Les mêmes perfectionnements se trouvent dans l'appareil de M. Cailletet pour la liquéfaction des gaz réputés permanents.

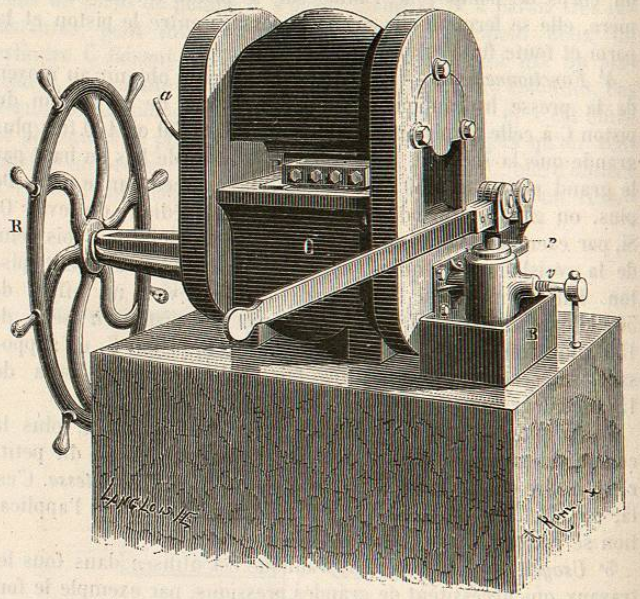


Fig. 152.

# CHAPITRE II

## PROPRIÉTÉS DES LIQUIDES PESANTS EN ÉQUILIBRE

PRESSIONS SUR LES PAROIS DES VASES. — PRESSIONS SUR LES CORPS IMMERGÉS. — CONDITIONS D'ÉQUILIBRE DES LIQUIDES PESANTS.

146. **Existence des pressions dans les liquides pesants en équilibre.** — Les liquides, comme tous les autres corps, sont *pesants*, c'est-à-dire soumis à l'action de la pesanteur, à la surface de la terre. En hydrostatique, on appelle plus particulièrement *liquides pesants* les liquides que l'on considère comme n'étant soumis à d'autres forces extérieures que celles de la pesanteur. Dans un liquide pesant en équilibre, le poids seul des molécules suffit pour développer des pressions qui se transmettent et s'exercent dans tous les sens, soit dans l'intérieur de la masse, soit sur les parois du vase, et toujours normalement à la surface pressée. Il est facile de constater par l'expérience l'existence de ces pressions.



*Pression verticale de haut en bas.* — La pression verticale de haut en bas résulte directement du poids des molécules liquides accumulées. Pour la mettre en évidence, il suffit de verser un liquide quelconque dans un vase cylindrique en verre, fermé par un fond horizontal mobile, qui serait par exemple une soupape s'ouvrant de haut en bas. On verra la soupape céder à la pression, dès que la quantité de liquide versée sera suffisante. Nous montrerons plus loin comment on peut mesurer l'intensité de cette pression.

*Poussée. — Expérience de l'obturateur.* — La pression que les couches supérieures d'un liquide exercent sur les couches inférieures fait naître dans celles-ci une *réaction verticale de bas en haut*, qui est une conséquence du principe de Pascal. Cette pression constitue la *poussée des liquides*. Elle est très sensible lorsqu'on plonge la main dans un liquide, surtout s'il a une grande densité, comme le mercure. On peut la constater et la mesurer par l'*expérience de l'obturateur*. L'appareil se compose d'un tube large en verre A, ouvert à ses deux extrémités (fig. 153). Le bord inférieur est rodé horizontalement et l'on peut le fermer hermétiquement en y appliquant soit un disque de verre dépoli O, lequel constitue proprement l'*obturateur*, soit tout simplement une carte mince, de poids négligeable. On plonge l'appareil dans l'eau, en soutenant l'obturateur par un fil attaché en son milieu, et on lâche le fil dès que l'immersion est assez profonde. L'obturateur reste alors appliqué contre le tube, ce qui indique qu'il supporte, de bas en haut, une pression supérieure à son poids. On pourrait évaluer grossièrement cette pression, soit en versant lentement de l'eau sur l'obturateur, soit en le chargeant de poids marqués, jusqu'à le détacher du tube.

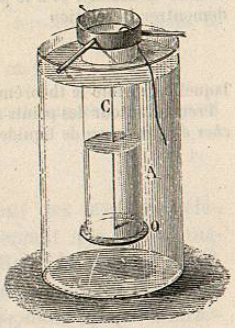


Fig. 153.

*Pressions obliques.* — On constaterait de même l'existence de pressions obliques ou verticales, en appliquant l'obturateur sur

des tubes dont le bord inférieur serait orienté et rodé suivant des directions quelconques.

147. **Théorème fondamental.** — La transmission de ces pressions dans les liquides pesants en équilibre se fait d'après la loi suivante :

*La différence des pressions en deux points quelconques d'un liquide pesant en équilibre est égale au poids d'un cylindre du liquide ayant pour base l'unité de surface et pour hauteur la distance verticale de ces deux points.*

Cette loi est le fondement de la théorie de l'équilibre des liquides pesants. On peut la considérer, soit comme un principe, analogue au principe de Pascal, c'est-à-dire l'admettre *à priori* et la vérifier dans ses conséquences, soit comme un théorème de mécanique et la démontrer par le raisonnement. Nous procéderons des deux manières successivement.

