dant, sa vitesse acquise, refoulant le mercure, le fait monter. Enfin les mouvements tournants étudiés ci-dessus sous le nom de tourbillons sont toujours précédés et suivis d'une forte hausse, tandis qu'en leur partie centrale on observe une baisse d'autant plus prononcée que le mouvement tournant est plus rapide et embrasse une plus grande étendue de pays.

Outre les variations de pression atmosphérique qui résultent des variations de température, la hauteur du baromètre est donc soumise à de nombreuses causes accidentelles. Quoi qu'il en soit, *une forte baisse est toujours le pronostic d'une grave perturbation dans l'atmosphère.* Cependant le beau temps et le calme s'observent encore quand le baromètre est bas, mais alors ils sont de courte durée.

Le baromètre peut être haut par tous les vents; mais c'est par le vent du nord qu'on observe les plus grandes hauteurs moyennes, et par le vent du sud les plus faibles. Enfin, toutes les variations brusques du baromètre, dans un sens ou dans l'autre, sont de courte durée, et annoncent, en général, le mauvais temps.

L'observation du baromètre n'est pas utile seulement aux marins, elle l'est aussi aux cultivateurs. Pour les premiers, ce qu'il importe de prévoir, c'est la direction et la force du vent, pour les seconds c'est l'état du ciel, c'est-à-dire la probabilité de pluie ou de sécheresse. Il est donc à désirer que l'usage du baromètre pénètre dans nos campagnes. « Un jour viendra, dit M. Marié-Davy, où chaque village aura son baromètre communal comme il a son horloge, et où le cultivateur le consultera chaque jour à la rentrée des champs, ou avant d'entreprendre son travail. »

1210. **Pronostics tirés du thermomètre et de l'hygromètre.** — Les pronostics tirés de ces instruments sont loin de valoir ceux qu'on tire du baromètre et des girouettes. Cependant leurs indications ne sont pas à négliger. Par exemple, l'hiver, le vent soufflant entre le nord et l'est, si le thermomètre est un peu au-dessous de zéro, et si l'hygromètre marque l'humidité, il y a grande probabilité de neige. En été, lorsque à la baisse du baromètre se joint une chaleur accablante, qu'en même temps l'hygromètre est à l'humidité et que des cumulus se montrent à l'horizon, on est menacé d'un orage.

1211. **Pronostics tirés des mouvements de l'aiguille aimantée.** — D'après les observations de M. Marié-Davy, la boussole doit être rangée parmi les instruments propres à donner des indications utiles sur les probabilités des changements de temps. Voici, en effet, comment s'exprime ce savant dans l'*Annuaire météorologique de* 1876, page 179 : « De l'étude que nous en avons commencée avec M. Descroix, il résulte déjà que les perturbations, ou de moindres anomalies, constatées dans la déclinaison, accusent presque toujours, et plusieurs jours à l'avance, le passage d'une bourrasque un peu forte dans le nord-ouest de l'Atlantique, ou l'arrivée des vents pluvieux. On peut donc ainsi être mis sur ses gardes, sauf à demander à d'autres signes l'indication, soit de la marche que suivra la tempête, soit de la région d'Europe sur laquelle s'étendront les pluies. »

1212. **Pronostics fournis par le spectroscope.** — M. Piazzi Smyth, à Édimbourg, en observant l'atmosphère avec le spectroscope, a reconnu, dans le spectre de la partie basse du ciel, une bande particulière, qui, lorsqu'elle se montre, est un pronostic de pluie encore plus certain que les indications du baromètre. Le savant astronome a fait cette remarque pour la première fois, à Palerme, en 1872. Depuis, il l'a répétée en France et à Édimbourg. C'est surtout en été que M. Smyth trouve le spectroscope efficace pour annoncer la pluie; en hiver, il préfère le baromètre.

FIN.

PROBLÈMES DE PHYSIQUE

AVEC SOLUTIONS

DONNÉS COMME SUJETS DE COMPOSITION A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS ET DANS LES FACULTÉS DE PROVINCE

Objet et résolution des problèmes de physique. — Les problèmes de physique proposés dans les examens sont, en général, de véritables problèmes d'algèbre dans lesquels c'est une loi physique qui lie les quantités connues à l'inconnue.

Que les données d'un problème soient représentées en lettres ou en chiffres, sa résolution se compose toujours de deux opérations bien distinctes : 1° *la mise en équation du problème*, c'est-à-dire la traduction en équation de la relation existant entre l'inconnue du problème et les quantités connues; 2° *la résolution de l'équation.*

La seconde opération, tout algébrique, exige la connaissance des opérations et des règles algébriques. La mise en équation demande avant tout la connaissance des lois de la physique. Le principe de physique dont le problème est une application étant connu, on n'aura qu'à appliquer la règle générale de Lacroix pour la mise en équation des problèmes d'algèbre :

Représenter la quantité que l'on cherche par une lettre, puis, raisonnant sur cette lettre absolument comme si la quantité qu'elle représente était connue, indiquer successivement, sur elle et sur les quantités connues du problème, la même série d'opérations qu'on aurait à effectuer pour vérifier l'inconnue si elle était trouvée.

PESANTEUR, GRAVITATION UNIVERSELLE.

I. — Pendant combien de temps doit tomber un corps dans le vide, pour acquérir, à Paris, une vitesse de 600 mètres, qui est celle d'un boulet de canon?

De la formule $v = gt$ on tire $t = \frac{v}{g}$, d'où, en remplaçant g et v par leurs valeurs, on a

$$t = \frac{600}{9{,}8088} = 61^s{,}16.$$

II. — Quel est le temps nécessaire à un corps pour tomber, dans le vide, d'une hauteur de 1000 mètres?

De la formule $e = \frac{1}{2} gt^2$ (86) on tire $t = \sqrt{\frac{2e}{g}} = \sqrt{\frac{2000}{9{,}8088}} = 14^s{,}28.$

III. — Un projectile étant lancé verticalement de bas en haut dans le vide, avec une vitesse initiale de $245^m{,}22$, on demande après quel temps le mobile s'arrêtera pour retomber, et à quelle hauteur il s'élèvera.

Soient a la vitesse initiale imprimée au mobile et t la durée de l'ascension ; la pesanteur agissant pendant ce temps comme force retardatrice, diminue la vitesse a d'une quantité égale à g en une seconde, et d'une quantité gt au bout-

de t secondes; on a donc, au moment où le corps s'arrête, $gt = a$, d'où

$$t = \frac{a}{g} = \frac{245,22}{9,8088} = 25^s.$$

Pour calculer la hauteur à laquelle s'élève le mobile, observons que, pendant son ascension, la pesanteur lui enlevant graduellement la vitesse qu'elle lui communiquerait en têmps égal s'il tombait, il faut que le corps mette à s'élever à sa plus grande hauteur e précisément le temps qu'il mettrait à en descendre. Donc la hauteur d'ascension peut se calculer par la formule $e = \frac{1}{2} gt^2$ (86), qui donne $e = 4^m,9044 \times 625 = 3065^m,25$.

IV. — Sur un plan incliné dont la longueur AB (fig. 46) égale 1000 mètres, et la hauteur BC 5 mètres, quel est l'effort nécessaire pour traîner un poids de 2500 kilogrammes, abstraction faite du frottement?

