Portons cette valeur de $\sqrt{\gamma}$ dans les équations de la vibration : elles deviennent

[1] $x = a \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \ldots$ (équation des espaces).

[2] $V = b \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \ldots$ (équation des vitesses).

[3] $\tau = 2T = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \ldots$ (durée de l'oscillation complète).

CHAPITRE IV

DÉTERMINATION DE L'INTENSITÉ DE LA PESANTEUR. — PENDULE. EXPÉRIENCES DE BORDA. — APPLICATIONS DU PENDULE.

98. **Procédés divers de détermination de** g. — Nous avons défini précédemment (86, 4°) l'intensité de la pesanteur : *l'action que la pesanteur exerce sur l'unité de masse*, ou, autrement dit, *le poids de l'unité de masse*. Nous avons démontré qu'elle est représentée par le même nombre que l'accélération g de la chute des corps dans le vide. Par conséquent, tous les moyens qui nous ont servi à vérifier les lois de la chute des corps peuvent être utilisés pour mesurer g, et par suite l'intensité de la pesanteur.

1° *Procédé du plan incliné.* — Ainsi, dans la chute sur un plan incliné (82), si l'on néglige le frottement et la résistance de l'air, l'accélération γ est liée à l'accélération normale g par l'une des équations suivantes (qui sont équivalentes) :

[1] $\gamma = g \cdot \frac{h}{l} \ldots$ (h hauteur du plan, et l longueur),

[2] $\gamma = g \sin \alpha \ldots$ (α inclinaison du plan).

En prenant un plan suffisamment incliné, on ralentira assez le mouvement pour le rendre aisément observable. Supposons qu'on ait mesuré l'espace parcouru en 1 seconde par un corps pesant qui tombe sur le plan, sans vitesse initiale : soit e_1 le nombre trouvé. On a

$$e_1 = \frac{1}{2}\gamma, \quad \text{d'où} \quad \gamma = 2e_1;$$

donc

$$g = 2e_1 \frac{l}{h}.$$

2° *Machine d'Atwood.* — De même, l'accélération γ de la chute dans la machine d'Atwood (83) est liée à l'accélération normale g par la relation

$$\gamma = g \cdot \frac{p}{2P + p}.$$

En mesurant e_1 comme il a été fait pour la vérification de la loi des espaces, on aura

$$\gamma = 2e_1, \quad \text{d'où} \quad g = 2e_1 \frac{2P + p}{p}.$$

3° *Appareil Morin.* — Enfin, si l'on étudie la courbe obtenue à l'aide de l'appareil Morin (fig. 61), on voit que l'une des lignes parallèles à MK, par exemple $a''c''$, donne directement l'espace e_t parcouru dans le temps t par le corps pesant.

On a donc (en négligeant toujours le frottement et la résistance de l'air)

$$a''c'' \quad \text{ou} \quad e_t = \frac{1}{2} g t^2.$$

Il suffit de connaître t, qui est proportionnel à la ligne Ma''.

Or, en appelant ω la vitesse angulaire du cylindre, supposée constante, et R le rayon du cylindre, on a

$$ma'' = \omega R t,$$

d'où l'on déduit t, après avoir déterminé ω par une expérience préalable.

4° *Procédé du pendule.* — Tous les procédés précédents sont plus théoriques que pratiques. Ces mesures comportent de nombreuses erreurs, dues aux frottements des organes et à la résistance de l'air, qui enlèvent toute précision au résultat final. Aussi a-t-on eu recours, pour mesurer g avec exactitude, à une autre méthode, déduite des lois du mouvement pendulaire et fondée sur l'emploi du pendule.

99. **Pendule.** — 1° *Définitions.* — On dit souvent qu'il y a deux sortes de *pendules :* le *pendule simple* et le *pendule composé*. En réalité, il n'existe en physique qu'un seul pendule : c'est le *pendule composé*. Tout corps pesant qui est mobile soit autour d'un point fixe, appelé *centre de suspension*, soit autour d'un axe fixe horizontal, appelé *axe de suspension*, constitue un pendule composé

D'après cette définition, le pendule peut avoir une forme quel-

conque; on lui donne habituellement celle d'une masse métallique, à surface sphérique ou lenticulaire, soutenue par un fil ou par une tige rigide également métalliques. Un fil à plomb (fig. 40) est l'exemple le plus simple de la première forme : le point d'attache de l'extrémité supérieure du fil est le centre de suspension. Les balanciers d'horloge des figures 50 et 96 représentent les types de pendule les plus usuels. L'axe de suspension est réalisé tantôt par l'arête vive, ou *couteau*, d'un prisme triangulaire en acier, qui est encastré dans la tige du pendule, perpendiculairement à sa longueur (fig. 95), tantôt par une lame d'acier, mince et flexible, qui soutient la tige du pendule et qui se courbe légèrement à chacun de ses mouvements (fig. 105). Toutes les fois qu'on parle de pendule en physique, c'est de l'un de ces appareils qu'il est question.

Quant au *pendule simple* ou *pendule idéal*, ce n'est point un pendule; c'est une conception théorique absolument irréalisable dans la pratique, puisqu'on le définit : un *point matériel pesant*, suspendu, par un fil *inextensible* et *sans poids*, à un point fixe autour duquel il peut se mouvoir librement. Nous avons dit précédemment (95) quel est le sens précis de cette conception et quelle en est l'utilité dans l'étude mathématique du mouvement pendulaire.

2° *Mouvement oscillatoire.* — Tout pendule, abandonné à lui-même, prend, comme un fil à plomb, une position d'équilibre stable : cette position est telle, que la verticale de son centre de gravité rencontre l'axe de suspension.