148. **Démonstration du théorème fondamental.** — Soient A et A′ les deux points, $l$ leur distance et $h$ leur distance verticale, $\varpi$ et $\varpi'$ les pressions (définies comme ci-dessus), et $d$ le poids de l'unité de volume du liquide. Il s'agit de démontrer la relation

$$\varpi' - \varpi = hd,$$

laquelle exprime le théorème.

Prenons autour des points A et A′, dans des directions quelconques, des *tranches élémentaires* de liquide. Comme elles sont en équilibre, nous pouvons les solidifier par la pensée (fig. 154). Soit $\omega$ la surface de l'élément A. Imaginons un cylindre ayant pour base cet élément et ses génératrices parallèles à AA′ : il découpera une surface $\omega'$ dans l'élément A′. Nous avons ainsi un filet cylindrique infiniment petit, dont le volume est, comme on sait, égal à $\sigma l$, $\sigma$ étant la section droite et $l$ la distance des centres de gravité des bases, laquelle peut être confondue avec la distance AA′.

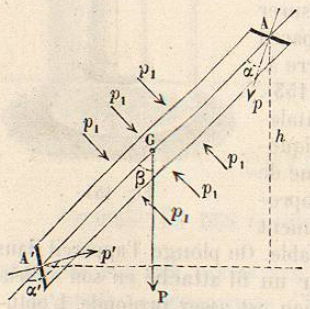


Fig. 154.

Ce filet liquide étant en équilibre, nous pouvons également le solidifier par la pensée. Tout se passe alors comme si c'était un corps solide en équilibre sous l'action d'un système quelconque de forces, constitué par son poids et par les pressions diverses qu'exerce à sa surface le liquide ambiant. Nous avons vu en mécanique que, dans le cas général, il y a six conditions d'équilibre. Une seule d'entre elles nous suffira ici, pour les besoins de la démonstration. Nous exprimerons que, si l'on projette toutes les forces du système sur une droite quelconque, par exemple sur l'axe AA′ du cylindre, *la somme algébrique de ces projections doit être nulle.*

Or ces forces sont :

1° Le poids P du filet, appliqué en son centre de gravité G, et faisant un angle $\beta$ avec l'axe de figure. Il est égal $\sigma l d$, ou à $\frac{\sigma h d}{\cos\beta}$, en remarquant que $l = \frac{h}{\cos\beta}$ ;

2° La pression élémentaire $p$, qui fait un angle $\alpha$ avec AA′ ; elle est égale à $\varpi\omega$, ou à $\frac{\varpi\sigma}{\cos\alpha}$, en remarquant que $\omega = \frac{\sigma}{\cos\alpha}$ ;

3° La pression élémentaire $p'$, qui fait un angle $\alpha'$ avec AA′ ; elle est égale à $\varpi'\omega'$, ou à $\frac{\varpi'\sigma}{\cos(180^0 - \alpha')}$, car $\omega' = \frac{\sigma}{\cos(180^0 - \alpha')}$ ;

4° Les pressions latérales, $p_1 \ldots, p_n$, qui sont normales à la surface du cylindre, et par conséquent perpendiculaires à l'axe.

Pour obtenir les projections de toutes ces forces, il suffit de multiplier chacune d'elles par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec la direction AA′.

On a ainsi l'équation d'équilibre

$$P\cos\beta + p\cos\alpha + p'\cos\alpha' = 0.$$

Les angles $\beta$ et $\alpha$ étant aigus, l'angle $\alpha'$ est obtus ; son cosinus est donc négatif. Mettons ce signe en évidence, en remplaçant $\cos\alpha'$ par le cosinus du supplément. On a

$$\cos\alpha' = -\cos(180^0 - \alpha')$$

et l'équation devient, en faisant passer les deux derniers termes dans le second membre,

$$p'\cos(180^0 - \alpha') - p\cos\alpha = P\cos\beta.$$

En remplaçant $p'$, $p$ et P par leurs valeurs, données ci-dessus, et en supprimant les facteurs communs, il vient

$$\varpi' - \varpi = hd. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$



Remarques. — I. On voit que les directions des pressions élémentaires n'interviennent dans le raisonnement que d'une manière transitoire et qu'elles disparaissent dans le résultat final. C'est ce que l'on exprime en disant que, *dans un liquide pesant en équilibre, la pression élémentaire est la même dans toutes les directions autour d'un point*, ou bien qu'*elle est indépendante de l'orientation de l'élément.*

II. Les pressions exercées par les liquides pesants et leurs conditions d'équilibre peuvent se déduire, dans tous les cas, du théorème fondamental, comme des corollaires.

149. **Conditions d'équilibre d'un liquide pesant.** — Citons, par exemple, les conditions d'équilibre d'un liquide pesant.

Il y en a deux, l'une tout à fait générale et l'autre particulière au cas où le liquide a une surface libre. (On appelle *surface libre* d'un liquide sa surface terminale dans l'air ou dans le vide.)

1° *La pression doit être la même en tous les points d'un même plan horizontal, pris à un niveau quelconque dans le liquide.*

2° *La surface libre du liquide doit être plane et horizontale.*

En effet, soient $p$ et $p'$ les pressions en deux points quelconques pris sur un même plan horizontal. On a entre $p$ et $p'$ la relation $p' = p + zd$; et puisque $z = 0$, $p' = p$.

Réciproquement, si les pressions $p$ et $p'$ sont égales en deux points quelconques d'une surface, prise dans un liquide pesant, la relation générale, qui peut s'écrire $zd = p' - p$, se réduit à $zd = 0$. Comme $d$ n'est pas nul, on en conclut que $z = 0$; donc les points sont sur un même plan horizontal.