En représentant par P le poids et par F la force cherchée, on a vu (82) qu'on a l'égalité $\frac{F}{P} = \frac{BC}{AB}$, d'où $F = \frac{P \times BC}{AB} = \frac{2500 \times 5}{1000} = 12^k,500$.

V. — On suppose qu'un homme soulève à la fois 125 boulets de canon du poids de 2 kilogrammes; on demande quel serait le nombre de boulets pareils qu'il pourrait soulever, en déployant la même force musculaire, si la terre avait le volume de la lune, tout étant égal d'ailleurs. Le rayon de la terre étant pris pour unité, on prendra le rayon de la lune égal à 0,27234, et l'on ne tiendra pas compte de l'aplatissement de la terre et de la lune à leurs pôles.

Soient R le rayon de la terre et M sa masse; soient de même r et m le rayon et la masse de la lune; soient enfin N le nombre de boulets porté à la surface de la terre, le rayon étant R, N′ celui qui serait porté si, la masse de la terre restant la même, son rayon était r; et N″ le nombre qui serait porté, toujours à la surface de la terre, si, avec le rayon r, elle avait la masse m de la lune.

Les boulets pesant d'autant plus qu'ils sont plus rapprochés du centre de la terre, N′ est $<$ N, et l'on a $\frac{N}{N'} = \frac{R^2}{r^2}$ [1]. Au contraire, les nombres N′ et N″ étant en raison inverse des masses qui les attirent, on a $\frac{N'}{N''} = \frac{M}{m}$; ou, ce qui revient au même, à densité égale, $\frac{N'}{N''} = \frac{r^3}{R^3}$ [2], puisque, à densité égale, les masses sont proportionnelles aux volumes et ceux-ci aux cubes des rayons. Multipliant les égalités [1] et [2] membre à membre, il vient $\frac{N}{N''} = \frac{r}{R}$; d'où $N'' = N \times \frac{R}{r} = \frac{125 \times 1}{0,27234} = 459$ boulets.

HYDROSTATIQUE, CORPS FLOTTANTS ET POIDS SPÉCIFIQUES.

VI. — La force avec laquelle on fait marcher une presse hydraulique est de 20 kilogrammes; le bras de levier sur lequel agit cette force égale 5 fois celui de la résistance; enfin, la surface du grand piston vaut 70 fois celle du petit. On demande la pression transmise sur le grand piston.

En représentant par F la puissance, et par p la pression exercée par le levier sur le petit piston, on a, d'après le principe des leviers (133), $p \times 1 = F \times 5$ [1]. Or soit P la pression transmise au grand piston; on a, d'après le principe d'égalité de pression (140), $P \times 1 = p \times 70$ [2]. Substituant dans cette égalité la valeur de p donnée par l'égalité [1], il vient $P = 70 \times 5 \times F = 70 \times 5 \times 20^k = 7000^k$.

VII. — L'une des branches d'un siphon est remplie de mercure à une hauteur de $0^m,175$, l'autre est remplie d'un autre liquide à une hauteur de $0^m,42$; ces deux colonnes se faisant équilibre, on demande la densité du second liquide par rapport au mercure et par rapport à l'eau. La densité du mercure est 13,6.

En représentant par d la densité par rapport au mercure, et par d' la densité par rapport à l'eau, on a (168) $1 \times 0,175 = 0,42 \times d$, et $13,6 \times 0,175 = 0,42 \times d'$; d'où $d = 0,416$ et $d' = 5,666$.

VIII. — Étant donné un corps A, pesant dans l'air $7^{gr},55$, dans l'eau $5^{gr},17$, et dans un autre liquide B, $6^{gr},55$, de ces données tirer la densité du corps A et celle du liquide B.

D'après l'énoncé, le poids du corps A perd dans l'eau $7^{gr},55 - 5^{gr},17 = 2^{gr},38$; c'est le poids de l'eau déplacée. Dans le liquide B, il perd $7^{gr},55 - 6^{gr},55 = 1^{gr},20$; c'est le poids du liquide B sous le même volume que celui du corps et de l'eau. Donc le poids spécifique est $\frac{755}{238} = 3,172$, et celui de B $\frac{120}{238} = 0,504$ (169).

IX. — On a un cube de plomb de 4 centimètres de côté qu'on veut soutenir dans l'eau en le suspendant à une sphère de liège. Quel diamètre doit avoir celle-ci pour que sa poussée de bas en haut fasse équilibre au poids du cube de plomb, le poids spécifique de ce corps étant 11,35, et celui du liège 0,24?

Le volume du cube de plomb est 64 centimètres cubes; par conséquent, son poids dans l'air est $64 \times 11,35$, et son poids dans l'eau $64 \times 11,35 - 64 = 632^{gr},40$.

Si l'on représente par r le rayon de la sphère de liège, en centimètres, son volume, en centimètres cubes, sera $\frac{4\pi r^3}{3}$; donc son poids, en grammes, sera $\frac{4\pi r^3 \times 0,24}{3}$. Cela posé, le poids de l'eau déplacée par la sphère de liège étant évidemment en grammes $\frac{4\pi r^3}{3}$, il en résulte une poussée de bas en haut égale à

$$\frac{4\pi r^3}{3} - \frac{4\pi r^3 \times 0,24}{3} = \frac{4\pi r^3 \times 0,76}{3}.$$

Or cette poussée doit égaler le poids du plomb; donc $\frac{4\pi r^3 \times 0,76}{3} = 622^{gr},40$,

$$\text{d'où } r = \sqrt[3]{\frac{1987,20}{3,04 \times 3,1416}} = 5^c,923; \text{ donc le diamètre} = 11^c,85.$$

X. — Deux liquides, dont les densités sont 1 et $\frac{2}{3}$, sont disposés l'un au-dessus de l'autre et ne se mêlent pas. On plonge dans ces liquides une sphère dont la densité est $\frac{3}{4}$. On demande, lors de l'équilibre, le rapport des segments qui seront plongés dans les deux liquides.

Soit V le volume du segment supérieur et V′ celui du segment inférieur, c'est-à-dire plongé dans le liquide le plus dense. Le poids de la sphère est $\frac{3(V+V')}{4}$, et celui des liquides déplacés $\frac{V \times 2}{3} + V'$. Or les deux poids sont égaux, donc $\frac{3(V+V')}{4} = \frac{2}{3} V + V'$, d'où $V = 3V'$.

XI. — Un morceau de bois, dont la densité est 0,72 , a la forme d'un cône

droit. On le fait flotter sur l'eau de manière que son axe soit vertical. En mettant d'abord le sommet en bas, puis le sommet en haut, on demande quelle fraction de la hauteur du cône s'enfoncera dans chaque cas.

1° Soit V le volume total du cône, et v le volume de la partie immergée; soient H et h les hauteurs des deux cônes, D la densité du bois, d celle de l'eau.

