liées par l'équation des vitesses

$$V = g'\theta.$$

En éliminant θ entre ces deux équations, on a

$$V^2 = 2g'l.$$

En remplaçant g' par sa valeur en fonction de g et l par sa valeur en fonction de h, il vient

$$V^2 = 2gh, \qquad \text{d'où} \qquad V = \sqrt{2gh}.$$

On reconnaît la formule qui exprime, en fonction de l'espace parcouru, la vitesse acquise par un corps qui est tombé librement dans le vide, de la hauteur h.

Corollaires. — I. Si on laisse tomber sans vitesse initiale divers points matériels sur divers plans inclinés SA, SA′, SA″... issus d'une même origine S (fig. 78), tous ces mobiles auront acquis la même vitesse en arrivant au plan horizontal. Cette vitesse sera précisément égale à celle d'un point matériel qui serait tombé librement suivant la verticale SO, d'une hauteur égale à celle de ces divers plans inclinés.

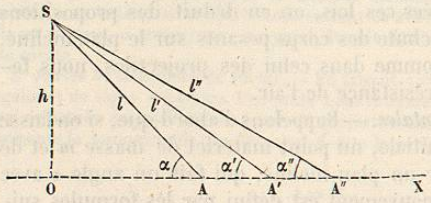

Fig. 78.

II. La vitesse acquise au bas d'un plan incliné est donc indépendante de l'inclinaison du plan (du moins en grandeur, car sa direction est celle même du plan; elle est α sur le plan SA, α' sur SA′, etc.).

3° *Durée de la chute.* — La durée de la chute sur un plan incliné dépend essentiellement de la longueur du plan.

Pour des plans de même hauteur h, *les durées de descente du mobile sont proportionnelles aux longueurs des plans* l, l′, l″... (fig. 78).

En effet, la longueur l et la durée de descente θ sont liées par l'équation

$$l = \frac{1}{2} g'\theta^2.$$

En remplaçant g' par sa valeur $g \sin \alpha$ et $\sin \alpha$ par sa valeur $\frac{g}{l}$,

il vient

$$l = \frac{1}{2} \frac{gh}{l} \theta^2, \qquad \text{d'où l'on tire} \qquad \theta = l\sqrt{\frac{2}{gh}}.$$

4° *Lieu des positions occupées à l'instant* t *par divers mobiles lâchés simultanément sur divers plans inclinés, issus de la même origine.*

Ce lieu est la surface d'une *sphère* ayant pour *diamètre* le chemin parcouru par un mobile *qui tomberait librement suivant la verticale du point origine.*

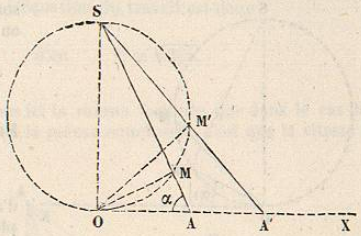

Fig. 79.

En effet, considérons d'abord le mouvement dans l'un quelconque des azimuts menés par la verticale SO (fig. 79). Soit M la position qu'occupe un des mobiles sur l'un des plans SA, au bout du temps t. Le plan SA est défini par son inclinaison α sur l'horizontale, et le temps t par la position O de celui des mobiles qui tombe librement. On a donc

$$\text{d'une part} \quad SO = \frac{1}{2} g t^2, \qquad \text{d'autre part} \quad SM = \frac{1}{2} g' t^2.$$

Or g' est égal à $g \sin \alpha$; et comme l'angle α est complémentaire de l'angle ASO, on a

$$\sin \alpha = \cos ASO.$$

En remplaçant g' et $\sin \alpha$ par ces valeurs, il vient

$$SM = \frac{1}{2} g t^2 \cos ASO,$$

et, en remplaçant $\frac{1}{2} g t^2$ par SO,

$$SM = SO \cos ASO.$$

Cette dernière égalité prouve que la longueur SM est la projection de la longueur SO, et que, par suite, la ligne OM est perpendiculaire sur SM.

On prouverait de même que la ligne OM′ qui joint le point O à la position qu'occupe un autre mobile sur un autre plan incliné, au bout du même temps est aussi perpendiculaire à SM′. Donc les points M, M′..., sont sur une demi-circonférence ayant SO pour diamètre.

Tout étant symétrique par rapport à la verticale SO, le lieu dans l'espace est évidemment une sphère ayant comme méridienne la demi-circonférence SMO.

Corollaire. — Les cordes MO, M′O, ... SO sont des lignes *tautochrones* (de ταὐτό, le même, et χρόνος, temps).

Cela veut dire que si on lâche en même temps divers mobiles sur les plans inclinés MO, M′O,... SO, définis d'après le théorème précédent, ces mobiles arriveront en même temps au point O: ces lignes seront donc *parcourues dans le même temps* (fig. 80).