Imaginons qu'on coupe le pendule par un plan vertical passant par son centre de gravité G et perpendiculaire à son axe de suspension, et prenons cette section pour plan de la figure 87. Le pendule est représenté par la figure plane OG, et son axe de suspension, qui coupe le plan au point O, est représenté par ce point. Dans la position d'équilibre, la verticale du centre de gravité G va passer par le point O, et par suite le poids P du pendule, appliqué en G, et dirigé suivant la verticale, est détruit par la résistance du point fixe : il n'a pas de composante horizontale, qui puisse entraîner le pendule dans le sens où il est mobile, c'est-à-dire perpendiculairement à la verticale OG. Menons dans le plan, avec un rayon égal à OG, un arc de cercle A_0HA_1 : si nous dérangeons le pendule de sa position d'équilibre, son centre de gravité se déplacera sur cet arc de cercle, comme un point matériel pesant qui serait assujetti à s'y mouvoir.

Amenons le point G dans la position A_0, de telle manière que la tige du pendule fasse un angle α, égal à HOA_0, avec sa position

initiale. La direction du poids P ne passant plus par le point fixe, ce poids peut se décomposer en deux forces : l'une, P''_0, dirigée dans le prolongement de la tige, et l'autre P'_0, dirigée suivant la tangente à l'arc HA_0. La composante P''_0 est détruite par la résistance du point fixe; mais la composante tangentielle agit pour

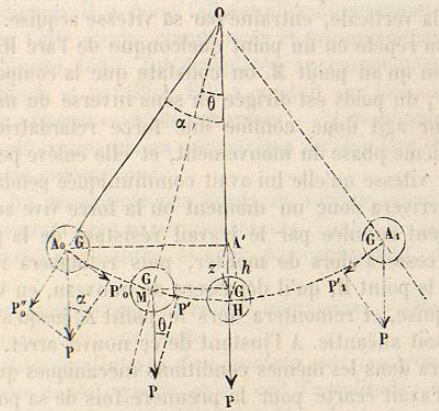

Fig. 87.

entraîner le pendule suivant l'arc A_0H et pour le ramener vers sa position initiale d'équilibre.

On voit, d'après le rectangle des forces $A_0P'_0PP''_0$ (fig. 87), que cette composante P'_0 est égale à P sin α : la force accélératrice est donc proportionnelle au sinus de l'angle d'écart, comme dans le mouvement du *pendule simple*, et elle diminue en même temps que cet angle d'écart. En M, par exemple, lorsque la tige du pendule ne fait plus qu'un angle θ avec la position initiale, on voit, d'après le rectangle des forces, que la composante tangentielle est devenue P' et n'est plus égale qu'à P sin θ; et cette composante est complètement annulée, lorsque le pendule a atteint de nouveau sa position initiale OH.

Mais il ne s'y arrête pas et n'y reste pas en équilibre, comme précédemment, car il ne se trouve plus du tout dans les conditions initiales. En passant de la position OA_0 à la position OH, il *est tombé* d'une certaine hauteur *h*, qui est la même pour chacun de ses points, et qui est égale à la variation de niveau A'H de son centre de gravité. Il a donc acquis en tombant une certaine puis-

sance vive, qui est déterminée par le théorème des forces vives

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = Ph;$$

elle est égale au travail moteur de la pesanteur pendant la chute, c'est-à-dire à Ph. Le pendule continuera donc son mouvement et dépassera la verticale, entraîné par sa vitesse acquise.

Or, si l'on répète en un point quelconque de l'arc HA_1 la même construction qu'au point M, on constate que la composante tangentielle P'_1 du poids est dirigée en sens inverse du mouvement; la pesanteur agit donc comme une force retardatrice pendant cette deuxième phase du mouvement, et elle enlève peu à peu au pendule la vitesse qu'elle lui avait communiquée pendant la descente. Il arrivera donc un moment où la force vive acquise sera complètement annulée par le travail résistant de la pesanteur : le pendule cessera alors de monter, puis retombera immédiatement vers le point H, qu'il dépassera de nouveau, en vertu de sa vitesse acquise, et remontera vers le point A_0 jusqu'à ce que sa force vive soit anéantie. A l'instant de ce nouvel arrêt, le pendule se retrouvera dans les mêmes conditions mécaniques qu'au début, lorsqu'on l'avait écarté pour la première fois de sa position d'équilibre : il aura accompli une première période de son mouvement; et ce mouvement se continuera de la sorte, par une suite plus ou moins longue de périodes analogues qui constituent le *mouvement oscillatoire*.

On nomme *oscillation simple* le passage d'une position extrême du pendule à l'autre position extrême, de part et d'autre de la verticale. La *période* ou *oscillation complète* se compose de la succession de deux oscillations simples, de sens opposés. L'angle $HOA_0 = \alpha$ qui mesure le déplacement angulaire de chacun des points du pendule, s'appelle *amplitude* de l'oscillation.

Remarque. — Si la pesanteur était la seule cause retardatrice du mouvement, comme elle en est la seule cause accélératrice, le point d'arrêt A_1 serait exactement symétrique du point de départ A_0, comme dans le cas théorique du *pendule simple*. En effet, la force vive que le pendule a acquise en tombant de la hauteur h ne pourrait être anéantie qu'à la suite d'une ascension égale à la chute. De même, le pendule s'élèverait jusqu'au point A_0 dans son mouvement de retour, et la période oscillatoire serait constituée par deux oscillations simples, absolument identiques. Par suite, l'amplitude resterait invariable, et le mouvement du pendule, une fois commencé, durerait indéfiniment. Mais il n'en est pas ainsi, parce que deux causes, étrangères à la pesanteur, concourent sans cesse à retarder le mouvement oscillatoire pendant les phases d'ascension; ce sont : 1° la résistance de l'air, dans lequel le pendule oscille; 2° le frottement, plus ou moins atténué, mais toujours sensible, qui se produit inévitablement sur l'axe de suspension. C'est pourquoi le mouvement de va-et-vient, périodique et régulier, du pendule composé constitue un mouvement oscillatoire analogue, mais non identique, au mouvement pendulaire (*pendule simple*) que nous avons étudié précédemment (95).