Les volumes V et v étant de même poids sont en raison inverse de leurs densités; on a donc $\frac{V}{v} = \frac{d}{D}$, ou $\frac{H^3}{h^3} = \frac{d}{D}$, puisque les volumes des cônes semblables sont entre eux comme les cubes des hauteurs; d'où $h^3 = \frac{H^3 D}{d}$. La densité d étant égale à 1, et faisant aussi $H = 1$, il vient $h = \sqrt[3]{D} = \sqrt[3]{0,729} = 0,9$ de H.

2° Dans la seconde position du cône, soit v le volume non immergé, on a

$$\frac{V}{V-v} = \frac{d}{D}, \text{ ou } \frac{H^3}{H^3 - h^3} = \frac{d}{D}; \text{ d'où } h^3 = \frac{H^3(d-D)}{d} = 1 - D,$$

en faisant $H = 1$ et $d = 1$. Donc on a $h = \sqrt[3]{1 - 0,729} = 0,647$ de H.

XII. — Un cylindre de bois de hêtre flottant horizontalement sur l'eau (fig. 1107), on demande le rapport du volume immergé au volume surnageant, sachant que le poids spécifique du hêtre est 0,852, et que celui de l'eau est 1.

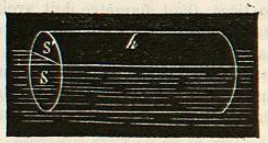

Fig. 1107.

Les deux volumes dont on cherche le rapport ayant même hauteur h, soient S et S' les segments de cercle qui leur servent de bases, le segment S étant immergé et le segment S' surnageant.

Le volume immergé est Sh, le volume surnageant $S'h$, et le volume total du cylindre est $(S + S')h$. Le poids du cylindre est donc $(S + S')h \times 0,852$, et celui de l'eau déplacée Sh; donc

$$(S + S')h \times 0,852 = Sh; \quad \text{d'où } \frac{S'}{S} = 0,173.$$

XIII. — Étant donnée une sphère de cuivre de $0^m,18$ de rayon, creuse et contenant une sphère de platine de $0^m,05$ de rayon, de telle sorte qu'il n'y ait aucun vide entre les deux sphères, on demande de calculer le poids de la masse ainsi formée, sachant que la densité du platine est 21,50, et celle du cuivre 8,85.

$$\text{Poids du platine} = \frac{21,50 \times 4\pi r^3}{3}, \quad \text{poids du cuivre} = \frac{8,85 \times 4\pi (R^3 - r^3)}{3}.$$

$$\text{Somme des poids} = \frac{4\pi}{3}(21,5 r^3 + 8,85 R^3 - 88,5 r^3)$$

$$= 4,1888(12,65 \times 5^3 + 8,85 \times 18^3) = 222^k,820^{gr},92.$$

XIV. — On fabrique avec de l'or, dont la densité est 19,362, des feuilles qui ont un dix-millième de millimètre d'épaisseur; quelle surface pourrait-on recouvrir avec 10 grammes d'or?

En appelant x la surface demandée, en centimètres carrés, $x \times 0^c,00001$ représente le volume des feuilles d'or, et $x \times 0^c,00001 \times 19,362$ leur poids; donc on a $x \times 0^c,00001 \times 19,362 = 10^{gr}$; d'où $x = 5^{mc},16^{dc},47^{cc}$.

XV. — Un verre à vin de Champagne, de forme conique, a intérieurement $0^m,06$ de diamètre au bord; il a été complètement rempli de mercure, d'eau et d'huile, en proportion telle, que la couche formée par chacun de ces liquides

a $0^m,05$ d'épaisseur. On sait que la densité du mercure est 13,596, celle de l'huile 0,915, et celle de l'eau 1. Calculer le poids du mercure, de l'eau et de l'huile, en négligeant l'influence de la température sur la densité de ces liquides.

D'après l'énoncé, on a $om = 3^c$ (fig. 1108), et

$$ok = ki = ia [= 5.$$

De plus, les triangles oma, kna et ipa étant semblables, il s'ensuit que $ip = \frac{1}{3} om = 1$, et $kn = \frac{2}{3} om = 2$.

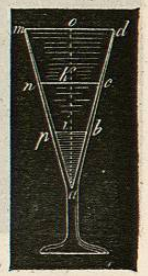

Fig. 1108.

Cela posé, le mercure se trouvant à la partie inférieure, puis l'eau et l'huile (167), le volume du cône abp occupé par le mercure égale $\pi . \overline{ip}^2 \times \frac{ai}{3} = \frac{3,1416 \times 1 \times 5}{3} = 5^{cent.\ cub.},236$.

Les volumes de l'eau et de l'huile sont des troncs de cônes qui se mesurent au moyen de la formule connue $\pi(R^2 + r^2 + Rr) \times \frac{H}{3}$, dans laquelle R et r sont les rayons des bases du tronc, et H sa hauteur.

Donc le volume d'eau $bcnp = \frac{3,14159 \times 5}{3}(4 + 1 + 2) = 36^{cent.\ cub.},652$,

et le volume d'huile $cdmn = \frac{3,14159 \times 5}{3}(9 + 4 + 6) = 99^{cent.\ cub.},484$.

Ces volumes connus, on aura les poids demandés, d'après la formule $P = VD$, en multipliant chaque volume par la densité correspondante. On trouve ainsi que le poids du mercure est $5,236 \times 13,596 = 71^{gr},188$; celui de l'eau, $36,652 \times 1 = 36^{gr},652$, et celui de l'huile, $99,484 \times 0,915 = 91^{gr},027$.

XVI. — Déterminer les volumes de deux liquides dont les densités sont, pour l'un 1,3, et pour l'autre 0,7, sachant que, si on les mélange, le volume est égal à 3 litres et la densité 0,9.

Soient v et v' les deux volumes demandés, on a d'abord $v + v' = 3^{lit}$ [1]; et d'après la formule $P = VD$, le poids de chaque liquide étant $v \times 1,3$ et $v' \times 0,7$, on a $1,3\, v + 0,7\, v' = 0,9 \times 3$ [2]. Résolvant les équations [1] et [2], on trouve $v = 1$ et $v' = 2$.

XVII. — Les décimes actuels pèsent 10^{gr}, et sont composés d'un alliage de 0,95 de cuivre, 0,04 d'étain, et 0,01 de zinc; la densité du cuivre est 8,85, celle de l'étain 7,29, et celle du zinc 7,12; combien faudrait-il de ces pièces pour fournir le métal nécessaire à la fabrication d'une sphère de même alliage de $0^m,25$ de diamètre à zéro?

Le volume v d'une pièce de 10 centimes est, d'après l'énoncé et d'après la formule $V = \frac{P}{D}$, $v = \frac{9,5}{8,85} + \frac{0,4}{7,29} + \frac{0,1}{7,12} = \frac{17491735}{15311916}$.

Or, le volume de la sphère étant $\frac{4\pi R^3}{3}$, le nombre des pièces est

$$\frac{4\pi R^3}{3} : v = \frac{4 \times 3,1416 \times (12^c,5)^3}{3} \times \frac{15311916}{17491735} = 7161,7.$$

XVIII. — Un vase de forme conique a $0^m,08$ de diamètre à son ouverture et $0^m,12$ de hauteur; il est placé d'aplomb et rempli de mercure et d'eau dans des proportions telles, que le poids du mercure est le triple du poids de l'eau. La température est zéro, la densité du mercure 13,598, et celle

de l'eau 1. On demande l'épaisseur de chaque couche liquide (fig. 1109).