En effet, on a d'abord l'équation

$$SO = \frac{1}{2} g \theta^2,$$

qui définit la durée θ de la descente. On en tire

$$\theta^2 = \frac{2\,SO}{g}.$$

Le mobile qui est lâché suivant MO parcourt un plan incliné dont l'inclinaison est $MOX = \alpha_1$ (fig. 80). Appelons provisoirement θ' la durée de la descente : on a évidemment

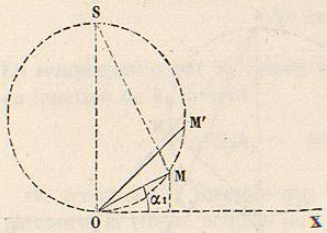

Fig. 80.

$$[1] \qquad MO = \frac{1}{2} g' \theta'^2.$$

Mais, d'une part, on a

$$g' = g \sin \alpha_1 = g \sin MOX;$$

d'autre part, l'angle MOX étant complémentaire de SOM,

$$MO = SO \cos SOM = SO \sin MOX.$$

En remplaçant MO et g' par ces valeurs dans l'équation [1], il vient

$$SO \,.\, \sin MOX = \frac{1}{2} g \,.\, \sin MOX \,.\, \theta'^2, \qquad \text{d'où} \qquad \theta'^2 = 2\frac{SO}{g} = \theta^2.$$

La durée de descente est donc la même pour le point M que pour le point lâché en S, en chute libre. Il en sera de même pour tout autre point M', lâché suivant M'O.

94. **Mouvement d'un point matériel pesant sur une courbe.** — 1° *Définition.* — Le point matériel, au lieu de tomber sur un plan incliné, peut être assujetti à se mouvoir sur une courbe plane et verticale, telle que AMB. La chute, dans ce cas, est produite, comme dans le cas du plan incliné, par une force accélératrice tangentielle, égale à $p \sin \alpha$ (fig. 81) ; mais ici l'angle α est variable avec le point considéré : il est α_0 au point de départ ; il est α au point M ; donc la force accélératrice est variable en grandeur comme en direction : elle est p'_0 $(= p \sin \alpha_0)$ au départ, et p' $(= p \sin \alpha)$ *à l'instant* t. Le mouvement n'est donc plus uniformément varié : c'est un mouvement varié quelconque, avec cette restriction toutefois que la cause première de la chute, c'est-à-dire le poids du mobile, *reste constamment parallèle à la verticale* A'Z.

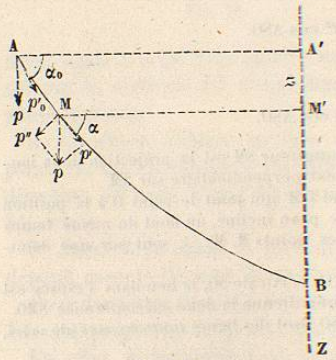

Fig. 81.

2° *Vitesse à l'instant* t. — Cette remarque va nous permettre de trouver la vitesse v du mobile à l'instant t, aussi simplement que dans le cas du plan incliné. Appliquons en effet le théorème du travail et des forces vives. En supposant que le point matériel ait été lâché sans vitesse initiale, son accroissement de force vive à l'instant t est $\frac{1}{2} m V^2$.

Quant au travail effectué par la force accélératrice variable p' pendant le même intervalle de temps, il est précisément égal au travail développé par le poids p, car ce poids est à chaque instant la résultante de deux forces, la composante normale p'', dont le travail est nul, et la composante tangentielle p'. Or on sait que le travail d'une force, telle que p, qui est constante en direction, est égal au produit de la force par le chemin parcouru, parallèlement à sa direction. Soit z la variation de niveau A'M', le travail est égal à pz ou à mgz (si l'on remplace p par sa valeur mg). L'équation du travail est donc

$$\frac{1}{2} m V^2 = mgz, \qquad \text{d'où} \qquad V = \sqrt{2gz}.$$

3° *Conséquence.* — Nous retrouvons ici la même formule que dans le cas du plan incliné, et si elle nous conduit à la même conclusion, c'est que la vitesse à l'instant t, sur la courbe, ne dépend nullement du chemin réellement parcouru par le mobile, mais seulement de sa variation de niveau. Il en résulte qu'une des propriétés mécaniques du plan incliné peut se généraliser de la manière suivante : *Si l'on imagine différentes lignes, droites ou courbes,* AB, AB_1..., AC, AC_1..., *issues d'un point* A (fig. 82), *et qu'on lâche en même temps de ce point des mobiles sur toutes ces lignes, ils auront tous la même vitesse* $(V = \sqrt{2gh})$, *quand ils passeront, chacun sur sa trajectoire, par un même plan horizontal* BB'.