Or la surface terminale, dans l'air ou dans le vide, c'est-à-dire la surface libre, supporte en tous ses points la même pression; donc elle forme un plan horizontal.

La plupart de ces conséquences sont susceptibles d'une démonstration expérimentale directe. Leur ensemble constituera donc une rigoureuse vérification *à posteriori* du théorème fondamental.

PRESSIONS SUR LES PAROIS DES VASES.

150. **Pressions sur le fond plan et horizontal d'un vase.** — THÉORÈME. — *Dans un liquide pesant en équilibre, les pressions sur le fond plan et horizontal du vase ont une résultante unique, verticale et dirigée de haut en bas, égale au poids d'un cylindre du liquide ayant pour base le fond et pour hauteur sa distance à la surface libre. Elle est appliquée au centre de gravité de la surface du fond.*

La proposition n'est rigoureusement vraie que dans le cas du vide. Dans le cas ordinaire, où le liquide se trouve dans l'air ou dans un gaz, sa surface libre supporte une pression, que nous apprendrons à mesurer plus tard. Il faut alors ajouter au poids du cylindre liquide la pression exercée par le gaz sur une portion de la surface libre égale au fond du vase.

*Démonstration.* — Soit AB le fond plan et horizontal; soit MN la surface libre : nous avons vu qu'elle est nécessairement plane et horizontale. Sur chacun des éléments de surface, tels que $\sigma$, s'exerce une pression élémentaire $p$. Toutes ces pressions, étant verticales, ont une résultante égale à leur somme et appliquée au centre des forces parallèles de AB (fig. 155). On a donc

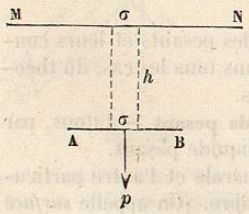

Fig. 155.

$$P = \Sigma (p).$$

Or, en un point de l'élément, la pression $\varpi$ est

$$\varpi = \varpi' + hd,$$

$\varpi'$ étant la pression que l'atmosphère exerce en un point de la surface libre et $h$ la distance de ce niveau au fond. On a donc

$$p = \varpi'\sigma + \sigma hd$$



et

$$P = \Sigma \varpi'\sigma + \Sigma hd\sigma.$$

Comme $\varpi'$ est constant, ainsi que $h$ et $d$, on peut écrire

$$P = \varpi' \Sigma \sigma + hd \Sigma \sigma;$$

$\Sigma (\sigma)$ est égal à la surface S du fond. On a donc enfin

$$P = S\varpi' + Shd.$$

Le terme $S\varpi'$ représente la pression de l'atmosphère sur une surface égale à celle du fond. *Comme cette pression s'exerce également dans tous les sens sur les parois extérieures du vase, nous la négligerons ici, ainsi que dans les théorèmes suivants.* Il reste donc

$$P = Shd. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

151. **Vérification expérimentale.** — De là il résulte que la pression sur le fond d'un vase dépend de la grandeur de ce fond, ainsi que de la profondeur et de la densité du liquide, mais qu'elle est *indépendante de la quantité de liquide et de la forme du vase.* C'est cette conséquence qu'on vérifie expérimentalement à l'aide de plusieurs appareils; nous en décrirons deux, également en usage dans les cours de physique : celui de Haldat et celui de Pascal, modifié par Masson.

1° *Appareil de Haldat.* — Cet appareil se compose d'un tube coudé ABC, terminé en A par un robinet de cuivre sur lequel on peut visser successivement deux vases M et P, de même hauteur, mais de forme et de capacité différentes (fig. 156). Pour faire l'expérience, on commence par verser du mercure dans le tube ABC, de manière que le niveau n'atteigne pas tout à fait le robinet A. On visse alors sur le tube le vase M, qu'on remplit d'eau; celle-ci, par son poids, refoule le mercure qui s'élève dans le tube C, où l'on en repère le niveau au moyen d'une virole $a$, qui peut glisser le long du tube. On marque de même le niveau de l'eau dans le vase M à l'aide d'une tige mobile $o$ placée au-dessus. Cela fait, on vide le vase M au moyen du robinet, on le dévisse et on le remplace par le vase P. Si l'on verse de l'eau dans celui-ci, le mercure, qui avait repris son premier niveau dans les deux branches du tube ABC, s'élève de nouveau dans le tube C, et lorsque, dans le vase P, l'eau atteint la hauteur qu'elle avait dans le vase M, ce qu'on reconnaît au moyen de la tige $o$, le mercure reprend dans le tube C le même niveau que dans le premier cas : ce qu'indique la virole $a$. On conclut de là que, dans les deux cas, la pression transmise au mercure dans la direction ABC est la même. Cette pression est donc indépendante de la forme du vase et de la

quantité de liquide. Quant au fond du vase, il était évidemment le même dans les deux cas : c'était la surface libre du mercure dans l'intérieur du tube A.

