.

On a $R = P + Q$ et $\frac{CA}{CB} = \frac{Q}{P}$, C étant le point d'application de R. Par exemple, si P est deux, trois fois plus grande que Q, la distance AC est deux, trois fois plus petite que CB. Par suite, lorsque les forces P et Q sont égales, la direction de leur résultante partage la ligne AB en deux parties égales.

3° Réciproquement, *une force unique* R, *appliquée en* C, *peut être remplacée par le système de deux forces parallèles et de même sens,* P *et* Q, *dont la somme est égale à* R; *si les points* A, B, C *sont en ligne droite, ces nouvelles forces sont en raison inverse des longueurs* AC *et* CB.

4° *Cas d'un nombre quelconque de forces de même sens. — Centre des forces parallèles.* — On cherche, d'après la règle précédente, la résultante de deux de ces forces, puis celle de cette résultante partielle et d'une troisième force, et ainsi de suite jusqu'à la dernière. Cela mène toujours à une résultante totale unique, qui est *une force égale à la somme des composantes, de même sens, et appliquée en un point qu'on appelle centre des forces parallèles.*

La position du centre des forces parallèles se détermine analytiquement, à l'aide du théorème des moments, que nous verrons plus bas. Il résulte de la règle de composition que la position de ce point est invariable, quelles que soient la direction et la grandeur des composantes, pourvu qu'elles restent parallèles entre elles et dans les mêmes rapports de grandeur.

5° *Cas d'un nombre quelconque de forces, de sens opposés. — Couple.* — Quand on a des forces parallèles en nombre quelconque agissant indifféremment dans les deux sens, on pourra composer les forces de chaque groupe en une seule force, et l'on n'aura plus que deux forces parallèles P et Q de sens opposés, appliquées en des points différents A et B (fig. 19).

Dans le cas où *les deux forces sont inégales*, elles ont une résul-

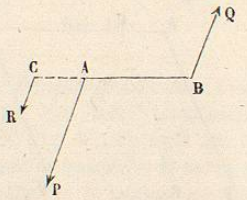

Fig. 19.

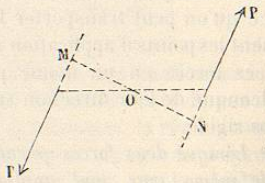

Fig. 20.

tante R *égale à leur différence* (P — Q), *parallèle à chacune d'elles et de même sens que la plus grande, appliquée en un point* C *extérieur à la ligne* AB *et dont les distances aux points* A *et* B *sont inversement proportionnelles aux forces* P *et* Q.

On a donc, en général, $R = P - Q$ et $\frac{CA}{CB} = \frac{Q}{P}$. La force R est donc parfaitement déterminée dans ses trois éléments, intensité, direction et point d'application.

Dans le cas particulier où $P = Q$, il n'y a pas de résultante. Ce système de forces s'appelle un *couple :* il tend à faire tourner le solide auquel il est appliqué dans le plan du couple, jusqu'à ce que la droite AB soit amenée dans la direction des forces. Un couple est déterminé par son *moment :* c'est le produit de l'intensité de la force P par la plus courte distance MN de deux forces. MN est le *bras de levier* du couple (fig. 20).

48. **Théorème général des moments.** — 1° *Définitions.* Nous définirons les *moments par rapport à un point* et *les moments par rapport à un axe.*

I. Le *moment d'une force par rapport à un point* est une quantité algébrique qui est égale, en valeur absolue, au *produit de la force par la distance du point à cette force.*

Si F est la force, O le point et OA la distance, la valeur absolue du moment est $F \times OA$. Pour une autre force telle que F′, la valeur absolue sera $F' \times OA'$ (fig. 21). Les distances OA, OA′ sont appelées *bras de levier* des forces F et F′. Le moment est positif ou négatif, suivant que la force tend à entraîner son bras de levier dans un sens ou dans l'autre. Si, par exemple, on donne le signe + au moment de F, celui de F′ aura nécessairement le signe —.