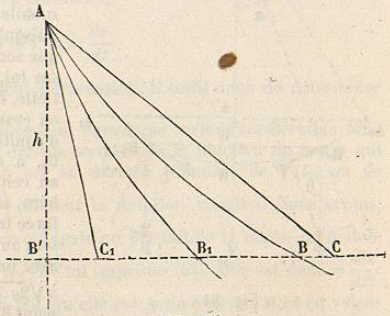

Fig. 82.

4° *Mouvement oscillatoire.* — Cette propriété est indépendante de la forme de la courbe et du chemin que le mobile a parcouru sur cette courbe : la vitesse du mobile à chaque instant est déterminée par la distance verticale de sa position actuelle à l'origine du mouvement. Par exemple, si la courbe A_0HA_1 possède une branche ascendante B_1A_1 reliée à la branche descendante A_0B_0 par un arc continu B_0HB_1 (fig. 83), le mobile, lâché au point A_0, possédera au point B et au point B_1, situés sur la même horizontale, des vitesses égales à $\sqrt{2gh}$, mais de signes contraires. Comme il était parti du point A_0 avec une vitesse nulle, il remontera jusqu'au point A_1, situé la même horizontale, avant de perdre complètement la vitesse qu'il avait acquise en tombant du point A_0 jusqu'au point H. Arrivé au point A_1, il retombera sur la courbe dans le sens A_1B_1 et remontera jusqu. en A_0, pour retomber de nouveau, et recommencer indéfiniment ce mouvement de va-et-vient, qui est le type de ce qu'on appelle le *mouvement oscillatoire.* En vertu du principe de la conser-

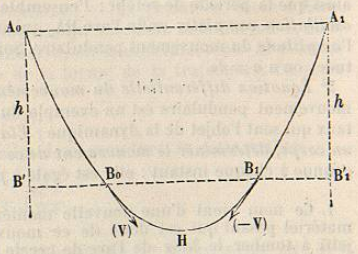

Fig. 83.

vation de l'énergie, ce mouvement oscillatoire d'un corps pesant, une fois commencé, ne devrait plus s'arrêter, à la condition qu'il eût lieu dans le vide, et à l'abri de toute action retardatrice.

95. **Mouvement pendulaire.** — 1° *Définition.* — La trajectoire d'un mouvement oscillatoire peut être un arc de courbe quelconque, orienté d'une manière quelconque par rapport à la verticale du point le plus bas. Lorsque la trajectoire est *un arc de cercle, orienté symétriquement par rapport à la verticale de son point le plus bas*, le mouvement oscillatoire est appelé *mouvement pendulaire*[1] (fig. 84).

2° *Périodicité du mouvement.* — Le point matériel pesant se trouve dans les mêmes conditions mécaniques que précédemment (94) et prend le même mouvement : c'est un *mouvement oscillatoire*, symétrique par rapport au diamètre vertical OH (fig. 84).

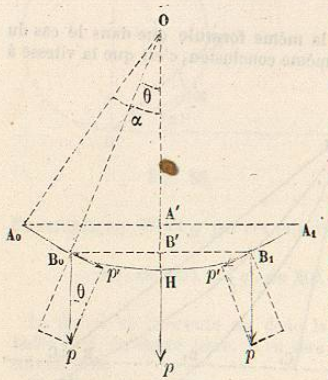

Fig. 84.

Si la position initiale est le point H, le mobile y restera indéfiniment en repos, puisqu'il n'a pas de vitesse acquise et que son poids p, seule force qui agisse sur lui, n'a pas de composante tangentielle, étant normal à la trajectoire. Si on écarte le mobile de cette position d'équilibre et qu'on le pose en un point B_0, à une distance définie par l'angle au centre θ ($= HOB_0$), le mobile tombera, sous l'action accélératrice de la force tangentielle p' ($= p \sin \theta$) ; il passera au point le plus bas de la courbe avec une vitesse acquise V qui est égale à $\sqrt{2g.B'H}$, et remontera jusqu'en un point B_1 exactement symétrique de B par rapport à la verticale du point H (94). Du point B_1 il retombera vers le point H, puis remontera jusqu'en B_0 ; le mouvement recommencera alors dans les mêmes conditions qu'au début, et continuera indéfiniment de la même manière, en vertu du principe de la conservation de l'énergie.

Soit A_0 l'origine du mouvement oscillatoire, ce point étant défini sur le cercle par l'arc HA_0, lequel mesure l'angle au centre $HOA_0 = \alpha$. La période d'aller entre le point A_0 et le point symétrique A_1 s'appelle une *oscillation simple*, ainsi que la période de retour ; l'ensemble de ces deux périodes s'appelle une *oscillation complète;* enfin l'arc HA_0 qui mesure l'angle au centre α, s'appelle l'*amplitude* du mouvement pendulaire. Soit l le rayon du cercle, et a l'amplitude, on a $a = l\alpha$.