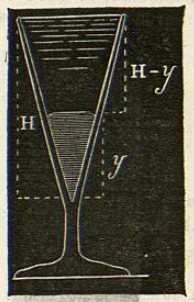

Fig. 1109.

Volume total $= \frac{1}{3}\pi R^2 H$; volume du mercure $= \frac{1}{3}\pi r^2 y$; et volume de l'eau $= \frac{1}{3}\pi(R^2H - r^2y)$. Donc le poids du mercure est $\frac{1}{3}\pi r^2 yd$, et celui de l'eau $\frac{1}{3}\pi \times (R^2H - r^2y)$; ce qui donne, d'après l'énoncé,

$$\frac{1}{3}r^2yd = R^2H - r^2y; \text{ d'où } y = \frac{3R^2H}{r^2(d+3)} = \frac{R^2}{r^2} \times \frac{3H}{d+3}.$$

$$\text{Or } \frac{R^2}{r^2} = \frac{H^2}{y^2} = \frac{144}{y^2}; \text{ donc } y = \frac{144}{y^2} \times \frac{36}{16,598},$$

$$\text{d'où } y = \sqrt[3]{\frac{144 \times 36}{16,598}} = 0^m,0678, \text{ et } H - y = 0^m,0522.$$

XIX. — Le poids spécifique du zinc étant 7 et celui du cuivre 9, quelles quantités de zinc et de cuivre doit-on prendre pour former un alliage qui pèse 50 grammes, et dont le poids spécifique soit 8,2, en admettant que le volume de l'alliage soit exactement la somme des volumes des métaux alliés ?

Soient x et y les poids de zinc et de cuivre demandés.

On a d'abord $x + y = 50$ [1]; et, d'après la formule $P = VD$, qui donne $V = \frac{P}{D}$, les volumes des deux métaux et de leur alliage sont respectivement $\frac{x}{7}$, $\frac{y}{9}$ et $\frac{50}{8,2}$; on a donc $\frac{x}{7} + \frac{y}{9} = \frac{50}{8,2}$ [2].

Résolvons les équations [1] et [2], on trouve $x = 17^{gr},07$ et $y = 32^{gr},93$.

XX. — Quel est l'effort F nécessaire pour soutenir une cloche pleine de mercure et plongée dans le même liquide, son diamètre intérieur étant de 6 centimètres, sa hauteur *ob* (fig. 1110) au-dessus du niveau du bain de 18 centimètres, et la hauteur du baromètre étant de $0^m,77$?

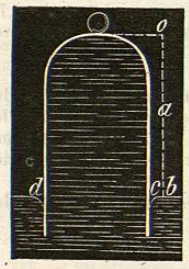

Fig. 1110.

A l'extérieur, cette cloche supporte, de haut en bas, une pression égale au poids d'une colonne de mercure qui aurait pour base la section *cd* et pour hauteur celle du baromètre; par conséquent cette pression égale $\pi R^2 \times 0,77 \times 13,596$.

A l'intérieur, elle supporte, de bas en haut, une pression égale à la pression atmosphérique, moins le poids d'une colonne de mercure qui aurait pour base la section *cd* et pour hauteur *ob*, c'est-à-dire que la pression de bas en haut égale

$$\pi R^2 \times (0,77 - 0,18) \times 13,596 = \pi R^2 \times 0,59 \times 13,596.$$

L'effort nécessaire pour soutenir la cloche sera donc égal à la différence de ces deux pressions ; on a

$$\pi R^2 (0,77 - 0,59) \times 13,596 = \pi R^2 \times 0,18 \times 13,596.$$

En faisant $R = 3$ centimètres, on trouve $F = 6^k,919^{gr}$.

XXI. — A quelle hauteur s'élève l'eau au premier coup de piston dans le

tuyau d'aspiration d'une pompe, la course du piston étant de $0^m,50$, la hauteur du tuyau d'aspiration de 6 mètres, et sa section $\frac{1}{10}$ de celle du piston? Au commencement de l'expérience, l'air dans le tuyau d'aspiration est à une pression égale à celle de 10 mètres d'eau.

En représentant par 1 la section du tuyau, celle du corps de pompe est 10, et les volumes du tuyau et du corps de pompe sont respectivement 6 et 5. Donc, en représentant par x la hauteur à laquelle s'élève l'eau dans le tuyau, les volumes d'air dans la pompe, avant et après l'ascension du piston, sont 6 à la pression 10, et $5 + 6 - x$ à la pression $10 - x$; d'où

$$6 \times 10 = (11 - x)(10 - x).$$

Résolvant, on trouve $x' = 18^m,26$ et $x'' = 2^m,74$.

La première valeur est une *solution étrangère* qui ne satisfait évidemment pas à la question; donc la hauteur à laquelle s'élève l'eau est $2^m,74$.

LOI DE MARIOTTE ET MÉLANGE DES GAZ.

XXII. — Dans un récipient de 3 litres on fait entrer : 1° 2 litres d'hydrogène à la pression de 5 atmosphères; 2° 4 litres d'acide carbonique à la pression de 4 atmosphères; 3° 3 litres d'azote à la pression de $\frac{1}{2}$ atmosphère. On demande la pression finale du mélange, la température étant supposée constante pendant l'expérience.

L'hydrogène passant du volume 2 au volume 3, sa pression diminue et devient $\frac{5 \times 2}{3}$; de même celle de l'acide carbonique devient $\frac{4 \times 4}{3}$, et celle de l'azote reste $\frac{1}{2}$. Or, d'après la deuxième loi du mélange des gaz (242), la force élastique du mélange doit égaler la somme des forces élastiques des gaz mélangés; donc la pression cherchée $= \frac{5 \times 2}{3} + \frac{4 \times 4}{3} + \frac{1}{2} = 9^{atm} + \frac{1}{6}$.

XXIII. — Un vase contenant 10 litres d'eau est d'abord exposé au contact de l'oxygène, à la pression $0^m,78$, un temps suffisant pour que l'eau absorbe tout ce qu'elle peut en dissoudre; ce même vase étant ensuite placé dans une atmosphère limitée de 100 litres d'acide carbonique, à la pression $0^m,72$, on demande les volumes des deux gaz dissous dans l'eau lorsque l'équilibre est établi. Le coefficient d'absorption de l'oxygène est 0,042, et celui de l'acide carbonique 1.

Le coefficient d'absorption de l'oxygène étant 0,042, 10 litres d'eau en dissolvent $0^{lit},42$. Or ce gaz, se comportant comme s'il était seul dans l'espace occupé par l'acide carbonique (243), occupe un volume de $100^{lit},42$, savoir 100 litres à l'état gazeux, et $0^{lit},42$ en dissolution dans l'eau. La tension de l'oxygène est donc $78 \times \frac{0,42}{100,42} = 0^c,326$.