100. Lois expérimentales du pendule. — Les lois du mouvement pendulaire proprement dit, trouvées par le calcul, ne peuvent donc pas s'appliquer rigoureusement au mouvement d'un pendule ordinaire. Il a donc fallu étudier directement celui-ci par l'expérience. Cette étude, commencée et presque achevée par Galilée dès l'année 1583, fut complétée au commencement de ce siècle par Borda et par Biot. Elle a conduit aux lois suivantes :

1° Loi du décroissement des amplitudes. — *L'amplitude des oscillations décroît en progression géométrique lorsque leur nombre croît en progression arithmétique.*

Cette loi fut découverte par Borda et vérifiée ensuite par Biot et par plusieurs autres expérimentateurs. Toutes les suivantes ont été découvertes par Galilée, et sont, par conséquent, de beaucoup antérieures.

2° Loi de l'isochronisme des petites oscillations. — On peut énoncer cette loi de deux manières :

I. *Les petites oscillations d'un pendule sont isochrones* (c'est-à-dire de même durée), *quelle qu'en soit l'amplitude;* ou bien, *la durée d'oscillation d'un pendule est indépendante de son amplitude, pourvu que celle-ci soit petite.*

L'un ou l'autre de ces énoncés a la même signification. On a vu que les amplitudes d'un pendule ordinaire, oscillant dans l'air, décroissent d'après la loi précédente. Les durées d'oscillation du pendule commencent nécessairement par décroître aussi, en même temps que ces amplitudes; mais, à partir d'une certaine valeur de l'amplitude (environ 2° ou 3°), la diminution dans la durée n'accompagne plus la diminution dans l'amplitude : celle-ci continuant à décroître, la durée reste constante. Cette durée d'oscillation (pour les petites amplitudes) est donc un caractère spécifique d'un pendule déterminé.

3° Loi des longueurs. — *La durée d'oscillation (de faible amplitude) d'un pendule est proportionnelle à la racine carrée de la longueur du pendule.*

Dans cet énoncé, l'expression *longueur du pendule* a le sens particulier, et tout expérimental, que lui donnait Galilée. Il opérait avec des pendules analogues à ceux de la figure 88, constitués tout simplement par une boule sphérique pesante, suspendue à l'aide d'un fil de poids négligeable; la longueur de chaque pendule était la longueur totale du fil de suspension, augmentée du rayon de la boule.

4° Loi des substances. — *La durée d'oscillation (de faible amplitude) d'un pendule est indépendante de la substance dont il est fait.*

Cela veut dire que des pendules, de même longueur, constitués par des sphères égales mais de substances différentes, ont même durée d'oscillation, à partir de l'amplitude pour laquelle l'isochronisme est atteint.

101. **Vérification expérimentale des lois du pendule.** — On se sert, pour vérifier ces lois, de pendules composés qui se rapprochent autant que possible de ceux que Galilée employa pour les découvrir. Ce sont de petites sphères, de substance très dense, comme le plomb ou le platine, suspendues par des fils très flexibles et très fins dont le poids est négligeable (fig. 88). On prend pour la longueur de ces pendules, comme nous l'avons déjà dit, la distance du centre de la sphère au point de suspension.

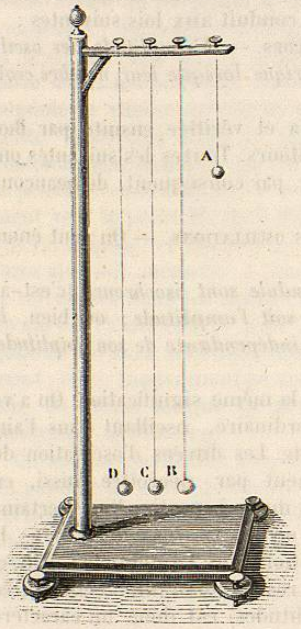

Fig. 88.

La méthode générale de vérification est la suivante : On écarte le pendule de la verticale, d'un angle déterminé A qui mesure l'amplitude initiale, et l'on compte la durée totale d'une série de 100 oscillations simples à l'aide d'un chronomètre qui marque le quart de seconde. Cet instrument est muni d'un bouton qu'il suffit de pousser dans un sens ou dans l'autre pour faire partir l'aiguille ou pour l'arrêter. Soit θ la durée totale de la série, et soit A′ l'angle d'écart final; on prend $\frac{\theta}{100}$ pour durée de l'oscillation et $\frac{A + A'}{2}$ pour amplitude moyenne.

1° *Loi des amplitudes.* — Nous avons dit que c'est Borda qui l'a découverte. L'amplitude initiale qu'il donnait à son pendule était très petite; elle ne dépassait pas 1/3 de degré. Elle se réduisait aux 2/3 environ de sa valeur initiale, après 1800 oscillations.

Biot confirma la loi de Borda, pour des amplitudes bien plus grandes. Ainsi, dans l'une de ses expériences, l'amplitude initiale était notablement supérieure

à 1°; elle était réduite aux 0,6 environ de sa valeur après 7000 oscillations.

2° *Loi de l'isochronisme.* — On compte successivement plusieurs séries de 100 oscillations, à partir d'un angle d'écart déterminé. L'amplitude moyenne de ces oscillations décroît peu à peu. En comparant les durées moyennes successives $\frac{\theta}{100}$, $\frac{\theta_1}{100}$..., on constate qu'elles diminuent en même temps que les amplitudes moyennes $\frac{A + A'}{2}$, $\frac{A_1 + A'_1}{2}$..., tant que celles-ci sont grandes, mais qu'elles atteignent une valeur constante dès que les amplitudes ne dépassent pas 2 ou 3 degrés.

3° *Loi des longueurs.* — On fait osciller des pendules dont les longueurs sont entre elles comme les nombres 1, 4, 9.... On constate que les durées d'oscillation croissent comme les nombres 1, 2, 3..., c'est-à-dire comme les racines carrées des longueurs (fig. 88).