3° *Équation différentielle du mouvement.* — La recherche des équations du mouvement pendulaire est un exemple du premier des problèmes fondamentaux qui sont l'objet de la dynamique : *Étant données les forces qui agissent sur un corps, déterminer le mouvement de ce corps.* Ici la force accélératrice est connue à chaque instant : elle est égale à $p \sin \theta$ (ou $mg \sin \theta$). La trajectoire est

1. Ce nom vient d'une nouvelle manière de concevoir la liaison du point matériel pesant qui est doué de ce mouvement. Au lieu de le supposer assujetti à tomber le long de l'arc de cercle vertical A_0HH_1, on peut le supposer suspendu, dans un plan vertical, à l'une des extrémités d'un fil A_0O, *inextensible et sans poids*, dont l'autre extrémité serait attachée au centre du cercle et dont la longueur serait, par suite, égale au rayon du cercle : cet appareil *idéal* s'appelle en mécanique *pendule simple* ou *pendule idéal*.

également connue : c'est l'arc de cercle A_0HA_1. Il s'agit de trouver l'équation des vitesses et l'équation des espaces, c'est-à-dire les relations qui donnent l'espace parcouru et la vitesse du mobile à un instant quelconque t, et en un point quelconque B_0 de sa trajectoire. Ces équations suffiront pour déterminer tous les éléments du mouvement. Nous en déduirons une troisième équation, particulièrement intéressante dans le cas d'un mouvement périodique, parce qu'elle donne la *durée* d'une période, c'est-à-dire d'une oscillation simple.

Comptons les espaces sur la courbe A_0H, suivant l'usage, à partir du point H, milieu de la trajectoire, et comptons les temps à partir de l'instant où le mobile tombe du point A_0, origine de la trajectoire, avec une vitesse nulle.

Soit S la distance HB_0. L'équation des espaces est de la forme

$$[1] \qquad S = f(t),$$

$f(t)$ étant une fonction du temps t, qu'il s'agit de déterminer. L'équation des vitesses est aussi une fonction du temps, laquelle est, comme on sait, la dérivée de la fonction précédente. On aura donc

$$[2] \qquad V = f'(t) = \frac{ds}{dt}$$

(suivant la notation usitée en calcul différentiel). Il suffit donc de déterminer la fonction $S = f(t)$.

Or nous savons que, dans le mouvement curviligne varié, l'accélération tangentielle est $f''(t)$, c'est-à-dire la dérivée seconde de la fonction du temps qui représente l'espace (39) ; or $f''(t)$ est la dérivée première de $f'(t)$, ou de $\left(\frac{ds}{dt}\right)$; elle est donc égale à $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$ (suivant la notation usuelle). Nous savons, d'autre part, que la force motrice est égale au produit de la masse du mobile par l'accélération du mouvement qu'elle lui imprime (63). Elle est donc $m\frac{d^2s}{dt^2}$. Quant à la force accélératrice, on sait qu'elle est $p \sin \theta$ ou $mg \sin \theta$ en valeur absolue, et $-(mg \sin \theta)$ en tenant compte de son sens, qui est opposé à celui des espaces croissants. On peut donc écrire l'équation suivante :

$$-mg \sin \theta = m\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = -g \sin \theta.$$

C'est ce qu'on appelle l'*équation différentielle du mouvement.* Il ne reste plus qu'à appliquer à la résolution de cette équation les règles du calcul intégral pour arriver à la solution de notre problème de dynamique.

4° *Intégration de l'équation différentielle.* — La première chose à faire, c'est de n'avoir dans l'équation différentielle qu'une seule fonction (ou S, ou θ) de la variable t. Il est facile d'en éliminer S, en faisant intervenir la relation géométrique entre S et θ, qui résulte de la forme de la trajectoire. On a, en effet (fig. 84),

$$S = l\theta,$$

d'où l'on déduit, en dérivant deux fois les deux membres de cette égalité,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Portons cette valeur dans l'équation différentielle du mouvement : elle devient

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin \theta.$$

C'est sous cette forme qu'on la résout le plus commodément. Quand on connaîtra θ en fonction de t, il sera facile d'en déduire la fonction

$$S = l\theta.$$

Il y a deux cas à considérer dans la résolution de cette équation :

I. Le cas particulier des *petites oscillations :* le point matériel exécute, de part et d'autre de sa position d'équilibre, des oscillations d'amplitude assez petite pour qu'on puisse substituer l'angle θ lui-même à son sinus. L'équation différentielle en est notablement simplifiée et devient alors