De même, le coefficient de solubilité de l'acide carbonique étant 1, les 10 litres d'eau en dissolvent 10 litres, et le volume du gaz devient 110 litres, dont 100 à l'état gazeux et 10 en dissolution. La tension est donc

$$72 \times \frac{100}{110} = 65,454;$$

d'où la pression totale, après que l'équilibre s'est établi, est

$$0^c,326 + 65^c,454 = 65^c,780.$$

Donc le volume d'oxygène dissous, ramené à la pression $65^c,78$, est

$$0^{lit},42 \times \frac{0,326}{65,780} = 0^{lit},00208,$$

et celui de l'acide carbonique, à la même pression, $10^{lit} \times \frac{65,4545}{65,780} = 9^{lit},95$.

PERTE DE POIDS DANS LES GAZ. AÉROSTATS.

XXIV. — Pour faire équilibre au poids d'un lingot de platine placé dans le plateau d'une balance, on a placé dans l'autre plateau un poids de 27 grammes de cuivre jaune. Combien aurait-il fallu en mettre, si la pesée avait été faite dans le vide? — On sait que la densité du platine est 21,5, celle du cuivre jaune 8,3 et que l'air à 0° et à la pression $0^m,76$, condition dans laquelle on opère, pèse 770 fois mois que l'eau.

Le poids du laiton, dans l'air, n'est pas 27 grammes, car ce poids a été marqué dans le vide. Le vrai poids est 27 grammes moins le poids de l'air déplacé. Or, d'après la formule $P = VD$, le volume du laiton est $\frac{P}{D} = \frac{27^{gr}}{8,3}$ et le poids de l'air déplacé $= \frac{27^{gr}}{8,3 \times 770}$. Donc le poids réel du laiton dans l'air est $27^{gr} - \frac{27}{8,3 \times 770}$.

De même, si l'on représente par x le poids du platine dans le vide, son poids dans l'air le sera par x moins le poids de l'air déplacé, c'est-à-dire par

$$x - \frac{x}{21,5 \times 770}.$$

Ce poids devant égaler celui du laiton, on a

$$x - \frac{x}{21,5 \times 770} = 27 - \frac{27}{8,3 \times 770}; \quad \text{d'où} \quad x = 26^{gr},996.$$

XXV. — La densité de l'air étant 1, celle de l'hydrogène 0,069, et celle de l'acide carbonique 1,524 à 0° et à la pression $0^m,76$, un corps dans l'acide carbonique perd $1^{gr},15$ de son poids; on demande quelle serait sa perte de poids dans l'air et dans l'hydrogène.

On demande encore : 1° si le rapport des pertes de poids reste le même à la température de 200°, la pression ne changeant pas; 2° si ce rapport reste le même à la pression de 30 atmosphères, la température étant 0°.

Un litre d'air à 0° et à la pression $0^m,76$ pesant $1^{gr},3$, un litre d'acide carbonique, dont la densité est 1,524, pèse $1^{gr},3 \times 1,524 = 1^{gr},9812$. On aura donc le volume d'acide carbonique correspondant à $1^{gr},15$ en divisant $1^{gr},15$ par $1^{gr},9812$, ce qui donne pour quotient $0^{lit},5804$. Or, ce volume étant celui du corps, celui-ci déplace $0^{lit},5804$ d'air, et, par conséquent, sa perte de poids dans l'air (211) est $1^{gr},3 \times 0,5804 = 0^{gr},75452$. Quant à sa perte de poids dans l'hydrogène, elle est $0^{gr},75452 \times 0,069 = 0^{gr},052062$.

Le rapport des pertes de poids dans l'acide carbonique et dans l'hydrogène ne reste pas le même quand la température ou la pression change, parce que ces deux gaz ne sont pas également dilatables ni également compressibles.

XXVI. — Calculer la force ascensionnelle d'un ballon sphérique de taffetas qui, étant vide, pèse $63^k,620$, et qui est rempli d'hydrogène impur, sachant que le taffetas verni pèse $0^k,250^{gr}$ le mètre carré, le mètre cube d'air $1^k,300^{gr}$, et le mètre cube d'hydrogène $0^k,100^{gr}$.

La surface du ballon $= \frac{63^k,620}{0^k,250} = 254^{mq},48$. Or la surface du ballon, étant celle d'une sphère, est égale à $4\pi R^2$; on a donc $4\pi R^2 = 254^{mq},48$; d'où

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{254,48}{3,1416}} = \frac{1}{2}\sqrt{81,0035} = 4^m,50$$

et

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4 \times 3,1416 \times (4,5)^3}{3} = 381^{mc},7044.$$

Le poids de l'air déplacé est donc $1^k,3 \times 381,7044 = 496^k,216^{gr}$.

Le poids de l'hydrogène est $0^k,1 \times 381,7044 = 38^k,1704$; donc la force ascensionnelle est $496^k,216 - 38^k,170 - 63^k,620 = 394^k,426^{gr}$.

XXVII. — On a un aérostat sphérique de 4 mètres de diamètre; on l'emplit d'hydrogène impur, qui pèse 100 grammes le mètre cube; le taffetas verni dont est formée l'enveloppe pèse 250 grammes le mètre carré. On demande combien il faut d'hydrogène pour le remplir, et à quel poids il peut faire équilibre, sachant que l'air pèse 1300 grammes le mètre cube.

On a

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4 \times 3,1416 \times 8}{3} = 33^{mc},510$$

et

$$S = 4\pi R^2 = 4 \times 3,1416 \times 4 = 50^{mq},2656.$$

Par conséquent, le poids de l'hydrogène contenu dans le ballon est, d'après l'énoncé, $100^{gr} \times 33,510 = 3^k,351$; et celui de l'enveloppe égale

$$250^{gr} \times 50,2656 = 12^k,566.$$

Le poids total du ballon, y compris celui de l'hydrogène et de l'enveloppe, est donc $3^k,351 + 12^k,566 = 15^k,917$.

Mais le poids de l'air déplacé par le ballon, et, par suite, la poussée de bas en haut (211), est, d'après l'énoncé, $1^k,300 \times 33,510 = 43^k,563$. Donc le poids auquel le ballon peut faire équilibre est $43^k,563 - 15^k,917 = 27^k,646$.

MACHINES PNEUMATIQUE ET DE COMPRESSION.

XXVIII. — Sachant que la capacité du corps de pompe d'une machine pneumatique est $\frac{1}{3}$ de la capacité du récipient, calculer après combien de coups de piston simples la pression intérieure sera la 200e partie de ce qu'elle était primitivement.

Soit 1 la pression atmosphérique et 1 le volume du récipient. Après l'ascension du piston, ce volume sera $1 + \frac{1}{3}$, et par conséquent la pression de l'air sous le récipient sera $\frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$, puisqu'elle est en raison inverse du volume. De même, au second coup de piston elle est $\frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$ de ce qu'elle était après le premier, c'est-à-dire $\frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$ de $\frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$, ou $\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2}$.

On trouvera ainsi qu'après n coups de piston la pression est $\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^n}$ [1].

On a donc $\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^n} = \dfrac{1}{200}$, d'où $\left(1+\frac{1}{3}\right)^n = 200$, ou $\left(\frac{4}{3}\right)^n = 200$.

Prenant les logarithmes, il vient $n = \dfrac{\log 200}{\log 4 - \log 3} = 18{,}4$.