4° *Loi des substances.* — Cette loi n'est pas autre chose, sous une forme nouvelle, que la première loi de la chute des corps, à savoir que la pesanteur agit avec la même intensité sur toutes les substances : d'où il résulte que tous les corps tombent également vite dans le vide. Il suffit, pour la vérifier, de constater que la durée d'oscillation d'un pendule est indépendante de la substance qui le constitue. Pour cela, on suspend à un même support (fig. 88) plusieurs pendules, B, C, D, de même longueur, constitués par des sphères de même diamètre, mais de substances très différentes, par exemple en platine, en fer, ou en verre creux rempli d'eau. On écarte ces trois pendules d'un même angle et on les abandonne au même instant, et l'on voit que leurs oscillations sont indéfiniment concordantes; ou bien, plus simplement, on mesure leurs durées d'oscillation (pour une petite amplitude) et l'on constate que ces durées sont sensiblement égales malgré l'influence perturbatrice de l'air.

102. **Comparaison du pendule composé et du pendule simple.** — 1° *Analogie des lois.* — Il n'y a pas d'inconvénients à employer l'expression *pendule simple*, quand on y attache le sens précis indiqué précédemment (95, 1°). Elle est même très commode pour énoncer d'une manière concrète les lois du mouvement pendulaire proprement dit, c'est-à-dire du mouvement oscillatoire d'un point matériel pesant M, assujetti à tomber sur un arc de cercle A_0HA_1 (fig. 89), situé dans un plan vertical, et orienté symétriquement par rapport à la verticale Oz du centre du cercle O. La longueur l du pendule simple, c'est le rayon OH ou OA_0 de l'arc, et le centre O du cercle devient le centre de suspension du pendule simple ou la trace de l'axe de suspension sur le plan de la trajectoire.

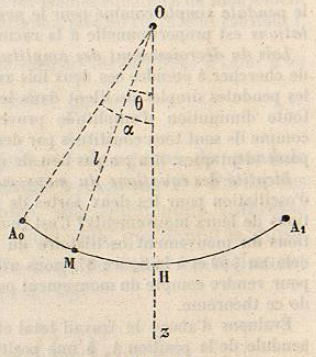

Fig. 89.

Loi de l'isochronisme. — Nous avons vu que la durée de l'oscillation simple du pendule simple est donnée, dans le cas d'une amplitude finie quelconque α, par la formule

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \ldots + \left(\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 \sin^{2n}\frac{\alpha}{2} + \ldots\right]$$

Si nous posons

$$R = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \ldots + \left(\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 \sin^{2n}\frac{\alpha}{2} + \ldots$$

nous pourrons écrire

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + R\right).$$

La durée d'oscillation du pendule simple, dans le cas d'une amplitude quelconque, est donc exprimée par la somme de deux termes, l'un $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ qui est constant et indépendant de l'amplitude, et l'autre qui est une fraction du précédent, représentée par une fonction de α. Donc, en réalité, pour le *pendule simple* comme pour le *pendule composé*, *la durée d'oscillation dépend de l'amplitude* et diminue en même temps que l'amplitude.

D'autre part, le terme variable R est une très petite fraction du terme constant. Il est en effet constitué par une série très convergente dont la somme tend rapidement vers zéro quand l'amplitude diminue. Par exemple, si l'on calcule R pour $\alpha = 5^0$ et $l = 1^m$, on trouve une fraction au plus égale à 0,0001; pour une amplitude inférieure à 2° le terme R serait une fraction complètement négligeable. On peut donc dire, pour le *pendule simple* comme pour le *pendule composé*, que *la durée des petites oscillations est indépendante de l'amplitude*; et l'on peut ajouter, pour le *pendule simple*, que cette durée tend vers une valeur-limite, exprimée par la formule

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Loi des longueurs. — Il résulte en outre de cette dernière formule que, pour le *pendule simple* comme pour le *pendule composé*, la durée des *petites oscillations* est proportionnelle à la racine carrée de la longueur du pendule.

Lois du décroissement des amplitudes et des substances. — Il n'y a pas lieu de chercher à étendre ces deux lois au cas du pendule simple. En effet, d'abord les pendules simples oscillent dans le vide et sont, par conséquent, à l'abri de toute diminution d'amplitude provenant de la résistance de l'air; ensuite, comme ils sont tous constitués par des points matériels pesants qu'on peut supposer identiques, il n'y a pas lieu de considérer la variation de substance.

Identité des équations du mouvement. — Cette analogie des lois de la durée d'oscillation pour les deux sortes de pendules se poursuit-elle dans les équations de leurs mouvements? C'est ce que nous verrons en cherchant les équations du mouvement oscillatoire du pendule composé. Reportons-nous pour cela au § 99 et à la figure 87; nous avons invoqué le théorème des forces vives pour rendre compte du mouvement oscillatoire : écrivons l'équation qui résulte de ce théorème.

Évaluons d'abord le travail total effectué par la pesanteur pour amener le pendule de la position A_0 à une position quelconque M de sa trajectoire. D'après les définitions relatives au travail des forces constantes (67), ce travail total est égal au travail du poids P appliqué au centre de gravité G; or le travail du poids est égal au produit de la force par le déplacement vertical de son point d'application, c'est-à-dire à $P\varpi$. Si l'on appelle a la distance GO du centre de gravité G à l'axe de suspension, on a (fig. 87)

$$\varpi = GO - A'O = a(\cos\theta - \cos\alpha).$$

D'autre part, on a

$$P = Mg,$$

M étant la masse totale du pendule : l'expression du travail total de la pesanteur est donc

$$Mga(\cos\theta - \cos\alpha).$$

Évaluons maintenant la force vive totale acquise par le pendule. Nous avons vu (69) que la force vive d'un système matériel animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe est exprimée à un instant quelconque par le produit $\omega^2\sum mr^2$, ω étant la vitesse angulaire au même instant et $\sum mr^2$ le moment d'inertie du système pris par rapport à l'axe de rotation. Appelons I le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de suspension; sa vitesse angulaire à l'instant t est évidemment égale à $\frac{d\theta}{dt}$, c'est-à-dire à la dérivée, par rapport à t, de l'angle de rotation θ, prise en signe contraire, à cause du choix de l'origine des angles. On a donc pour l'équation des forces vives