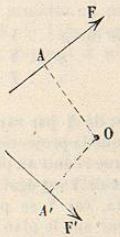

Fig. 21.

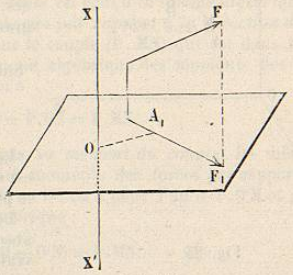

Fig. 22.

II. Le *moment d'une force par rapport à un axe* est le moment de la projection de cette force sur un plan perpendiculaire à l'axe par rapport au point où l'axe perce le plan.

Soient XX′ l'axe et F la force (fig. 22); si O est le pied de l'axe sur un plan perpendiculaire et F_1 la projection de la force, en abaissant la perpendiculaire OA_1 on a pour le moment de la force $F_1 \times OA_1$. Comme c'est, en somme, un moment par rapport à un point, la convention des signes s'y applique. Le moment est positif ou négatif, suivant que la projection F_1 tend à entraîner son bras de levier OA_1 dans un sens ou dans l'autre.

2° Théorème général. — *Le moment de la résultante est égal à la somme algébrique des moments des composantes.*

Le théorème s'applique également bien à un système de forces concourantes et à un système de forces parallèles, soit qu'on prenne leurs moments par rapport à un point de leur plan, soit qu'on les prenne par rapport à un axe quelconque.

3° *Conséquence.* — La somme algébrique des moments d'un système de forces est évidemment *nulle*, soit *quand la résultante passe par le centre des moments*, soit *quand elle rencontre l'axe des moments;* car, dans l'un ou l'autre cas, le bras de levier de la force ou celui de sa projection se réduit à zéro.

49. **Expression analytique des moments d'une force par rapport à trois axes rectangulaires.** — Soit F une force appliquée en un point A dont la position est déterminée par rapport à trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz. Soient x, y, z les coordonnées du point A; α, β, γ les angles de la force avec Ox, Oy, Oz (fig. 23).

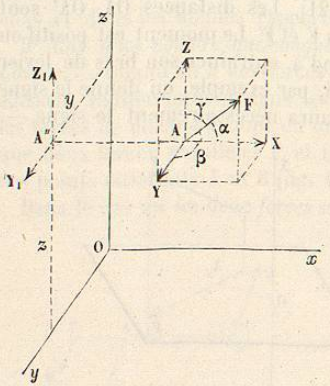

Fig. 23.

Le moment de F par rapport à l'axe Ox est égal à la somme des moments des trois composantes de F, suivant les trois axes de coordonnées. En construisant le parallélépipède des forces, on a ces trois composantes en grandeur et en direction. Ce sont :

Suivant l'axe des x ... $X = F \cos \alpha$,
— y ... $Y = F \cos \beta$,
— z ... $Z = F \cos \gamma$.

Le moment de X par rapport à Ox est nul, puisque la projection de X sur le plan des yz se réduit au point A''.

Le moment de Y est égal, en valeur absolue, à Yz, car Y se projette en vraie grandeur sur le plan des yz qui lui est parallèle, et la distance de sa projection au pied O de l'axe est précisément égale au z du point O. Quant au signe de ce moment, on le détermine en appliquant ici une convention générale. *Supposons un observateur placé le long de l'axe et les pieds en O : si la projection de la force sur le plan tend à entraîner son bras de levier dans le sens direct, c'est-à-dire de la gauche vers la droite de l'observateur, le moment sera positif; il sera négatif dans le cas contraire.* Ici le moment de Y est donc $-zY$. De même le moment de Z sera $+yZ$. Donc enfin le moment L de la force F par rapport à l'axe des x sera

$$L = yZ - zY.$$

En raisonnant de la même manière, on trouvera que

le moment par rapport à l'axe des y . . . $M = zX - xZ$;
— — z . . . $N = xY - yX$.

Remarque. — Ces deux derniers moments peuvent se déduire du premier par un procédé mnémonique simple, qui consiste à substituer aux lettres y et Z les autres lettres similaires dans l'ordre suivant : x, y, z et X, Y, Z.