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta.$$

II. Le cas général des *oscillations d'amplitude quelconque*, auquel correspond l'équation générale

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta.$$

5° *Équations du mouvement pendulaire dans le cas des petites oscillations.* En appliquant les règles ordinaires du calcul intégral à la résolution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta,$$

on en déduit l'équation suivante :

$$\theta = M\cos\sqrt{\frac{g}{l}}.t + N\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

qu'on appelle l'*intégrale générale* de la précédente. Les coefficients M et N sont des constantes qui ont été introduites par les opérations. Si l'on multiplie les deux membres par l, on aura

$$l\theta = Ml\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + Nl\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

Or $l\theta$ est précisément S; en posant $Ml = A$ et $Nl = B$, il vient l'équation

$$[1] \qquad S = A\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

qui est l'*équation des espaces.*

L'*équation des vitesses* s'obtiendra en dérivant par rapport à t les deux membres de celle-ci. On aura

$$[2] \qquad V = \frac{ds}{dt} = -A\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + B\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

Reste à déterminer les coefficients A et B, au moyen des conditions initiales du problème. Il suffit, pour cela, d'écrire que, au temps zéro, la distance du mobile à l'origine était égale à $l\alpha = a$ et que la vitesse était nulle. On aura alors les deux égalités

$$a = A \qquad \text{et} \qquad 0 = B\sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad \text{d'où} \qquad B = 0.$$

En portant ces valeurs des constantes dans les équations du mouvement, on obtient

$$\text{Équation des espaces. . . . .} \quad S = a\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t \qquad [1]$$

$$\text{Équation des vitesses . . . . .} \quad V = -b\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t \qquad [2]$$

$\left(\text{en posant } b = a\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$.

Ces deux équations déterminent toutes les circonstances du mouvement pendulaire.

6° *Discussion des équations.* — I. Au temps $t = 0$, on a $S = a$ et $V = 0$, c'est-à-dire que le point matériel possède son écart maximum et une vitesse nulle : il part du point A_0, extrémité de sa trajectoire.

II. Lorsque t croît, s décroît et V croît en valeur absolue, mais en restant négatif, ce qui indique simplement que, d'après le choix de l'origine des distances, la vitesse est dirigée dans le sens des espaces décroissants : le mobile décrit alors l'arc A_0H.

III. Lorsque t atteint une valeur telle que l'on ait $\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = 0$, ce qui a lieu lorsque l'arc $t\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{\pi}{2}$, on a en même temps

$$S = 0 \qquad \text{et} \qquad V = -b,$$

c'est-à-dire que l'écart est *nul* et la vitesse est *maximum* (en valeur absolue) : le mobile passe alors au point H. Soit T' la durée de cette période de l'oscillation, elle est déterminée par l'égalité

$$T'\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad T' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

IV. Lorsque t dépasse la valeur T', l'espace croît en valeur absolue, mais devient négatif, car l'arc $t\sqrt{\frac{g}{l}}$ devient plus grand que $\frac{\pi}{2}$. Quant à la vitesse, elle reste négative, c'est-à-dire toujours dirigée de A_0 vers A_1, et elle décroît en valeur absolue.

V. *Durée de l'oscillation simple.* — Lorsque t atteint une valeur telle, que l'on ait $\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = -1$, ce qui a lieu lorsque l'ar $\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = \pi$, on a en même temps

$$S = -a \qquad \text{et} \qquad V = 0,$$

c'est-à-dire que, lorsque l'écart est devenu maximum du côté HA_1, la vitesse est redevenue nulle. Le mobile est donc alors arrivé à l'autre extrémité de sa course, au point A_1. On voit que la portion HA_1, c'est-à-dire la branche ascendante de la trajectoire, est égale à la branche descendante AH. Appelons T la durée totale de l'*oscillation simple*, c'est-à-dire la période du mouvement compris entre les points A et A_1, elle est donnee par l'égalité

$$[3] \qquad T\sqrt{\frac{g}{l}} = \pi, \qquad \text{d'où} \qquad T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Telle est la troisième équation fondamentale du mouvement pendulaire dans le cas particulier des petites oscillations. On voit que la durée T d'une petite oscillation est indépendante de son amplitude α.

On voit aussi que $T = 2T'$: ce qui prouve que les deux branches de la trajectoire sont non seulement *égales*, mais *tautochrones*, c'est-à-dire parcourues dans le même temps.

VI. Lorsque t dépasse la valeur T, on voit que l'arc $\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$ croît d'abord entre π et $3\frac{\pi}{2}$, puis entre $3\frac{\pi}{2}$ et 2π. Par suite, $\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$ repasse par les mêmes valeurs qu'entre 0 et π, mais en sens inverse, c'est-à-dire qu'il est d'abord négatif et décroît de -1 à 0, puis qu'il est positif et croît de 0 à $+1$; de même $\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$ varie d'abord de 0 à $+1$ en restant positif, puis de -1 à 0 en restant négatif. De là il résulte que le mobile parcourt l'arc A_1HA_0 dans le même temps et avec les mêmes vitesses, changées de signe, que l'arc A_0HA_1. Le mouvement de retour est donc identique au mouvement d'aller, et l'oscillation complète se compose de deux oscillations simples parfaitement égales.