XXIX. — Un manomètre à air comprimé est divisé en 110 parties d'égale capacité ; quand la pression extérieure est de $0^m{,}76$, le mercure, dans l'intérieur du tube et dans la cuvette, se tient au zéro de l'échelle. On porte le manomètre sous le récipient d'une machine à comprimer l'air, et on voit le mercure s'élever jusqu'à la 80e division ; mesurant alors la hauteur du mercure dans le tube, on la trouve de $0^m{,}45$; on demande la pression dans la machine.

Fig. 1111.

Soit P la pression, en atmosphères, de l'air en AB (fig. 1111) ; la portion de l'échelle correspondant à AB étant 30, on a $\frac{P}{76} = \frac{110}{30}$, d'où $P = 2^m{,}787$. En y ajoutant la hauteur $0^m{,}450$ du mercure dans le tube, la pression totale est $3^m{,}237$.

Pour la réduire en atmosphères, il n'y a qu'à diviser $3^m{,}237$ par $0^m{,}76$, ce qui donne $4^{atm} + \frac{1}{4}$.

XXX. — On fait jouer le piston d'une machine pneumatique ; la capacité du récipient est de $7^{lit}{,}53$, et il est rempli d'air à la pression $0^m{,}76$ et à la température 0^0. On demande : 1° le poids de l'air lorsque la pression est réduite à $0^m{,}021$; 2° le poids de l'air extrait par le piston ; 3° le poids de l'air qui resterait dans la cloche à la température de 15^0.

1° A 0^0 et $0^m{,}76$ de pression, $7^{lit}{,}53$ d'air pèsent $1^{gr}{,}293 \times 7{,}53 = 9^{gr}{,}736$.

A 0^0 et $0^m{,}021$ de pression, le même volume pèse donc $\dfrac{9^{gr}{,}736 \times 21}{760} = 0^{gr}{,}269$.

2° Le poids de l'air retiré égale $9^{gr}{,}736 - 0^{gr}{,}269 = 9^{gr}{,}467$.

3° Le poids de l'air qui resterait, à 15^0, serait $\dfrac{0^{gr}{,}269}{1 + 0{,}00367 \times 15} = 0^{gr}{,}255$.

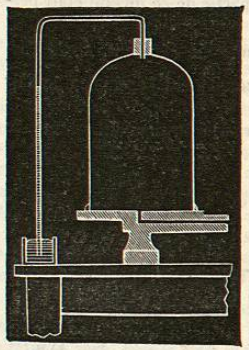
Fig. 1112.

XXXI. — La cloche d'une machine pneumatique renferme $3^{lit}{,}17$ d'air ; un baromètre communiquant avec la partie supérieure de la cloche marque zéro quand celle-ci est en communication avec l'atmosphère (fig. 1112). On ferme la cloche et on fait jouer la machine ; le mercure s'élève alors dans le baromètre de $0^m{,}65$. Un second baromètre, placé près de la machine, a marqué $0^m{,}76$ pendant toute l'expérience. On demande le poids de l'air qu'on a retiré de la cloche et le poids de celui qui reste, la température étant zéro.

A 0^0 et à $0^m{,}76$, le poids de l'air dans la cloche est $1^{gr}{,}3 \times 3{,}17 = 4^{gr}{,}121$.

A 0^0 et à la pression $76 - 65 = 11$, le poids de l'air qui reste dans la cloche est

$$\frac{1^{gr}{,}3 \times 3{,}17 \times 11}{76} = 0^{gr}{,}596.$$

Donc le poids de l'air retiré de la cloche est

$$4^{gr}{,}121 - 0^{gr}{,}596 = 3^{gr}{,}525.$$

ACOUSTIQUE.

XXXII. — Le bruit du canon a mis 15 secondes à se transmettre d'un lieu à un autre, la température étant de 22^0 ; on demande la distance entre ces deux lieux, sachant que la vitesse du son à zéro est de 333 mètres.

On a vu (336) que la vitesse du son dans l'air, à t degrés, est donnée par la formule $v' = v\sqrt{1 + \alpha t}$, α étant le coefficient de dilatation de l'air, et égal à 0,00367, et v étant la vitesse du son à zéro.

Donc la vitesse, à 22^0, égale $333\sqrt{1 + 0{,}00367 \times 22} = 346^m$. Or, cette vitesse étant le chemin parcouru par le son en une seconde, le chemin parcouru en 15 secondes est $346^m \times 15 = 5190$ mètres ; c'est la distance demandée.

XXXIII. — La densité du fer étant 7,8, celle du cuivre 8,9, on demande quel doit être le rapport des diamètres de deux fils cylindriques, l'un de fer, l'autre de cuivre, de longueurs égales et également tendus, pour qu'ils rendent la même note lorsqu'on les fait vibrer transversalement.

D'après la formule sur les vibrations transversales des cordes, $n = \frac{1}{rl}\sqrt{\frac{P}{\pi d}}$ (374), les poids, les longueurs et les nombres de vibrations étant les mêmes pour les deux fils, on a

$$\frac{1}{rl}\sqrt{\frac{P}{\pi d}} = \frac{1}{r'l}\sqrt{\frac{P}{\pi d'}}, \text{ ou, simplifiant, } \frac{1}{r}\sqrt{\frac{1}{d}} = \frac{1}{r'}\sqrt{\frac{1}{d'}};$$

$$\text{d'où } \frac{r^2}{r'^2} = \frac{d'}{d} = \frac{8{,}9}{7{,}8}, \text{ donc } \frac{r}{r'} = \sqrt{\frac{8{,}9}{7{,}8}} = 1{,}068.$$

XXXIV. — Ayant laissé tomber une pierre dans un puits, le son qu'elle produit en rencontrant l'eau ne se fait entendre que 3 secondes après qu'on l'a lâchée. Quelle est la profondeur du puits, sachant que le son parcourt 337 mètres par seconde ?

Représentons par v la vitesse du son, par x la profondeur du puits jusqu'à l'eau, et par T le temps qui s'écoule entre le commencement de la chute et la perception du son. De la formule $e = \frac{1}{2}gt^2$ (86) on tire $t = \sqrt{\frac{2e}{g}} = \sqrt{\frac{2x}{g}}$; c'est le temps que la pierre met à tomber.

Pour trouver le temps qu'il faut au son pour arriver à l'oreille de l'observateur, remarquons que, l'espace qu'il parcourt par seconde étant v, il lui faudra, pour l'espace x autant de secondes que x contient de fois v, c'est-à-dire $\frac{x}{v}$.

Donc $\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{v} = T$, ou $\sqrt{\frac{2x}{g}} = T - \frac{x}{v}$; d'où $\frac{2x}{g} = T^2 - \frac{2Tx}{v} + \frac{x^2}{v^2}$,

ou, en réduisant, $gx^2 - 2v(v + gT)x + v^2gT^2 = 0$.

Résolvant, on trouve $x = \frac{v}{g}\left\{ gT + v \pm \sqrt{v(2gT + v)} \right\}$.