50. **Composition des couples.** — 1° *Définitions.* — Nous avons défini plus haut (47, 5°) le *couple*, son *bras de levier* et son *moment*.

Axe d'un couple. — On appelle *direction de l'axe d'un couple* la perpendiculaire à son plan élevée par le milieu de son bras de levier. En prenant sur cette direction une longueur proportionnelle au moment du couple et en l'armant d'une flèche à l'une de ses extrémités, pour indiquer le sens de la rotation, on pourra représenter un couple en grandeur et en direction par une seule droite, tout comme une simple force. C'est cette droite, caractéristique du couple, qui s'appelle l'*axe du couple*. Ainsi la droite OA (fig. 24) représente, en grandeur et en direction, un couple situé dans le plan perpendiculaire en O à OA et ayant un moment exprimé par le même nombre que la longueur OA.

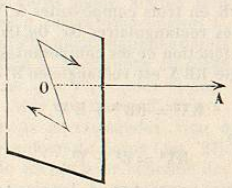

Fig. 24.

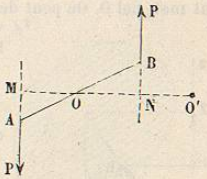

Fig. 25.

Remarque. — *Le moment d'un couple est égal à la somme algébrique des moments des forces du couple pris chacun par rapport à la direction de son axe.* — L'axe se projette au point O pour le couple (P . MN) qui est dans le plan de la figure 25. Si l'on prend la somme algébrique des moments des forces du couple par rapport à son axe, on a

$$P.OM + P.ON = P.MN;$$

cette somme est précisément égale au *moment du couple*. De même, si l'on prend cette somme algébrique des moments des forces par rapport à un axe parallèle à l'axe O et se projetant en O', on a pour l'un $+P.O'M$ et pour l'autre $-P.O'N$ et pour la somme algébrique :

$$P.(O'M - O'N) = P.MN.$$

2° *Translation et transformation des couples. — Un couple quelconque peut toujours être remplacé par un autre de même sens, situé dans le même plan ou dans un plan parallèle, et ayant même moment.*

3° *Composition d'un nombre quelconque de couples. — On transporte leurs axes parallèlement à eux-mêmes, de manière qu'ils aient tous leur origine en un même point du corps, et l'on compose ces axes comme un système de forces concourantes : la résultante ainsi obtenue sera, en grandeur et en direction, l'axe du couple résultant.*

En effet, d'après ce qui précède sur la translation des couples et sur leur représentation graphique par leurs axes, toutes les règles de composition relatives aux forces concourantes peuvent s'appliquer aux axes des couples. Un nombre quelconque de couples appliqués à un corps solide aura donc toujours un *couple résultant*. L'axe de ce couple résultant sera déterminé dans chaque cas, soit par la règle du parallélogramme, soit par la règle du parallélépipède, soit par celle du polygone.

51. **Équilibre des forces appliquées à un point matériel.** — Lorsqu'on applique la règle du polygone pour composer un système de forces concourantes en un point matériel, et que le polygone des forces *se ferme tout seul*, il en résulte que le côté OR (fig. 16) qui représente la résultante se réduit à zéro : donc la résultante est nulle. On dit alors que *le point matériel est en équilibre sous l'influence du système des forces concourantes.*

Conditions d'équilibre. — Il faut et il suffit que la somme des projections des forces sur trois axes rectangulaires soit nulle pour chacun des axes. Cela fait trois équations d'équilibre.

En effet, soit R la résultante d'un système quelconque de forces appliquées au point matériel O. On peut décomposer R en trois composantes X, Y, Z, suivant les axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. — Évaluons R en fonction de ses composantes (fig. 26).

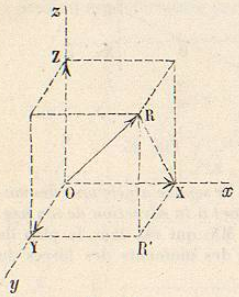

Fig. 26.