VII. Enfin, lorsque t dépasse la valeur 2T, l'arc $\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$ dépasse la valeur 2π, et repasse alors par les mêmes valeurs qu'à partir de 0. Le mouvement se reproduit alors, identique à lui-même, au bout de la période de temps $\tau = 2T$, qui est définie par l'égalité

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

7° *Mouvement pendulaire d'amplitude quelconque.* — Dans ce cas, l'équation différentielle du mouvement est

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta.$$

On peut en déduire assez facilement l'équation des vitesses. En effet, multiplions les deux membres de l'équation par $2d\theta$; elle devient

$$2\frac{d^2\theta}{dt^2}\,d\theta = -2\frac{g}{l}\sin\theta\,d\theta.$$

Or on sait que le premier membre est la dérivée de la fonction $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ et le second membre la dérivée de la fonction $\frac{2g}{l}\cos\theta$: on a donc pour l'intégrale de cette première équation différentielle, en appelant M une constante,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}\cos\theta + M.$$

On déterminera la constante M à l'aide des conditions initiales du mouvement. En y faisant $t = 0$, on doit avoir $\theta = \alpha$ et la vitesse $V = 0$; or V c'est $\frac{ds}{dt}$ ou $l\frac{d\theta}{dt}$. On a donc aussi $\frac{d\theta}{dt} = 0$. Portons ces valeurs dans l'équation précédente, il vient

$$0 = \frac{2g}{l}\cos\alpha + M, \qquad \text{d'où} \qquad M = -\frac{2g}{l}\cos\alpha.$$

Remplaçons M par cette valeur dans l'équation générale, elle devient

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha),$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\theta}{dt} = \mp\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}.$$

C'est l'*équation des vitesses* à une constante près $\left(\text{puisque } V = l\frac{d\theta}{dt}\right)$. Le signe *moins* correspond à la première phase de la période, quand la vitesse croît dans le sens des espaces décroissants, c'est-à-dire de A_0 en A_1 (fig. 84), et le signe $+$ correspond à la seconde phase, quand la vitesse croît dans le sens des espaces croissants, c'est-à-dire de A_1 vers A_0.

Quant à l'équation des espaces, il n'est pas possible de la trouver exactement par les procédés du calcul intégral. Nous nous bornerons à donner l'équation de la durée d'une oscillation simple. Elle est constituée par un développement en série, d'un nombre illimité de termes :

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\frac{\alpha}{2} + \ldots + \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2\sin^{2n}\frac{\alpha}{2} + \ldots\right].$$

Remarques. — 1° On voit que, dans le cas général, la durée d'une oscillation n'est pas indépendante de l'amplitude.

2° La formule précédente $\left(T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$ n'est donc exactement *vraie* que lorsque l'amplitude des oscillations est, non pas seulement *très petite*, mais *infiniment petite*, c'est-à-dire lorsqu'elle tend vers zéro : c'est ce qu'on appelle une *formule limite*.

96. **Autre définition du mouvement pendulaire de petite amplitude.** — Il est intéressant de remarquer que ce mouvement oscillatoire *curviligne* est identique à un mouvement oscillatoire rectiligne qui serait défini de la manière suivante :

Pendant qu'un mobile M (fig. 85) parcourt, d'un mouvement uniforme, la circonférence d'un cercle, A_0MA_1, on le projette à chaque instant sur le diamètre A_0A_1 du point de départ : la projection M' du mobile décrit alors évidemment sur ce diamètre un mouvement rectiligne oscillatoire, de A_0 en A_1 et de A_1 en A_0. *C'est ce mouvement oscillatoire qui est identique à un mouvement pendulaire de petite amplitude.*

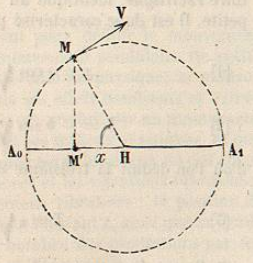

Fig. 85.

Nous allons démontrer que ces deux mouvements sont représentés par les mêmes équations.