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = Mga(\cos\theta - \cos\alpha).$$

On en déduit, en résolvant l'équation par rapport à dt,

$$dt = \mp\sqrt{\frac{I}{2Mag}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

Or nous retrouvons là précisément l'*équation différentielle* du mouvement d'un pendule simple dans le cas d'une amplitude quelconque. La seule différence, c'est que le coefficient constant l, qui exprimait la longueur du pendule simple, est remplacé ici par un autre coefficient constant, égal à $\frac{I}{Ma}$. En résolvant cette équation différentielle, nous retrouverions les mêmes équations de mouvement que dans le cas du pendule simple, à la variation près du coefficient constant l. On peut donc dire que :

Le mouvement oscillatoire d'un pendule composé est identique à celui d'un pendule simple dont la longueur serait égale à $\frac{I}{Ma}$.

103. Formule du pendule composé. — Longueur du pendule composé, longueur du pendule simple synchrone — Parmi les équations du mouvement oscillatoire, une seule nous intéresse au point de vue des applications : c'est celle qui donne la durée d'une oscillation simple. C'est à celle-là qu'on donne spécialement le nom de *formule du pendule*. Elle est, soit

$$T = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\frac{\alpha}{2} + \ldots\right],$$

pour les oscillations d'amplitude finie; soit

$$T = \pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

pour les oscillations infiniment petites.

On la prend encore sous une troisième forme, lorsque les oscillations, sans être infiniment petites, sont d'assez faible amplitude pour qu'on puisse négliger toutes les puissances du sinus supérieures à la deuxième, et remplacer le sinus par l'arc lui-même. On a alors

$$T = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \frac{\alpha^2}{16} \right].$$

C'est sous cette dernière forme qu'elle a été utilisée par Borda pour la détermination de g.

Dans toutes ces formules, le coefficient L a la valeur indiquée ci-dessus : à savoir $\frac{I}{Ma}$, I étant le moment d'inertie du pendule, calculé par rapport à l'axe de suspension, M la masse totale du pendule et a la distance de son centre de gravité à l'axe de suspension. Par analogie avec la formule du pendule simple, on donne au coefficient L le nom de *longueur du pendule composé.*

D'après la méthode qui a permis de la déterminer, on voit que cette longueur représente celle d'un pendule simple qui aurait la même durée d'oscillation que le pendule composé. C'est pourquoi on appelle encore ce coefficient *longueur du pendule simple synchrone du pendule composé* (c'est-à-dire qui a des oscillations de même durée, de σύν, avec, et χρόνος, temps).

Remarque. — On peut concevoir aisément et sans calculs l'existence nécessaire du pendule simple *synchrone* d'un pendule quelconque. En effet, si les divers points matériels qui le constituent étaient isolés, ils décriraient leurs oscillations dans des temps d'autant plus longs qu'ils sont plus éloignés du point de suspension. Or, tous ces points étant invariablement liés entre eux, les durées de leurs oscillations sont nécessairement ramenées à une valeur moyenne commune. Par suite, le mouvement des points les plus rapprochés de l'axe de suspension se trouve retardé, tandis que celui des plus éloignés est accéléré. Entre ces deux positions extrêmes, il y a donc des points qui ne sont ni accélérés, ni retardés, et qui oscillent comme s'ils n'étaient pas liés au reste du système. Ces points sont équidistants de l'axe de suspension et leur ensemble forme une ligne parallèle à celui-ci, qu'on appelle *axe d'oscillation.* L'un quelconque de ces points matériels constitue évidemment un pendule simple *synchrone* du pendule composé. Tous ces pendules simples ont une même longueur, qui est la distance de l'axe de suspension à l'axe d'oscillation, et qui est évidemment égale à la longueur du pendule simple synchrone.

104. Cinquième loi du pendule. Loi des intensités. — 1° *Énoncé.* — La formule du pendule, dans le cas des petites oscillations, indique une nouvelle loi, qui avait échappé à Galilée et qu'on ne pouvait point deviner sans calcul, ni découvrir sans se déplacer à la surface de la terre. On peut en donner deux énoncés :

I. *La durée d'oscillation est inversement proportionnelle à la racine carrée de l'intensité de la pesanteur.*

En effet, soient g' et g'' les intensités de la pesanteur dans deux lieux différents où l'on fait osciller successivement le même pendule, on aura, d'après la formule, pour les durées T′ et T″ d'oscillation :

$$T' = \pi \sqrt{\frac{L}{g'}} \quad \text{et} \quad T'' = \pi \sqrt{\frac{L}{g''}}.$$

En divisant ces deux égalités membre à membre et en simplifiant, on a

$$\frac{T'}{T''} = \frac{\sqrt{g''}}{\sqrt{g'}}.$$

II. On déduit de cette équation $T'\sqrt{g'} = T''\sqrt{g''} =$ constante. Cette équation signifie que, *pour un pendule de longueur donnée, le produit de la durée d'oscillation par la racine carrée de l'intensité de la pesanteur est un nombre constant.*

Ce deuxième énoncé de la loi des intensités est souvent plus commode dans les calculs.

2° *Vérification expérimentale.* — Pour vérifier cette loi, il faudrait faire osciller successivement le même pendule dans divers lieux où les valeurs de g fussent notablement différentes. On n'aurait qu'à comparer les durées T′, T″..., mesurées dans chaque cas, aux valeurs correspondantes g', g''... de l'intensité de la pesanteur. Mais, comme la seule méthode qui permette de déterminer g avec exactitude est précisément fondée sur la formule du pendule, on ne saurait, sans faire un cercle vicieux, employer ce procédé de vérification. On se sert alors d'un artifice expérimental analogue au principe de la machine d'Atwood.