Le triangle RR'X est rectangle en R' et donne

$$RX^2 = RR'^2 + R'X^2,$$

c'est-à-dire

$$RX^2 = Z^2 + Y^2;$$

de même, le triangle OXR est rectangle en X et donne

$$R^2 = OX^2 + RX^2$$

ou, en remplaçant OX et RX par leurs valeurs,

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Pour que $R = 0$, on doit avoir séparément

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Or X, étant la projection de la résultante sur l'axe des X, est égal à la somme des projections des composantes sur le même axe (théorème des projections). De même pour Y; de même pour Z.

52. **Équilibre des couples appliqués à un corps solide libre.** — Dans le cas général d'un système de couples *situés dans des plans quelconques*, les conditions d'équilibre sont les mêmes que celles d'un système de forces concourantes en un point matériel. Il faut exprimer que l'*axe résultant* ou que le moment résultant est nul, et par conséquent que les projections de cet axe sur trois axes de coordonnées rectangulaires sont nulles pour chacun des axes. Donc, *pour qu'un système de couples quelconques se fasse équilibre sur un corps solide, il faut et il suffit que la somme des projections des axes des couples sur trois axes de coordonnées rectangulaires soit nulle pour chacun de ces axes.*

Comme la longueur de l'axe d'un couple représente la grandeur du moment du couple, et comme le moment du couple est égal lui-même à la somme algébrique des moments des forces du couple pris par rapport à une droite parallèle à l'axe du couple, on peut énoncer autrement la condition d'équilibre des couples :

Pour qu'un système de couples quelconques se fasse équilibre sur un corps solide, il faut et il suffit que la somme des moments des forces des couples pris par rapport à trois axes rectangulaires soit nulle pour chacun de ces axes.

Cela donne trois conditions d'équilibre, quel que soit l'énoncé qu'on adopte, comme dans le cas d'un système de forces concourantes.

Cas particulier. — Les couples sont dans un même plan ou dans des plans parallèles. — Les trois conditions se réduisent à une seule. En effet, tous les axes de ces couples étant parallèles, leur composition revient à celle de forces parallèles mais de sens différents, appliquées en un même point : l'*axe résultant* est égal à la somme algébrique des *axes composants*. Il n'y a donc, pour ces couples, qu'une seule condition d'équilibre : *la somme algébrique des moments de leurs forces, par rapport à une droite perpendiculaire à leur plan, doit être nulle.*

53. **Équilibre des forces appliquées à un corps solide libre.** — 1° *Réduction des forces. — Un système de forces quelconques sollicitant un corps solide libre peut toujours se réduire soit à deux forces distinctes, dont l'une passe par un point arbitraire du corps, soit à une force et à un couple, l'une des composantes du couple passant par le même point que la force.*

Soit un corps solide auquel sont appliquées n forces quelconques F, F', F''... Par l'un quelconque des points d'application A, appliquons au corps deux forces (F'_1, F'_2) égales et contraires à l'une des forces F' du système : nous ne changeons rien à l'état mécanique du corps (fig. 27). Faisons de même pour chacune des forces du système. Nous finirons par remplacer celui-ci par un autre système, composé : 1° de n forces concourantes appliquées au point A, égales et parallèles respectivement aux forces du système ; 2° de $(n-1)$ couples, formés chacun comme il a été dit.

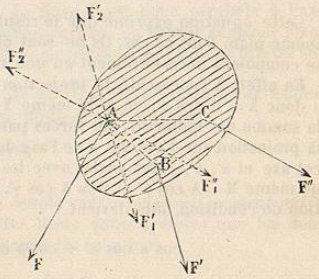

Fig. 27.

D'une part les forces concourantes ont une résultante R, et d'autre part les couples, dont les plans ont tous un point commun, ont également un couple résultant unique (S, S') dont le plan contient aussi le point A.

On voit qu'on pourrait encore réduire ces trois forces à deux, en composant les deux forces R et S' qui concourent au point A (fig. 28).