2° *Appareil de Masson.* — Dans l'appareil de Masson (fig. 157), la pression de l'eau contenue dans le vase M ne s'exerce plus, comme précédemment, sur une colonne de mercure, mais sur un disque ou obturateur *a*, qui ferme une tubulure *c*, sur laquelle est

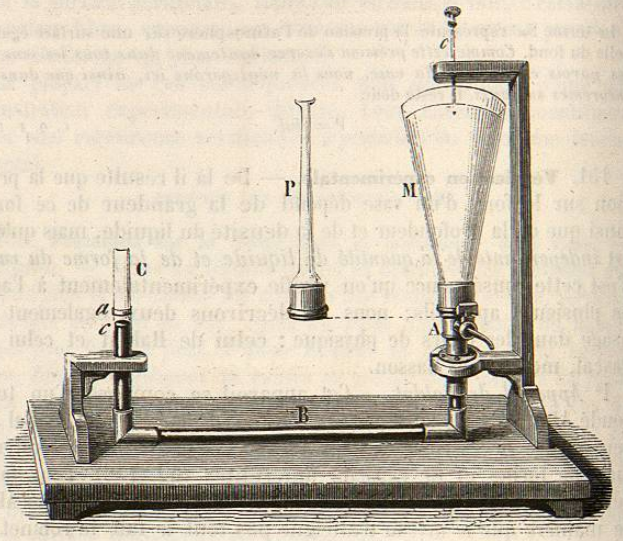


Fig. 156.

vissé le vase M. Ce disque n'est pas fixé à la tubulure, mais seulement soutenu par un fil attaché à l'extrémité du fléau d'une balance. A l'autre extrémité est un bassin dans lequel on met des poids jusqu'à ce qu'ils fassent équilibre à la pression exercée par l'eau sur l'obturateur. Vidant alors le vase M, on le dévisse et l'on met à sa place le tube étroit P. Or, si l'on remplit celui-ci d'eau jusqu'à la même hauteur que précédemment, ce qu'on reconnaît au moyen du repère *o*, on observe que, pour soutenir l'obturateur, il faut mettre dans le plateau juste le même poids qu'auparavant. Cela conduit à la même conclusion que l'expérience de Haldat. Même résultat si, au lieu du tube vertical P, on visse sur la tubulure *c* le tube oblique Q.



152. **Conséquences.** — 1° *Tonneau de Pascal.* — Il résulte des deux expériences précédentes qu'avec une très petite quantité de liquide on peut produire des pressions considérables. Pour cela, il suffit de fixer à la paroi d'un vase fermé et plein d'eau un tube d'un petit diamètre et d'une grande hauteur. Ce tube étant rempli d'eau, la pression transmise sur la paroi du vase est égale au poids d'une colonne d'eau qui aurait pour base cette paroi et une hauteur égale à celle du tube. Pascal est parvenu ainsi, avec un simple filet d'eau de 10 mètres de hauteur, à faire éclater un tonneau solidement

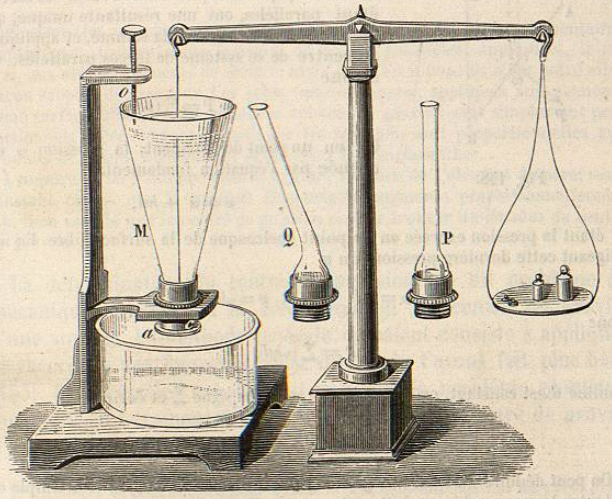


Fig. 157.

construit. Cette expérience s'appelle quelquefois expérience du *tonneau de Pascal.*

2° *Pression au fond des mers.* — D'après le principe ci-dessus, on peut calculer les pressions qui se produisent au fond des mers. L'unité de mesure usitée est la pression de l'atmosphère, laquelle équivaut, pour une surface donnée, au poids d'un cylindre d'eau pure ayant pour base cette surface et environ $10^m,33$ de hauteur. Or les naturalistes qui ont récemment exploré le fond des mers, à bord du *Talisman*, puis du *Travailleur*, ont observé que la sonde ne touchait pas quelquefois à une profondeur de 8000 mètres et plus. C'est donc une pression de plus de 800 fois celle de l'atmosphère qui s'exerce au fond de certaines mers.

153. **Pressions sur une paroi plane latérale.** — THÉORÈME. — *Dans un liquide pesant en équilibre, les pressions exercées sur une portion plane de paroi latérale ont une résultante qui est normale à la paroi et égale au poids d'un cylindre du liquide ayant pour base la portion de paroi et pour hauteur la distance de son centre*

*de gravité à la surface libre. Elle est appliquée en un point qu'on appelle centre de pression.*

*Démonstration.* — Menons un plan vertical perpendiculaire à la paroi, prenons-le pour plan de la figure. Soient MN, AB les sections de la surface libre et de la portion plane de paroi (fig. 158). Sur chacun des éléments de surface, tels que $\omega$, s'exerce une pression élémentaire $p$ qui lui est normale. Toutes ces forces, étant parallèles, ont une résultante unique, qui leur est parallèle, égale à la somme, et appliquée au centre de ce système de forces parallèles. On a donc

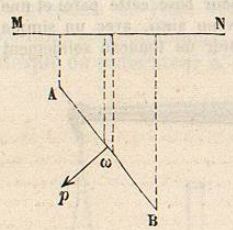

Fig. 158.