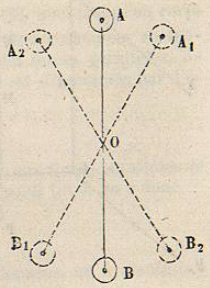

Fig. 90

On constitue un pendule composé avec deux fortes masses en plomb, l'une A pesant P et l'autre B pesant P + p, fixées aux extrémités d'une règle de sapin, dont le poids est négligeable. Perpendiculairement à la règle et en son milieu O, on encastre un couteau d'acier à arête horizontale, qui sert d'axe de suspension. On a ainsi un pendule composé, de longueur sensiblement égale à OB (fig. 90), et de masse égale à 2M + m, sollicité par le seul poids p, car la résultante des deux poids P passant par le milieu O du système est constamment annulée par la résistance

du support. Par conséquent, l'accélération sera diminuée, comme dans la machine d'Atwood (83, 1°), dans le rapport de

$$\frac{m}{2\,M + m} \quad \text{ou de} \quad \frac{p}{2\,P + p}.$$

En prenant P constant et égal à 1 kilogr. par exemple, et donnant à p successivement les valeurs

$$\frac{2}{3},\ \frac{2}{8},\ \frac{2}{15}\ \text{(de kilogramme)},$$

on aura pour g les valeurs correspondantes

$$\frac{1}{4}g,\ \frac{1}{9}g,\ \frac{1}{16}g.$$

En mesurant les durées T′ correspondantes à chaque cas, on constatera qu'elles sont entre elles comme les nombres 2, 3, 4.

105. **Longueur du pendule simple synchrone : autre formule.** — Nous avons vu que la longueur du pendule composé, ou, ce qui revient au même, la longueur de son pendule simple synchrone, est donnée par la formule

$$L = \frac{I}{Ma}.$$

Le moment d'inertie I du pendule, qui entre dans cette formule, est pris par rapport à l'axe de suspension. En le remplaçant par le moment d'inertie J pris par rapport à un axe parallèle à l'axe de suspension, mais passant par le centre de gravité G du pendule, on donne à la formule précédente une forme plus commode pour les applications.

Cherchons d'abord la relation qui existe entre I et J. Pour cela, il suffit de former l'expression $\Sigma\, mr^2$ successivement par rapport aux deux axes. Soient OX l'axe de suspension, et Gx l'axe parallèle, passant par le centre de gravité G (fig. 91). Prenons pour origine des coordonnées le point G, pour axe des x la ligne Gx, et pour axe des z la plus courte distance GO de la ligne Gx et de sa parallèle, l'axe de suspension : ce dernier se trouve alors compris dans le plan des xz ; le troisième axe, Gy, est complètement déterminé : c'est la perpendiculaire au plan des deux autres.

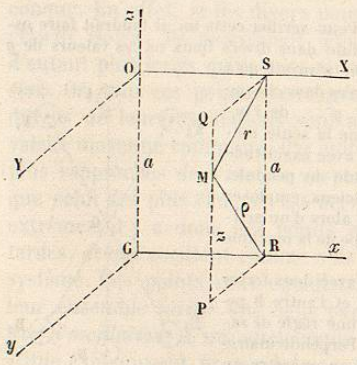

Fig. 91.

Soit M un point quelconque du pendule de masse m : menons une perpendiculaire MP au plan des xy, et prolongeons-la jusqu'à ce qu'elle perce, en Q, le plan XOY, mené par OX, parallèlement au plan des xy. Si nous menons les lignes PR et QS, respectivement perpendiculaires aux axes Gx et OX, et que nous joignions MR et MS, ces droites sont respectivement les distances ρ et r du point M aux deux axes des moments d'inertie (d'après le théorème des trois perpendiculaires). Pour avoir le premier moment d'inertie I, il faudra faire la somme

de termes analogues à mr^2, et pour avoir J, la somme de termes analogues à $m\rho^2$. Or les deux distances conjuguées r et ρ sont deux côtés d'un triangle tel que MSR, dont le troisième côté SR est une droite parallèle et égale à la plus courte distance GO ($= a$) des deux axes (parce que le plan de projection PQSR est parallèle au plan des yz). On a donc entre r et ρ la relation

$$r^2 = \rho^2 + a^2 - 2\,a\rho \cos \text{SRM}$$

ou, en remplaçant le cosinus de SRM par le sinus de l'angle complémentaire PRM,

$$r^2 = \rho^2 + a^2 - 2\,a\rho \sin \text{PRM}.$$

Or, dans le triangle rectangle MPR, on a entre l'hypoténuse ρ et le côté MP $= z$ la relation

$$z = \rho \sin \text{PRM}.$$

En substituant cette valeur de z, il vient

$$r^2 = \rho^2 + a^2 - 2\,az.$$

Si nous multiplions tous les termes de cette équation par la masse m du point M, il vient

$$mr^2 = m\rho^2 + ma^2 - 2\,amz$$

et, en faisant la somme des termes analogues,

$$\Sigma\, mr^2 = \Sigma\, m\rho^2 + \Sigma\, ma^2 - 2\,\Sigma\, amz.$$

Interprétons maintenant chacun des termes de cette somme. $\Sigma\, mr^2$ est le moment d'inertie I ; $\Sigma\, m\rho^2$ est le moment J. Dans le terme $\Sigma\, ma^2$, le coefficient a^2 est constant, on peut le faire sortir du signe Σ et écrire $a^2\,\Sigma\, m$. Or $\Sigma\, m$ est la somme des masses des points M ; c'est donc la masse totale du pendule, que nous appelons M : on a donc $\Sigma\, ma^2 = Ma^2$. Enfin le dernier terme peut s'écrire $a\,\Sigma\, mz$. Pour évaluer la somme $\Sigma\, mz$, multiplions d'abord chacun de ses termes par g : elle devient $\Sigma\, mgz$. Or nous avons vu (56) que, lorsqu'un corps tel que le pendule composé est rapporté à trois axes de coordonnées rectangulaires, si l'on cherche les coordonnées du centre des forces parallèles, on trouve que la distance c de ce centre au plan des xz est déterminée par l'équation