Remplaçant v, g et T par leurs valeurs, on trouve

$$x = \frac{337}{9{,}81}\left\{ 9{,}81 \times 3 + 337 \pm \sqrt{337(2 \times 9{,}81 \times 3 + 337)} \right\};$$

d'où $$x = \frac{337}{9{,}81}(566{,}43 \pm 365{,}24);$$

ce qui donne les deux solutions, $x' = 25134^m,9$ et $x'' = 40^m,8$. La première est à rejeter, car elle représente un espace plus grand que celui que parcourt le son en 3 secondes. C'est une *solution étrangère*, due à l'élévation au carré du radical $\sqrt{\frac{2x}{g}}$ dans l'équation du problème. La profondeur du puits est donc de $40^m,8$.

XXXV. — Quelle doit être la tension, en kilogrammes, d'une corde de cuivre de $0^m,50$ de longueur et de $0^{mm},25$ de rayon pour qu'elle fasse 800 vibrations par seconde? La densité du cuivre est 8,87.

Comme il s'agit ici du nombre absolu de vibrations, on doit faire usage de la formule $n = \frac{1}{rl}\sqrt{\frac{gP}{\pi d}}$ (374). Remplaçant dans cette formule les lettres par les données du problème, et prenant pour unité le décimètre, il vient

$$800 = \frac{1}{0{,}0025 \times 5}\sqrt{\frac{98{,}088 \times P}{3{,}1415 \times 8{,}87}}\,; \quad \text{d'où} \quad P = 28^k,393^{gr},8.$$

XXXVI. — Un projectile est lancé horizontalement avec une vitesse de 200 mètres à la seconde. 5 secondes après l'instant du départ on entend le bruit produit par le choc du projectile contre un obstacle. La température est zéro. On demande à quelle distance l'observateur, placé au point de départ, est de l'obstacle.

$$\frac{e}{200} + \frac{e}{333} = 5^s, \quad \text{d'où} \quad e = 624^m,5.$$

XXXVII. Un tuyau ouvert donnant pour troisième harmonique $ré_3$, quelle est la longueur de ce tuyau en mètres, la température de l'air étant de 10°?

On sait que la_3 correspond à 435 vibrations doubles par seconde (369), et que le rapport de *ut* à *la* est 1 à $\frac{5}{3}$; on a donc $ut_3 \times \frac{5}{3} = 435$, d'où $ut_3 = 261$. Ut_3 une fois connu, on en déduit $ré_3$ en multipliant 261 par $\frac{9}{8}$, qui représente le nombre relatif de vibrations de *ré* par rapport à *ut* (363); donc

$$ré_3 = 261 \times \frac{9}{8} = 293\,\frac{5}{8}.$$

Cela posé, on sait que dans les tuyaux ouverts on a la relation $n = p \cdot \frac{v}{2L}$ (383), n étant le nombre des ondes sonores complètes par seconde, v la vitesse du son dans l'air, laquelle à 10° est de 337 mètres, L la longueur du tuyau de la bouche à l'extrémité, et p un nombre entier quelconque.

Faisant $p = 4$ pour avoir le son 4, ou le troisième harmonique, il vient

$$n = \frac{4v}{2L}, \quad \text{d'où} \quad L = \frac{2v}{n} = \frac{2.337}{293 + \frac{5}{8}} = 2^m,295.$$

XXXVIII. On demande le rang dans l'échelle musicale de l'harmonique 5, lorsqu'il est rendu, à la température de 10°, par un tuyau fermé de $3^m,23$ de longueur.

La formule des tuyaux fermés étant $L = (2p+1)\frac{v}{4n}$ (383), en y faisant $p = 2$ pour avoir le son du troisième rang, c'est-à-dire l'harmonique 5, il vient

$$L = \frac{5v}{4n}, \quad \text{d'où} \quad n = \frac{5}{L} = \frac{5.337^m}{4.3^m,23} = 130,4.$$

Or on a vu que ut_2 correspond à 130,5 vibrations complètes (369), donc l'harmonique 5 du tuyau donné est ut_2.

XXXIX. — Un tuyau ouvert donne un son de 100 vibrations par seconde, lorsqu'on y souffle de l'air à 10°; quelle devrait être la température de l'air introduit, pour que le son rendu fût la quinte majeure du premier?

On sait que, le son fondamental étant 1, la quinte majeure est $\frac{3}{2}$ (360), c'est-à-dire que les deux sons qui donnent la quinte sont entre eux comme 2 est à 3. Par conséquent, le son donné étant 100, le son cherché est 150.

Cela posé, la formule des tuyaux ouverts étant $L = p \cdot \frac{v}{2n}$ (383), si l'on y fait $p = 1$, on trouve pour le son fondamental $L = \frac{v}{2n}$; d'où l'on déduit, pour le premier son, $L = \frac{v'}{200}$, et pour le second, $L = \frac{v''}{300}$, v' étant la vitesse du son à 10°, et v'' sa vitesse à t°. De ces deux égalités on tire $\frac{v'}{200} = \frac{v''}{300}$. Or on sait (336) que $v' = v\sqrt{1+10\alpha}$ et $v'' = v\sqrt{1+\alpha t}$. On a donc

$$\frac{v\sqrt{1+10\alpha}}{220} = \frac{v\sqrt{1+\alpha t}}{300}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\sqrt{1+10\alpha} = \frac{1}{3}\sqrt{1+\alpha t}\,;$$

en élevant au carré et réduisant, on a enfin

$$9\,(1+10\alpha) = 4\,(1+\alpha t), \quad \text{ou} \quad 5 + 90\alpha = 4\alpha t\,;$$

résolvant cette dernière équation par rapport à t, et remplaçant α par sa valeur 0,00367 (647), on trouve $t = 358°$.

XL. — Un tuyau ouvert et un bourdon (tuyau fermé) ont une longueur commune de 2 mètres; on demande : 1° quel est le rapport musical qui existe entre les seconds harmoniques de ces tuyaux; 2° quel est le nombre absolu de vibrations qui caractérise l'un ou l'autre de ces tuyaux. — La température est de 20°, le coefficient de dilatation de l'air 0,00367, et la vitesse du son dans l'air à zéro 333 mètres.

1° On sait que, le son fondamental étant 1, le tuyau ouvert rend les harmoniques 2, 3, 4, 5, 6,... et le tuyau fermé les harmoniques 3, 5, 7,... (380). Les seconds harmoniques que l'on compare sont donc 3 et 5; mais comme, dans les tuyaux ouverts, un harmonique quelconque est à l'octave aiguë de l'harmonique de même rang dans les tuyaux fermés de même longueur (380), les nombres relatifs de vibrations des deux sons que l'on compare ne sont pas 3 et 5, mais 6 et 5; leur rapport est donc $\frac{6}{5}$, c'est-à-dire la tierce mineure (360).

2° Pour calculer le nombre absolu de vibrations qui caractérise un de ces deux sons, celui rendu par le tuyau ouvert, par exemple, prenons la formule $n = p \cdot \frac{v'}{2L}$, qui est celle des tuyaux ouverts, et dans laquelle v' représente a vitesse du son dans l'air à t degrés.

En y faisant $p = 3$ pour avoir le second harmonique, et $v' = v\sqrt{1+\alpha t}$ (336), il vient $n = \frac{3v\sqrt{1+\alpha t}}{2L}$ ou, remplaçant v, t, L par les valeurs données dans l'énoncé, $n = \frac{3.333\sqrt{1+0{,}08367 \times 20}}{4} = 258,7$.