$$P = \Sigma (p).$$

Or, en un point de l'élément, la pression $\varpi$ est donnée par l'équation fondamentale

$$\varpi = \varpi' + hd,$$

$\varpi'$ étant la pression exercée en un point quelconque de la surface libre. En négligeant cette dernière pression, on a

$$\varpi = hd \quad \text{et} \quad p = \omega hd;$$

donc

$$P = \Sigma (\omega hd).$$

Comme $d$ est constant, on peut le faire sortir du signe $\Sigma$ et écrire

$$P = d \Sigma (\omega h).$$

On peut déduire du *théorème général des moments* un moyen très simple de calculer la somme des produits tels que $\omega h$. En effet, remarquons d'abord que si l'on multiplie chacun de ses termes par $\delta$, poids spécifique de l'unité de surface de la paroi, toute la somme sera elle-même multipliée par $\delta$, et l'on aura

$$\Sigma (\omega h \delta) = \delta \Sigma (\omega h).$$

Or $\omega\delta$ est le *poids* de l'élément de paroi $\omega$, et $h$ étant la distance de son point d'application (lequel est un point quelconque de l'élément) au plan de la surface libre, le produit $\omega h \delta$ s'appelle le *moment de la force* $\omega d$ par rapport *au plan* MN. La somme $\Sigma (\omega h \delta)$ est donc la somme des moments des poids des divers éléments de la portion de paroi. D'après le théorème des moments (qui s'applique aux moments par rapport à un plan aussi bien qu'aux autres moments), cette somme est égale au moment de la résultante, c'est-à-dire au moment du poids total de la portion de paroi. Soit S la surface totale de cette portion, son poids est $S\delta$ ; soit H la distance du centre de gravité à la surface libre, le moment du poids total est $SH\delta$. On a donc

$$\Sigma (\omega h \delta) = SH\delta \quad \text{ou} \quad \delta \Sigma (\omega h) = SH\delta.$$

En divisant les deux membres par $\delta$, il vient

$$\Sigma (\omega h) = SH.$$



En portant cette valeur dans l'équation de la pression totale, on a

$$P = SHd. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

**154. Centre de pression.** — C'est *le point d'application de la pression totale sur la portion de paroi considérée.* Il est nécessairement distinct du *centre de gravité* de cette paroi, lequel est le point d'application du poids total de sa surface, supposée pesante.

En effet, les pressions élémentaires d'une part, et les poids élémentaires d'autre part, forment deux systèmes de forces parallèles, appliquées, il est vrai, aux mêmes éléments de surface, mais dont les intensités n'ont entre elles aucun rapport de grandeur. Les poids (qu'on suppose appliqués aux éléments d'une surface, afin d'en déterminer le centre de gravité) sont simplement proportionnels à ces éléments, tandis que les pressions sont proportionnelles aux produits de chaque élément par sa distance à la surface libre.

A mesure qu'on s'enfonce dans le liquide, le poids de l'élément de paroi reste constant, tandis que la pression élémentaire augmente proportionnellement à $h$. Il en résulte que le centre de pression *doit se trouver au-dessous* du centre de gravité.

La détermination du centre de pression est un problème de mécanique, analogue à la détermination du centre de gravité d'une surface. La méthode générale de calcul consiste à appliquer le théorème des moments, ainsi que nous l'avons fait plus haut (153). Dans certains cas, on peut résoudre le problème géométriquement, en le ramenant à la détermination du centre de gravité d'un volume facile à construire.

1er Exemple. — *Rectangle à fleur d'eau.* — Prenons une portion de paroi plane qui soit un rectangle ABCD, ayant l'un de ses côtés AB à fleur d'eau (fig. 159)

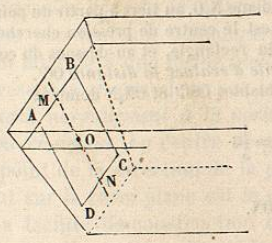

Fig 159.

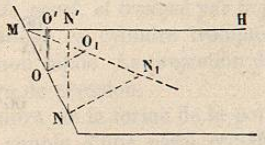

Fig. 160.

En chaque point, tel que O, s'exerce une pression élémentaire $p$, normale à la paroi. La pression totale P est la somme de ces pressions : $P = \Sigma (p)$. Nous allons construire un volume qui représentera P en grandeur et en direction.

Soit HMN une coupe verticale du liquide et du vase, passant par le diamètre MN du rectangle (fig. 160). La pression élémentaire $p$ est dirigée suivant $O_1 O$, elle est égale au poids d'un filet cylindrique ayant pour base un élément $\omega$;

pris autour du point O, et pour hauteur la normale $OO_1 = OO'$, distance de l'élément $\omega$ à la surface libre.

*Le lieu des points* $O_1$, c'est-à-dire le lieu des sommets des filets cylindriques correspondant à la ligne MN, *est la droite* $MN_1$. Pour le prouver, il suffira d'établir qu'en un point quelconque, tel que N, on a $NN' = NN_1$. Or les triangles semblables $MOO_1$ et $MNN_1$ donnent $\frac{NN_1}{OO_1} = \frac{MN}{MO}$ et les triangles semblables MOO' et MNN' donnent $\frac{NN'}{OO'} = \frac{MN}{MO}$, d'où l'on déduit $\frac{NN_1}{OO_1} = \frac{NN'}{OO'}$; comme $OO_1 = OO'$, il s'ensuit que $NN_1 = NN'$. *Le lieu des mêmes sommets* $O_1$, pour toute la surface du rectangle, *sera*, pour la même raison, *le plan passant par* $O_1$ *et par la trace* AB *de la surface libre du liquide sur la paroi* (fig. 161).