$$c\text{R} = \Sigma\,(\text{F}z).$$

Appliquons cette équation au cas du pendule, soumis aux forces parallèles de la pesanteur. F est mg, poids du point M, et R est Mg, poids total. On a donc

$$c\text{M}g = \Sigma\, mgz.$$

Mais ici, à cause du choix même de l'origine des coordonnées, on a identiquement $c = 0$: donc

$$\Sigma\, mgz = 0,$$

et comme g est une constante,

$$\Sigma\, mz = 0.$$

Substituons ces valeurs respectives à chacun des termes de l'équation précédente [1], il vient

$$I = J + Ma^2$$

ou bien, en adoptant pour J la notation suivante : $J = MK^2$ (K étant une constante),

$$I = M(K^2 + a^2).$$

Portons enfin cette nouvelle valeur de I dans l'équation qui donne L, elle devient

$$L = \frac{M(K^2 + a^2)}{Ma} = \frac{Ma^2}{Ma} + \frac{MK^2}{Ma} = a + \frac{K^2}{a}.$$

Telle est la formule habituelle qui sert à déterminer la longueur du pendule simple synchrone d'un pendule composé, dont le moment d'inertie est MK^2 (par rapport à Gx) et dont le centre de gravité est à une distance a de l'axe de suspension.

Remarques. — 1° La constante K, définie par l'équation $J = MK^2$, s'appelle le *rayon de gyration* du pendule. Si l'on supposait toute la masse du pendule répartie uniformément, en couche infiniment mince, à la surface d'un cylindre de révolution, de rayon égal à K, le moment d'inertie de la surface cylindrique, pris par rapport à l'axe du cylindre, serait précisément

$$\sum mK^2, \qquad \text{ou} \qquad K^2 \sum m, \qquad \text{ou} \qquad MK^2.$$

Tel est le sens mécanique de cette constante K.

2° On peut se rendre compte de l'erreur commise dans la vérification des lois expérimentales du pendule composé, lorsqu'on prend pour longueur des pendules sphériques la distance du point de suspension au centre de la sphère. En effet, soit d cette distance et r le rayon de la sphère. En calculant le rayon de gyration d'une sphère par rapport à l'un de ses diamètres, on le trouve égal à $\frac{2}{5}r^2$. On a donc, pour la longueur vraie du pendule, c'est-à-dire pour la longueur du pendule simple synchrone,

$$L = d + \frac{2}{5}\frac{r^2}{d}$$

(en négligeant la masse du fil qui soutient la boule). Or, au lieu de cette longueur L, on prend une longueur $l = d$. L'erreur commise est donc $(L - l)$, c'est-à-dire $\frac{2}{5}\frac{r^2}{d}$. Pour $d = 1^m$ et $r = 25^{mm}$, ce terme correctif est inférieur à $1/4^{mm}$. Il n'est donc pas étonnant que cette faible différence n'influe pas sur la vérification des lois.

106. **Théorème d'Huygens : Réciprocité de l'axe d'oscillation et de l'axe de suspension. — Pendules réversibles.** — 1° *Définitions.* — Soit XX' l'axe de suspension d'un pendule composé (fig. 92) : lorsque le pendule est au repos, le plan vertical passant par XX' contient le centre de gravité G ; par suite, la verticale du point G va couper l'axe XX' en un certain point O. La longueur OG est la distance du centre de gravité à l'axe de suspension : c'est ce que nous avons appelé a. Si, à partir du point G, nous prenons sur le prolongement de OG une longueur GO_1 égale à $\frac{K^2}{a}$, la longueur $OO_1 \left(= a + \frac{K^2}{a}\right)$ est la longueur du pendule composé. Un point matériel placé en O_1 et relié au point fixe O par un fil O_1O, inextensible et sans poids, constituerait un pendule simple synchrone du pendule composé. Les points O_1 et O, qui sont conjugués, s'appel-

lent quelquefois, le premier, *centre d'oscillation*, et le deuxième, *centre de suspension*.

Menons par O_1 une droite YY' parallèle à l'axe XX'. Un point quelconque M de cette droite, étant rejoint à l'axe XX' par une droite MO' parallèle à O_1O, les points conjugués M et O' se trouvent dans les mêmes conditions que les points O_1 et O. En effet, si l'on place en M un point matériel, et qu'on le relie au point fixe O' par un fil inextensible et sans poids, on constituera un pendule simple, ayant une longueur $MO' = O_1O = a + \frac{K^2}{a}$, qui, par suite, sera synchrone du pendule composé. Il en sera de même de tous les points de l'axe YY'. C'est pourquoi l'on appelle cette droite l'*axe d'oscillation* du pendule composé. Nous l'avions déjà définie plus haut (105) et nous en avions démontré, sans calcul, l'exis-

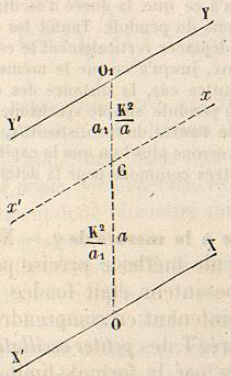

Fig. 92.

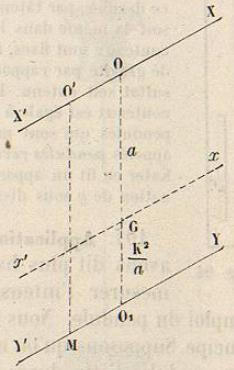

Fig. 93.

tence nécessaire. Elle jouit d'une propriété qu'a découverte Huygens et qu'on peut énoncer sous la forme suivante :

2° Théorème. — *L'axe d'oscillation d'un pendule composé est réciproque de son axe de suspension.*

Cela veut dire que, si l'on suspend le pendule par l'axe XX', de manière que l'axe d'oscillation devienne l'axe de suspension, réciproquement l'axe de suspension primitif XX' deviendra axe d'oscillation (fig. 93) : autrement dit, le lieu des des pendules simples synchrones du nouveau pendule composé, ainsi constitué, sera précisément l'axe XX'.