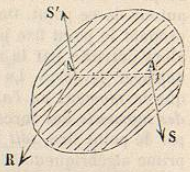

Fig. 28.

2° *Conditions générales d'équilibre.* — Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un corps solide libre soit en équilibre sous l'influence d'un système de forces sont :

I. *Que la somme des projections des forces sur trois axes rectangulaires soit nulle pour chacun d'eux.*

II. *Que la somme des moments des forces par rapport à trois axes rectangulaires soit nulle pour chacun de ces axes.*

En effet, il faut et il suffit que la résultante R et le couple (S, S') soient nuls séparément, car dans aucun cas une force unique ne peut faire équilibre à un couple (fig. 28).

Or, pour que R soit nul, il faut et il suffit que ses trois composantes X, Y, Z, suivant Ox, Oy et Oz soient nulles, et chacune de ces composantes est égale à la somme des projections des forces suivant l'axe correspondant. De là les trois premières conditions d'équilibre :

$$[1] \qquad X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Pour que le couple (S, S') soit nul, il faut et il suffit que ses couples composants dans les trois plans coordonnés aient des moments nuls séparément. Or le couple composant qui est situé dans le plan des yz a précisément pour moment (à un facteur constant près) la somme des moments des forces du système par rapport à l'axe des x (50, 1°); de même pour les deux autres couples composants. De là les trois autres équations d'équilibre :

$$[2] \qquad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

en posant

$$L = \Sigma\,(yZ - zY), \qquad M = \Sigma\,(zX - xZ), \qquad N = \Sigma\,(xY - yX).$$

3° *Condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une résultante unique.* — Elle est

$$LX + MY + NZ = 0.$$

Cette équation exprime que la résultante R et le couple (S, S') sont dans un même plan. Dans ce cas, ils ne sont plus distincts et les trois forces (R, S, S') se composent nécessairement en une résultante unique.

En effet, X représente la projection sur l'axe des x de la résultante R; on a donc $X = R \cos \alpha$; on a de même $Y = R \cos \beta$ et $Z = R \cos \gamma$. De plus L est la somme des moments des forces par rapport à l'axe des x; c'est donc aussi la projection sur l'axe des x de l'axe du couple résultant (S, S'). En appelant A cet axe et α', β', γ' ses angles avec les axes coordonnés, on aura $L = A \cos \alpha'$; de même $M = A \cos \beta'$ et $N = A \cos \gamma'$. En substituant ces valeurs dans l'équation de condition, elle devient

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0.$$

Elle exprime que l'axe du couple est perpendiculaire à la force, et, par suite, que celle-ci est parallèle au plan du couple : comme elle a un point commun avec lui, elle est dans le même plan.

54 **Équilibre des forces appliquées à un corps solide gêné.** — On dit qu'un corps solide est *gêné*, lorsqu'il est assujetti à certaines liaisons qui l'empêchent de se déplacer librement dans toutes les directions.

1° *Corps mobile autour d'un point fixe.* — Dans le cas où l'un des points du corps est fixé invariablement, le corps est nécessairement assujetti à tourner autour de ce point. On peut alors opérer la réduction du système de forces en prenant le point fixe pour origine de la résultante unique R : celle-ci se trouve alors détruite par la résistance du point. Reste le couple (S, S') qui seul peut déplacer le corps. La condition d'équilibre nécessaire et suffisante est donc que *le moment* ou *l'axe du couple résultant soit nul*, ou bien que *la somme des moments* des forces, pris par rapport à trois axes rectangulaires passant par le point fixe, *soit nulle pour chacun de ces axes.* — Cette condition s'exprime algébriquement par les trois équations [2] :

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0.$$

2° *Corps mobile autour d'un axe fixe.* — Dans le cas où deux points du corps sont fixés invariablement, le corps ne peut prendre d'autre mouvemen qu'un mouvement de rotation autour de l'axe fixe, déterminé par ces deux points.