L'ensemble des filets cylindriques élevés sur chaque élément du rectangle sera donc limité par ce plan $O_1AB$, et puis par des plans normaux à la paroi, élevés suivant AD, DC et CB. On voit, en faisant la figure, que ces quatre plans constituent un prisme triangulaire $N_1ABCD$ (fig. 161). Le poids total du liquide contenu dans ce prisme représente, *en grandeur*, l'intensité de la pression totale. Or, si l'on suppose que les poids des filets élémentaires, au lieu d'être verticaux, soient normaux à la paroi, on ne changera pas la position du centre de ces forces parallèles, lequel est le centre de gravité du prisme. Donc la pression totale P (qui est la résultante de ces forces normales) passe par ce centre de gravité. Comme elle est, en outre, normale à la paroi, le point où elle coupe celle-ci est le centre de pression. *Le centre de la pression sera donc la projection sur le rectangle du centre de gravité du prisme.*

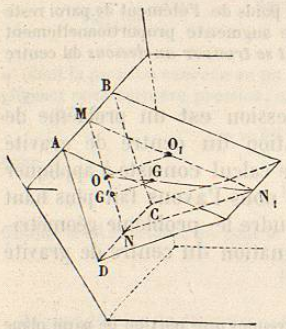

Fig. 161.

Or le centre de gravité G du prisme coïncide avec celui du triangle $MNN_1$, lequel est un plan de symétrie. Il est donc en G sur la médiane $N_1O$, au tiers à partir du point O. La projection G' du point G sur la paroi est le centre de pression cherché. On voit qu'il est situé sur le diamètre MN du rectangle, et au-dessous du centre O qui en est le centre de gravité. *Il est facile d'évaluer la distance* OG'.

*Distance* G'O. — Les deux triangles semblables OGG' et $ON_1N$ donnent

$$\frac{OG'}{ON} = \frac{OG}{ON_1} = \frac{1}{3};$$

donc

$$OG' = \frac{1}{3} ON.$$

Comme

$$ON = \frac{1}{2} MN,$$

on a

$$OG' = \frac{1}{6} MN.$$

Enfin

$$MG' = MO + OG' = \frac{1}{2} MN + \frac{1}{6} MN = \frac{2}{3} MN.$$



2e Exemple. — *Rectangle immergé.* — Que devient le centre de pression G', si le rectangle ABCD, au lieu d'être à fleur d'eau, se trouve à une certaine profondeur dans le liquide, tout en restant orienté de la même manière, c'est-à-dire parallèlement à la surface libre?

Nous résoudrons la question très simplement, en remarquant que la construction précédente est une construction plane, qui s'effectue tout entière dans le plan de symétrie $MNN_1$, et qu'il doit en être de même toutes les fois que la portion de paroi considérée a pour axe de symétrie une ligne de plus grande pente, et pour plan de symétrie le plan vertical mené par cet axe.

Soit H'HN la section du vase et du liquide par le plan vertical de symétrie du rectangle ABCD (fig. 162). Répétons la construction ci-dessus. Le volume liquide, dont le poids représente la pression, est un tronc de prisme qui a pour section méridienne le trapèze $MM_1N_1N$. On peut le partager en deux volumes, au moyen d'un plan $M_1K$, parallèle à la paroi. L'un de ces volumes est un parallélépipède rectangle qui a pour section $M_1MNK$ et son centre de gravité en $G_2$, milieu de OO'. L'autre partie est un prisme triangulaire, identique à celui du cas précédent : il a son centre de gravité en $G_1$, au tiers de la médiane $N_1O'$. Le poids du volume total étant la résultante des poids de ces deux volumes partiels, le centre de gravité du volume total est situé sur la ligne $G_2G_1$, entre les deux points $G_1$ et $G_2$. Donc la projection de ce point sur la paroi, c'est-à-dire *le nouveau centre de pression*, sera située entre le point O, centre de gravité du rectangle, et le point *g*, qui est l'ancienne position du centre de pression.

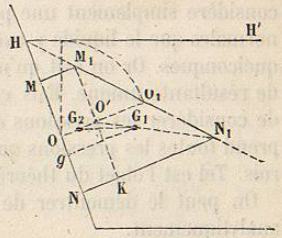

Fig. 162.

Donc, *lorsque la portion de paroi s'enfonce dans le liquide, son centre de pression remonte vers son centre de gravité, tout en restant au-dessous de ce point.*

*Généralisation de la solution.* — Le même raisonnement et la même construction s'appliquent au cas où la portion plane de paroi latérale a une forme quelconque. La pression totale est alors représentée en grandeur *par le poids d'un cylindre du liquide, circonscrit normalement à la portion de paroi, et tronqué par le plan défini ci-dessus.* Le centre de gravité de ce cylindre tronqué est un point de la direction de la pression totale. La projection de ce point sur la paroi plane est le centre de pression.