En effet, soit L_1 la longueur du nouveau pendule composé, et a_1 la distance de son centre de gravité G au nouvel axe de suspension. Le centre de gravité ne change pas de place par rapport aux autres points du pendule, par suite de cette interversion, pas plus que le rayon de gyration K ne change de valeur. On a donc

$$L_1 = a_1 + \frac{K^2}{a_1}.$$

Or on voit, en comparant les figures 92 et 93, que l'on a

$$a_1 = \frac{K^2}{a},$$

et par suite

$$\frac{K^2}{a_1} = \frac{K^2}{\frac{K^2}{a}} = a.$$

Par conséquent

$$L_1 = \frac{K^2}{a} + a = L. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

3° *Pendules réversibles.* — Cette curieuse propriété peut être utilisée pour déterminer expérimentalement la longueur d'un pendule composé. Il suffit, pour cela, d'encastrer dans la tige deux couteaux (fig. 94), pouvant servir tour à tour d'axe de suspension. Tantôt l'un d'eux, O, est fixe, et l'autre, C, est mobile : on peut alors déplacer ce dernier, par tâtonnements, jusqu'à ce que la durée d'oscillation soit la même dans les deux positions du pendule. Tantôt les deux couteaux sont fixes, mais l'on peut déplacer verticalement le centre de gravité par rapport aux couteaux, jusqu'à ce que le même résultat soit obtenu. Dans l'un et l'autre cas, la distance des deux couteaux est égale à la longueur du pendule simple synchrone. Les pendules qui sont munis de l'un ou l'autre de ces dispositifs, sont appelés *pendules réversibles.* Nous verrons plus loin que le capitaine Kater en fit un appareil de voyage très commode pour la détermination de g sous diverses latitudes.

Fig. 94.

107. **Application du pendule à la mesure de g.** — Nous avons dit plus haut que la seule méthode précise pour mesurer l'intensité de la pesanteur était fondée sur l'emploi du pendule. Nous pouvons maintenant en comprendre le principe. Supposons qu'on mesure la durée T des *petites oscillations* d'un pendule. Cette durée est exprimée par la formule-limite du pendule, en fonction des éléments de l'appareil et de l'intensité de la pesanteur. On a

$$[1] \qquad T = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}, \qquad \text{d'où l'on tire} \qquad g = \frac{\pi^2 L}{T^2}. \qquad [2]$$

Il suffira d'évaluer L, longueur du pendule simple synchrone du pendule employé, pour que tout soit connu dans la formule [2], sauf l'accélération g. Lorsque la longueur L sera évaluée en mètres et la durée T en secondes, le nombre g sera rapporté au mètre et à la seconde. Il représentera la vitesse en mètres acquise par un corps pesant, tombant librement dans le vide, après la première seconde de chute. Nous avons démontré plus haut que le même nombre représente l'*intensité de la pesanteur*, c'est-à-dire l'action de la pesanteur sur l'unité de masse.

Cette méthode, imaginée et indiquée par Huygens, fut, pour la première fois, appliquée avec succès par Borda. Nous allons exposer les expériences de Borda, qui sont classiques, en indiquant, à l'occasion, les perfectionnements de détail apportés par les nombreux expérimentateurs, entre autres par Biot et Arago, qui les ont répétées après lui. Nous dirons ensuite quelques mots des expériences de Kater, faites d'après la même méthode, mais avec un appareil tout différent.

108. **Expériences de Borda.** — 1° *Méthode.* — Borda employa la méthode d'Huygens, mais non la formule-limite du pendule. Il se servit de la formule

$$T = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right),$$

qui représente très exactement la durée d'une oscillation de très faible amplitude, mais non *infiniment petite.* Ses expériences comportaient donc plusieurs mesures de précision :

I. La mesure de T, durée d'une oscillation simple;

II. La mesure de L, longueur du pendule simple synchrone du pendule qu'il faisait osciller;

III. La mesure de α, amplitude des oscillations dont il mesurait la durée.

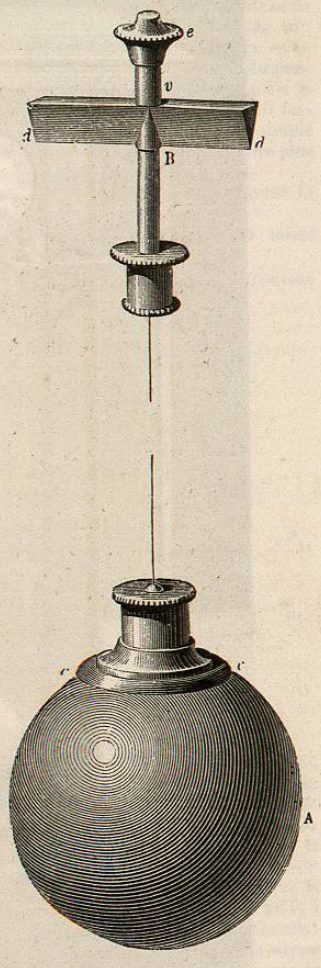

Fig. 95.

2° *Description du pendule de Borda.* — L'appareil se compose de deux parties bien distinctes : le pendule proprement dit A, et le couteau de suspension B (fig. 95).

A. Le pendule proprement dit est formé d'une lourde sphère en platine (d'environ 36 millimètres 1/2 de diamètre), soutenue par un fil métallique très fin. (Le fil de Borda était en fer; Biot y substitua un fil en cuivre, pour le soustraire à l'influence magnétique de la terre.) Le fil y était fixé par l'intermédiaire d'une calotte métallique très mince *cc*, s'adaptant exactement sur la surface sphérique : le simple contact des deux surfaces, préalablement enduites d'une mince couche de suif, suffit pour en maintenir l'adhérence, et la masse du pendule se trouve ainsi suspendue au fil.