En effet, supposons que le cercle ait pour rayon $l\alpha$, c'est-à-dire la longueur rectifiée de la trajectoire circulaire décrite dans le précédent mouvement pendulaire, et soit $V = l\alpha\sqrt{\frac{g}{l}}$ la vitesse du mouvement circulaire uniforme. Pre-

nons pour origine du temps l'instant où le mobile M part du point A_0 (fig. 85) sur la circonférence, pendant que le mobile M' part du même point sur le diamètre; prenons pour origine des espaces, pour le mouvement rectiligne, le centre H de la circonférence. Soient M et M' les positions des deux mobiles à l'instant t; désignons par x l'espace HM'. On a évidemment

$$[1] \qquad x = \mathrm{HM} \,.\, \cos \mathrm{M'HM} = l\alpha \,.\, \cos \,.\, \frac{\mathrm{V}t}{l\alpha} = l\alpha \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t = a \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t$$

(en posant $a = l\alpha$).

C'est l'*équation des espaces :* on voit qu'elle est identique à celle du mouvement pendulaire.

En dérivant les deux membres de l'équation, on obtiendra l'équation des vitesses

$$[2] \qquad \mathrm{V} = \frac{dx}{dt} = -a\sqrt{\frac{g}{l}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t = -b \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t$$

$\left(\text{en posant } b = a\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$.

Elle est identique à l'équation des vitesses du mouvement pendulaire. Enfin, la durée d'une oscillation simple est évidemment égale à celle que met le mobile M pour parcourir la demi-circonférence A_0MA_1. On a donc

$$[3] \qquad \mathrm{T} = \frac{\pi.\mathrm{HM}}{\mathrm{V}} = \frac{\pi.l\alpha}{l\alpha\sqrt{\frac{g}{l}}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

La formule est identique à la formule correspondante du mouvement pendulaire.

Remarque. — On peut se servir de cette propriété pour établir d'une manière indirecte, mais plus simple, la formule de la durée de l'oscillation simple dans le mouvement pendulaire à petites oscillations.

97. **Mouvement vibratoire.** — 1° *Définition et équations.* — Le mouvement alternatif de la projection M' sur le diamètre $A_0 A_1$ est le type du *mouvement vibratoire.* On voit que ce mouvement vibratoire est un mouvement oscillatoire *rectiligne*, identique au mouvement pendulaire d'amplitude infiniment petite. Il est donc caractérisé par les deux équations

$$[1] \qquad x = a \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t \quad \text{(équation des espaces)},$$

$$[2] \qquad \mathrm{V} = -b \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t \quad \text{(équation des vitesses)},$$

d'où l'on déduit la troisième équation

$$[3] \qquad \mathrm{T} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{(équation de la durée)}.$$

2° *Cause du mouvement.* — Il est facile de résoudre, dans ce cas, le second problème fondamental de la dynamique : *Étant donné le mouvement d'un corps, déterminer les forces qui agissent actuellement sur ce corps.* Nous savons en effet que les équations [1] et [2] proviennent, par intégration, de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}\, x.$$

En multipliant les deux membres par m, il vient

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\frac{g}{l}\, x.$$

Or, en appelant f la force accélératrice inconnue, on a, d'après un principe de mécanique précédent,

$$f = m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\frac{g}{l}\, x.$$

Cette équation prouve que le mobile, de masse m, est sollicité à l'instant t, et en un point M de sa trajectoire (fig. 86), par une force f qui est proportionnelle à la distance OM de sa position actuelle au centre O de la trajectoire, et constamment dirigée vers ce centre, parallèlement à la droite $A_0 A_1$. Tout se passe donc *comme si le point* O *était un centre d'attraction*, c'est-à-dire le siège d'une force qui attire le point matériel M proportionnellement à la masse m et à la distance x de ce dernier. L'attraction exercée à l'unité de distance et sur l'unité de masse serait $\frac{g}{l}$: c'est le coefficient caractéristique de la force. En le posant égal à γ, les équations du mouvement prennent une forme plus simple. Elles deviennent

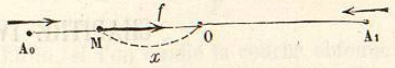

Fig. 86.

$$[1] \qquad x = a \cos t\sqrt{\gamma},$$

$$[2] \qquad \mathrm{V} = -b \sin t\sqrt{\gamma},$$

$$[3] \qquad \mathrm{T} = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}};$$

a représente toujours la distance maximum du mobile au centre; b représente la vitesse maximum en grandeur absolue, et s'exprime en fonction de a et de la constante par l'équation

$$b = a\sqrt{\gamma}.$$

Remarques. — *Exemples.* — C'est principalement pour définir le mouvement vibratoire que nous avons insisté sur le cas du mouvement pendulaire de petite amplitude. Car, de tous les mouvements qu'on étudie en physique, le mouvement vibratoire est le plus important, à cause de ses effets nombreux et extrêmement variés. Nous verrons en effet que le son est produit par un mouvement vibratoire des corps sonores, transmis par l'air et les milieux élastiques, et que la lumière est aussi un mouvement vibratoire des corps lumineux ou des corps éclairés, transmis par l'éther. Les vibrations sonores et les vibrations lumineuses sont caractérisées par les équations du mouvement vibratoire : la position de la molécule vibrante sur sa trajectoire, sa vitesse à l'instant t, ainsi que la durée de l'oscillation (ou, ce qui revient au même, le nombre des oscillations par seconde), sont données par les équations [1], [2] et [3].