Si l'on voulait calculer le nombre absolu des vibrations du deuxième son, on prendrait la formule $n' = \frac{(2p+1)\,v'}{4L}$; en y faisant $p = 2$ pour avoir le deuxième

harmonique, on trouve

$$z' = \frac{5v\sqrt{1+\alpha t}}{4L} = \frac{5.333\sqrt{1+0,00367\times 20}}{8} = 215,6.$$

Si l'on prend le rapport des deux nombres 258,7 et 215,6, on vérifie qu'il est $\frac{6}{5}$.

OPTIQUE.

XLI. — Voulant comparer l'intensité d'une lampe Carcel à celle d'une bougie, au moyen du photomètre de Rumford (fig. 447), on trouve que les ombres portées sur l'écran paraissent de même intensité lorsque, la bougie étant à 2 mètres de l'écran, la lampe en est à $4^m,74$. Quelle est l'intensité de la lampe, celle de la bougie étant prise pour unité?

Soit i l'intensité de la lampe à l'unité de distance : à la distance de $4^m,74$ elle sera $\frac{i}{(4,74)^2}$; de même, celle de la bougie, qui est 1 à l'unité de distance, sera $\frac{1}{4}$ à la distance de 2 mètres. Mais, à ces distances, les deux intensités sont égales; on a donc $\frac{i}{(4,74)^2} = \frac{1}{4}$, d'où $i = \frac{(4,74)^2}{4} = 5,617$.

XLII. — Une lampe et une bougie sont distantes l'une de l'autre de $3^m,15$ et, l'intensité de la lumière de la bougie étant 1 à l'unité de distance, celle de la lampe est 5,6; à quelle distance de la lampe, sur la ligne droite qui joint les deux lumières, doit-on placer un écran pour qu'il soit également éclairé par l'une et par l'autre, sachant que l'intensité d'une lumière est en raison inverse du carré de la distance?

Soit x la distance à laquelle l'écran doit être placé de la lampe; sa distance à la bougie sera $3^m,15 - x$. L'intensité de la lampe, qui est 5,6 à l'unité de distance, est $\frac{5,6}{x^2}$ à la distance x; et celle de la bougie, étant 1 à l'unité de distance, est $\frac{1}{(3,15-x)^2}$ à la distance $3^m,15 - x$. Mais alors les intensités sont égales; donc $\frac{5,6}{x^2} = \frac{x}{(3,15-x)^2}$, ou $\left(\frac{3,15-x}{x}\right)^2 = \frac{1}{5,6} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$.

En extrayant la racine, $\frac{3,15-x}{x} = \pm\sqrt{\frac{5}{28}} = \pm 0,442$; d'où l'on déduit les deux valeurs $x' = 2^m,21$ et $x'' = 5^m,45$. La première correspond à un point situé entre les deux lumières; la seconde donne un point situé sur le prolongement de la droite qui les joint.

XLIII. — Devant un miroir sphérique concave de $0^m,05$ de rayon, on place, à la distance de $3^m,40$, un objet BD (fig. 482) dont la hauteur est de $0^m,12$; on demande la distance de l'image au miroir et sa grandeur.

Ce problème se résout par la formule $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \frac{2}{R}$, donnée en optique (430), dans laquelle p représente la distance de l'objet au miroir, p' la distance de l'image, et R le rayon de courbure du miroir. D'après l'énoncé, on a, en centimètres, $p = 340$ et $R = 95$. Substituant dans l'équation ci-dessus, il vient

$$\frac{1}{340} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{95}; \quad \text{d'où} \quad p' = 55^c,2.$$

Pour calculer la grandeur db de l'image, il faut se rappeler ce qui a été dit

au § 433, dans lequel on a vu que, les triangles BDC et Cdb (fig. 482) étant semblables, on a $\frac{bd}{BD} = \frac{Co}{CK}$, d'où $bd = \frac{BD \times Co}{CK}$. Or, par hypothèse,

$$BD = 12, \quad CK = p - R = 3^m,4 - 0^m,95 = 2^m,45;$$

et d'après la valeur de p' on a $Co = CA - Ao = 95^c - 55^c,2 = 39^c,8$: donc

$$bd = \frac{12 \times 39,8}{245} = 1^c,95.$$

XLIV. — Quelle est la hauteur *minima* que doit avoir un miroir plan, placé verticalement, pour qu'une personne se tenant debout devant ce miroir s'y voie par réflexion de la tête aux pieds? Établir la position du miroir.

Soient A le sommet de la tête, B les pieds, O l'œil, et mm' le plan du miroir (fig. 1113). On sait que les images des points A et B se font aux points a et b, qui leur sont symétriques (416), et que par suite l'image ab est de même grandeur que l'objet, et la distance ma égale à mA. Or, l'œil voyant l'image ab sous l'angle aOb, il suffit que la hauteur du miroir soit égale à la portion de la droite mm' comprise dans cet angle, c'est-à-dire à MM'; mais, dans le triangle Oab, OM étant la moitié de Oa, $MM' = \frac{ab}{2} = \frac{AB}{2}$; donc la hauteur du miroir doit être au moins la moitié de celle de l'objet.

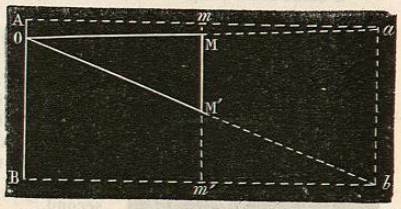

Fig. 1113.

Quant à la position du miroir, elle est déterminée par les points où les droites Oa et Ob rencontrent le plan mm'. Le triangle ObB fait voir que, Bm' étant la moitié de Bb, m'M' est la moitié de BO; c'est-à-dire que le miroir doit être placé, au-dessus du plan horizontal sur lequel posent les pieds de l'observateur, à une distance égale à la demi-hauteur de l'œil au-dessus du même plan. Dans toute autre position, plus haute ou plus basse, les points A et B ne se trouveraient pas simultanément dans le champ du miroir.

XLV. — Sur un miroir plan, tournant autour d'un axe vertical, tombe un rayon de lumière horizontale fixe; lorsque le miroir tourne d'un certain angle a, de quel angle tourne, dans le même temps, le rayon réfléchi?

Soient mn la première position du miroir, $m'n'$ la deuxième quand il a tourné d'un angle a, et OD le rayon incident fixe (fig. 1114). Si du centre de rotation C, avec un rayon arbitraire, on décrit une circonférence Omn, et que du point O, où elle coupe le rayon incident, on abaisse les cordes OO' et OO'' perpendiculaires sur mn et sur $m'n'$, les points O' et O'' étant les images du point O dans les deux positions du miroir, l'arc O'O'' mesure la déviation angulaire de l'image, et, par suite, du rayon réfléchi, tandis que

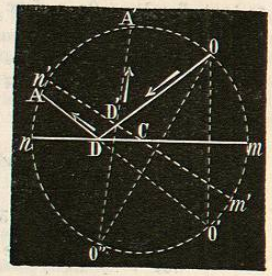

Fig. 1114.