Prenons pour origine des coordonnées un point O de l'axe fixe, et pour axe des z cet axe fixe lui-même. On voit, d'une part, que la force résultante R sera détruite par la résistance de l'axe; d'autre part que, sur les trois couples

composants du couple résultant (S, S'), ceux qui sont dans le plan des yz et dans le plan des xz sont également annulés par la résistance de l'axe, car on peut amener le bras du levier de chacun d'eux à coïncider avec l'axe des z. — Reste le couple situé dans le plan des xy, et dont l'axe est parallèle à Oz. La condition d'équilibre nécessaire et suffisante est donc que *le moment* ou *l'axe de ce couple soit nul*, c'est-à-dire que *la somme des moments des forces, pris par rapport à l'axe fixe, soit nulle.* Cette condition s'exprime par la seule équation $N = 0$.

55. **Équilibre d'un système quelconque de forces parallèles appliquées à un corps solide libre.** — En appliquant à ce cas la méthode générale de réduction des forces, on arrive à une force résultante R, égale à la somme *algébrique* des forces, et à un couple résultant (S, S') dont les forces et, par suite, le plan sont parallèles à la force R. L'axe du couple résultant est donc, dans ce cas, perpendiculaire à la force R. Que deviennent les équations d'équilibre?

Supposons qu'on ait pris l'un des axes de coordonnées, par exemple l'axe des x, parallèle à la direction des forces. La force R est donc parallèle à l'axe des x; l'axe du couple (S, S') lui est perpendiculaire, on peut le supposer placé dans le plan des yz. Il faut exprimer que les projections de ces deux droites sur les axes sont nulles pour chacun d'eux.

Or les projections Y et Z de R sur Oy et Oz sont *identiquement nulles* puisque R est perpendiculaire à Ox et Oy. Reste donc l'équation

$$[1] \qquad X = 0,$$

avec cette particularité que $X = R$.

De même la projection L de l'axe du couple sur Ox est *identiquement nulle*, puisque cet axe est perpendiculaire à Ox. Reste donc à écrire que les deux autres projections sont nulles, ce qui donne les équations

$$[2] \qquad M = 0 \quad \text{et} \quad N = 0,$$

avec cette particularité que la première de ces deux équations se réduit à $\Sigma\,(zX_1) = 0$ et la deuxième à $\Sigma\,(yX_1) = 0$, puisque les termes en xZ_1 et yZ_1 sont *identiquement nuls.*

56. **Détermination du centre des forces parallèles.** — Dans le cas d'un système quelconque de forces parallèles, si les équations précédentes ne sont pas satisfaites, c'est qu'il y a une résultante unique R, appliquée en un point A (fig. 29), qui est le *centre des forces parallèles.* Nous pouvons déduire du cas d'équilibre un moyen simple de déterminer ce point.

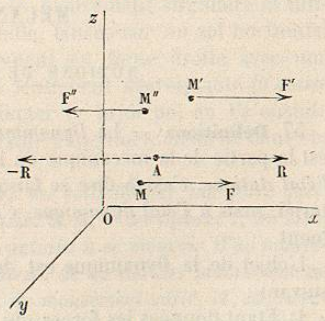

Fig. 29.

Reprenons le système d'axes précédent, l'axe des x étant parallèle aux forces F, F', F''.... Si nous appliquons en A une force (—R) égale et opposée à R, le système F, F', F''... (—R) formera un système de forces parallèles *en équilibre*, auquel nous pourrons appliquer les équations précédentes. Soient a, b, c les coordonnées inconnues du point A et x, y, z, x', y', z'... celles des points M, M'.. auxquels les forces parallèles sont appliquées. L'équation [1] détermine la

grandeur de la résultante R, puisqu'elle donne

$$X - R = 0,$$

d'où

$$R = X = F + F' + F'' + \ldots = \Sigma (F).$$

Les équations [2] donnent successivement

$$\Sigma (zX_1) - cR = 0, \quad \text{d'où} \quad cR = Fz + F'z' + \ldots = \Sigma (Fz),$$
$$\Sigma (yX_1) - bR = 0, \quad \text{d'où} \quad bR = Fy + F'y' + \ldots = \Sigma (Fy).$$