La facilité de construction dépendra de la forme de la portion de paroi. Nous avons étudié le cas simple d'une paroi rectangulaire dont l'un des bords est à fleur d'eau; nous avons vu que le centre de pression est sur le diamètre vertical, aux deux tiers de la longueur à partir de la surface libre. On peut citer d'autres cas. Sur une *paroi triangulaire dont la base est horizontale et à fleur d'eau*, le centre de pression est *au milieu de la ligne qui joint le sommet du triangle avec le sommet de cette base.* Si la paroi triangulaire a *son sommet à fleur d'eau et sa base hori-*

*zontale*, le centre de pression se trouve *sur la ligne qui joint le milieu de cette base au sommet et aux trois quarts à partir de ce point.*

155. **Pressions sur l'ensemble des parois d'un vase.** — THÉORÈME. — *Dans un liquide pesant en équilibre, toutes les pressions exercées sur l'ensemble des parois du vase qui le contient, quelle que soit sa forme, ont une résultante unique, dirigée de haut en bas, et égale au poids total du liquide.*

Ce théorème, comme les précédents, est un corollaire du théorème fondamental. Il n'est pas évident *à priori*. En effet, si l'on considère simplement une portion courbe de paroi, les pressions normales que le liquide y exerce constituent un système de forces quelconques. Or on sait qu'un pareil système n'a pas, en général, de résultante unique. Mais cette résultante existe lorsque, au lieu de considérer les pressions exercées sur une portion de paroi, on prend toutes les pressions qui s'exercent sur l'ensemble des parois. Tel est l'objet du théorème.

On peut le démontrer de deux manières, synthétiquement et analytiquement.

*Démonstration synthétique.* — Soit un liquide pesant en équilibre dans un vase qui le contient. Le liquide et l'ensemble des parois du vase constituent un système matériel en équilibre sous l'influence de deux systèmes de forces opposées : d'une part, les poids des molécules liquides, qui ont une résultante unique égale au poids total du liquide; d'autre part, les résistances ou réactions, $f$, $f'$, $f''$, que les éléments de paroi opposent aux éléments liquides juxtaposés. Ce dernier système, faisant équilibre au premier, a nécessairement une résultante unique, égale et opposée au poids total du liquide. Or ces réactions élémentaires des parois sont égales et opposées, chacune à chacune, aux pressions élémentaires $p$, $p'$, $p''$ du liquide sur la paroi : donc ce dernier système a aussi une résultante unique précisément égale au poids total des liquides et dirigée dans le même sens.

*Démonstration analytique.* — Elle consiste à considérer les pressions élémentaires $p'$, $p'$... du liquide sur les parois comme un système de forces quelconques appliquées à un corps solide, et à en chercher la résultante par la méthode générale.

On décomposera chacune des pressions en trois composantes, suivant trois directions rectangulaires quelconques. On substituera ainsi au système primitif trois systèmes de forces parallèles. Chacun de ces systèmes ayant une résultante unique, le système primitif se trouvera finalement réduit à trois forces quelconques, et il sera alors facile de voir si ces trois forces ont ou n'ont pas une résultante unique.

Soit un vase de forme quelconque (fig. 163), HH' la surface libre du liquide, $Ox$, $Oy$, $Oz$ trois axes de coordonnées rectangulaires quelconques. Soit un élément $\omega$ pris autour d'un point M de la paroi. Soient $p$ la pression au point M et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles qu'elle fait avec les trois axes. En appliquant la règle du parallélépipède des forces, on décompose $p$ en trois composantes, qui ont pour intensités respectives $p \cos \alpha$, $p \cos \beta$ et $p \cos \gamma$ (fig. 164). En effectuant la décomposition sur chacune des forces $p$, on a trois systèmes de forces respectives



ment parallèles à chacun des axes coordonnés. Chacun d'eux a une résultante égale à la somme. Ces trois résultantes partielles sont :

$$X = \sum (p \cos \alpha), \qquad Y = \sum (p \cos \beta), \qquad Z = \sum (p \cos \gamma).$$

Analysons les termes qui constituent chacune de ces sommes.

Concevons un filet cylindrique parallèle à $Ox$ et circonscrit à l'élément $\omega$ (fig. 163) : il découpera dans la partie opposée de la paroi un élément $\omega'$. Soient $p'$ la pression sur ce dernier élément et $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma$ les angles que fait sa direction

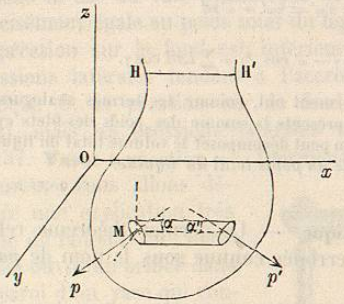


Fig. 163.

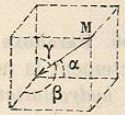


Fig. 164.

avec les axes. A chaque élément $\omega$ de la paroi correspond de même un élément $\omega'$ *et rien qu'un*. Les composantes de la pression $p'$ sont $p' \cos \alpha'$, $p' \cos \beta$, $p' \cos \gamma$. On peut donc grouper tous les termes de la somme $\sum (p \cos \alpha)$ par couples de deux, correspondant à un même filet parallèle à $Ox$, et écrire

$$X = \sum (p \cos \alpha + p' \cos \alpha').$$

Évaluons ces binômes.

Soit $\varpi$ la pression au point M; elle est également $\varpi$ au point M', puisque ces deux points sont sur un même plan horizontal. On a donc

$$p = \pi\omega \qquad \text{et} \qquad p' = \pi\omega'.$$

Si nous menons deux plans perpendiculaires à l'axe en PQ et en P'Q', nous avons deux sections droites du cylindre qui sont égales (fig. 165). Soit $\sigma$ la grandeur de la section droite. PQ étant la projection de $\omega$, on a

$$PQ \text{ ou } \sigma = \omega \cos (180^0 - \alpha) = -\omega \cos \alpha.$$

On a de même

$$P'Q' \text{ ou } \sigma = \omega' \cos \alpha'.$$

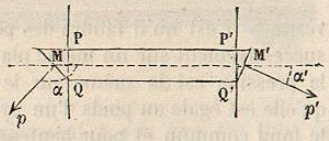


Fig. 165.