Forme ordinaire des équations. — Il est d'usage d'écrire ces équations sous une autre forme, en éliminant la constante γ en fonction d'une autre constante τ qui est égale à 2T, c'est-à-dire à la durée d'une oscillation complète. On a

$$\tau = 2\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}}, \qquad \text{d'où} \qquad \sqrt{\gamma} = \frac{2\pi}{\tau}$$

Portons cette valeur de $\sqrt{\gamma}$ dans les équations de la vibration : elles deviennent

[1] $x = a \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \ldots$ (équation des espaces).

[2] $V = b \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \ldots$ (équation des vitesses).

[3] $\tau = 2T = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \ldots$ (durée de l'oscillation complète).

CHAPITRE IV

DÉTERMINATION DE L'INTENSITÉ DE LA PESANTEUR. — PENDULE. EXPÉRIENCES DE BORDA. — APPLICATIONS DU PENDULE.

98. **Procédés divers de détermination de** g. — Nous avons défini précédemment (86, 4°) l'intensité de la pesanteur : *l'action que la pesanteur exerce sur l'unité de masse*, ou, autrement dit, *le poids de l'unité de masse*. Nous avons démontré qu'elle est représentée par le même nombre que l'accélération g de la chute des corps dans le vide. Par conséquent, tous les moyens qui nous ont servi à vérifier les lois de la chute des corps peuvent être utilisés pour mesurer g, et par suite l'intensité de la pesanteur.

1° *Procédé du plan incliné.* — Ainsi, dans la chute sur un plan incliné (82), si l'on néglige le frottement et la résistance de l'air, l'accélération γ est liée à l'accélération normale g par l'une des équations suivantes (qui sont équivalentes) :

[1] $\gamma = g \cdot \frac{h}{l} \ldots$ (h hauteur du plan, et l longueur),

[2] $\gamma = g \sin \alpha \ldots$ (α inclinaison du plan).

En prenant un plan suffisamment incliné, on ralentira assez le mouvement pour le rendre aisément observable. Supposons qu'on ait mesuré l'espace parcouru en 1 seconde par un corps pesant qui tombe sur le plan, sans vitesse initiale : soit e_1 le nombre trouvé. On a

$$e_1 = \frac{1}{2}\gamma, \quad \text{d'où} \quad \gamma = 2e_1;$$

donc

$$g = 2e_1 \frac{l}{h}.$$

2° *Machine d'Atwood.* — De même, l'accélération γ de la chute dans la machine d'Atwood (83) est liée à l'accélération normale g par la relation

$$\gamma = g \cdot \frac{p}{2P + p}.$$

En mesurant e_1 comme il a été fait pour la vérification de la loi des espaces, on aura

$$\gamma = 2e_1, \quad \text{d'où} \quad g = 2e_1 \frac{2P + p}{p}.$$

3° *Appareil Morin.* — Enfin, si l'on étudie la courbe obtenue à l'aide de l'appareil Morin (fig. 61), on voit que l'une des lignes parallèles à MK, par exemple $a''c''$, donne directement l'espace e_t parcouru dans le temps t par le corps pesant.

On a donc (en négligeant toujours le frottement et la résistance de l'air)

$$a''c'' \quad \text{ou} \quad e_t = \frac{1}{2} g t^2.$$

Il suffit de connaître t, qui est proportionnel à la ligne Ma''.

Or, en appelant ω la vitesse angulaire du cylindre, supposée constante, et R le rayon du cylindre, on a

$$ma'' = \omega R t,$$

d'où l'on déduit t, après avoir déterminé ω par une expérience préalable.

4° *Procédé du pendule.* — Tous les procédés précédents sont plus théoriques que pratiques. Ces mesures comportent de nombreuses erreurs, dues aux frottements des organes et à la résistance de l'air, qui enlèvent toute précision au résultat final. Aussi a-t-on eu recours, pour mesurer g avec exactitude, à une autre méthode, déduite des lois du mouvement pendulaire et fondée sur l'emploi du pendule.

99. **Pendule.** — 1° *Définitions.* — On dit souvent qu'il y a deux sortes de *pendules :* le *pendule simple* et le *pendule composé*. En réalité, il n'existe en physique qu'un seul pendule : c'est le *pendule composé*. Tout corps pesant qui est mobile soit autour d'un point fixe, appelé *centre de suspension*, soit autour d'un axe fixe horizontal, appelé *axe de suspension*, constitue un pendule composé

D'après cette définition, le pendule peut avoir une forme quel-