Ces trois équations déterminent déjà deux des coordonnées inconnues. Pour obtenir la troisième, il suffit de remarquer que le centre des forces parallèles ne change pas de position quand on vient à changer la direction de toutes les forces sans modifier leurs rapports de grandeur. Or, si nous amenons toutes les forces à être parallèles à l'axe des z, nous pourrons écrire de même

$$\Sigma (xZ_1) - aR = 0, \quad \text{d'où} \quad aR = xF + x'F' + \ldots = \Sigma (Fx).$$

En résumé, les coordonnées du centre des forces parallèles sont fournies par les trois équations :

$$aR = \Sigma (Fx),$$
$$bR = \Sigma (Fy),$$
$$cR = \Sigma (Fz),$$

R étant déterminé par l'équation

$$R = \Sigma (F).$$

CHAPITRE V

MÉCANIQUE

NOTIONS DE DYNAMIQUE

57. **Définitions.** — La *Dynamique* (de δύναμις, puissance, force) est la partie de la mécanique où l'on étudie les forces, non plus *à l'état statique*, c'est-à-dire se faisant équilibre sur un système matériel, mais *à l'état dynamique*, c'est-à-dire produisant le mouvement.

L'objet de la Dynamique est de résoudre le double problème suivant :

1° Étant données les forces qui agissent sur un corps, déterminer le mouvement de ce corps.

2° Étant donné le mouvement d'un corps, déterminer les forces qui agissent actuellement sur ce corps.

C'est là l'objet même de la Mécanique. On peut dire que la Dynamique est la partie essentielle de cette science, tandis que la Cinématique et la Statique n'en sont que les préliminaires.

La dynamique est fondée sur trois principes généraux, sortes de *postulats*, qu'on a tirés, par induction, de l'observation de certains faits naturels, et qu'on vérifie par l'expérience dans leurs conséquences pratiques. Ce sont :

1° Le *principe de l'inertie*, dont la première idée est due à Képler;

2° Le *principe du mouvement relatif*, énoncé par Galilée ;

3° Le *principe de l'égalité de l'action et de la réaction*, découvert par Newton.

Nous avons dû énoncer plus haut les deux premiers; mais nous les répéterons ici, en y ajoutant leurs conséquences immédiates.

58. **Principe de l'inertie.** — 1° *Un corps ne peut rien changer de lui-même à son état de repos ni à son état de mouvement.*

2° *Si un corps libre n'est sollicité par aucune force, ce corps est en repos, ou bien il est animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme.*

La première proposition est le seul énoncé qu'on donne souvent du principe de l'inertie. Cependant elle ne constitue pas, à proprement parler, un principe; elle ne fait qu'exprimer, sous une forme nouvelle, l'existence de cette propriété essentielle de la matière que nous avons déjà définie sous le nom d'*inertie*. La seconde partie de l'énoncé, au contraire, est un véritable postulat. Rien ne pouvait faire deviner *à priori* que le *mouvement naturel* des corps est le mouvement rectiligne et uniforme; on a même longtemps cru que c'était le mouvement circulaire et uniforme. Mais le seul fait d'une bille, lancée sur un sol horizontal bien uni, qui se meut sensiblement en ligne droite avec une vitesse, non pas constante, mais lentement décroissante (à cause du frottement), a suffi pour indiquer ce principe; on l'a ensuite généralisé par induction, puis vérifié expérimentalement dans ses conséquences.

Corollaire. — *Si un corps libre est sollicité par une force quelconque, il prend un mouvement varié; et si, à un instant* t, *on vient à supprimer la force, le corps continue à se mouvoir d'un mouvement rectiligne et uniforme : la vitesse de ce dernier mouvement est précisément la vitesse à l'instant* t *du mouvement varié, et sa direction est celle de la tangente à la trajectoire au point où le corps se trouvait à l'instant* t.

On peut aisément démontrer l'identité de ces deux vitesses. En effet, soit Δs