On a donc

$$\sigma = \omega' \cos \alpha' = -\omega \cos \alpha.$$

Substituons ces valeurs dans la somme X, il vient, toutes réductions faites,

$$X = \sum (\pi\sigma - \pi\sigma) = 0.$$

On démontrera de la même manière que Y est identiquement nul.

On peut appliquer le même mode de raisonnement à l'évaluation de la somme Z. On arrivera à une somme de binômes tels que

$$p \cos \gamma + p' \cos \gamma'.$$

Mais ici, les points M et M' n'étant plus sur le même plan horizontal, on aura

$$\pi' = \pi + zd_1,$$

par conséquent

$$p' = \pi'\omega' = \pi\omega' + \omega' zd$$

et

$$Z = \sum \pi' (\omega \cos \gamma - \omega' \cos \gamma') + \sum \omega zd \cos \gamma.$$

Le premier terme est identiquement nul, comme les termes analogues des autres sommes. Le deuxième représente la somme des poids des filets cylindriques verticaux, dans lesquels on peut décomposer le volume total du liquide: *cette somme est évidemment égale au poids total du liquide.*

C. Q. F. D.

156. **Paradoxe hydrostatique.** — Ce dernier théorème réfute directement la proposition erronée connue sous le nom de *paradoxe hydrostatique*.

Un paradoxe est une proposition contraire à l'opinion commune. Or, si l'on a trois vases, A, B, C (fig. 166), de même fond, mais de formes et de capacités différentes, remplis d'eau jusqu'à la même hauteur, l'opinion commune — conforme d'ailleurs à la

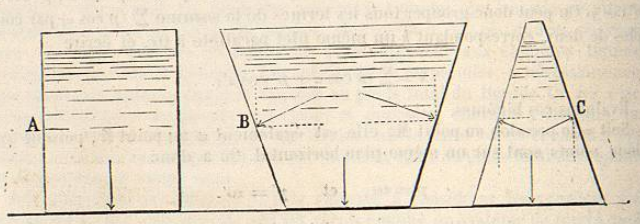


Fig. 166.

vérité — c'est qu'il faudra des poids différents pour les équilibrer successivement sur un même plateau de balance. Mais on sait que la pression est la même sur le fond de chacun de ces vases, et qu'elle est égale au poids d'un cylindre du liquide ayant pour base le fond commun et pour hauteur la hauteur commune du liquide au-dessus du fond. Il semble donc en résulter nécessairement qu'en plaçant dans l'un des plateaux un poids marqué, égal à cette pression, on équilibrera successivement les trois vases placés dans l'autre plateau. C'est cette conséquence fausse d'un principe vrai qui constitue le paradoxe.



L'erreur consiste à raisonner, dans ce cas, comme si le fond de chaque vase était détaché et indépendant des parois latérales, ainsi que cela a lieu dans l'expérience de Masson. Les parois, étant solidaires, transmettent au plateau, non pas seulement la résultante partielle des pressions exercées sur le fond, mais la résultante totale des pressions exercées sur l'ensemble : or nous avons vu que *cette résultante est égale, dans tous les cas, au poids total du liquide.*

Dans le cas du vase cylindrique A, la pression sur le fond est précisément égale au poids total du liquide; dans le vase évasé B, la pression sur le fond est inférieure au poids total, mais les pressions latérales tendent à l'accroître; enfin, dans le vase conique C, la pression sur le fond est supérieure au poids total, mais les pressions latérales tendent à la diminuer.

157. **Vases à réaction.** — *Tourniquet hydraulique.* — Du même théorème nous allons déduire une explication très nette du fait suivant : Lorsqu'on ouvre un orifice dans la paroi d'un vase qui contient un liquide pesant en équilibre, en même temps que ce liquide s'échappe du vase, celui-ci tend à se mouvoir *en sens contraire de l'écoulement.* Si le vase est disposé de manière à obéir aisément à cette impulsion, on a ce qu'on appelle un *vase à réaction.* Le type de ces appareils est le *tourniquet hydraulique.*

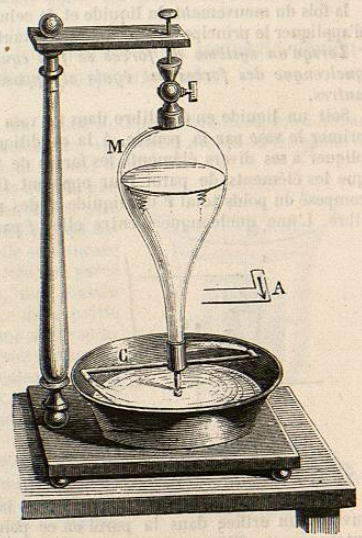


Fig. 167.

Il se compose d'un vase de verre M (fig. 167), reposant sur un pivot, de manière à pouvoir tourner librement autour d'un axe vertical. Ce vase porte, à sa partie inférieure, perpendiculairement à son axe, un tube de cuivre C, coudé horizontalement et en sens contraires à ses deux extrémités. L'appareil étant rempli d'eau, il reste parfaitement immobile aussi longtemps que les orifices du tube coudé restent bouchés. Mais dès que ceux-ci sont ouverts, le liquide s'échappe