COURS COMPLET

DE

MATHÉMATIQUES PURES.

LIVRE PREMIER.

ARITHMÉTIQUE.

CHAPITRE Ier.

DES NOMBRES ENTIERS.

Notions préliminaires. Système de Numération.

1. Concevons une réunion de choses semblables : pour en distinguer la grandeur, et la faire apprécier par le discours aux hommes qui n'en ont aucune connaissance, on en prend une portion définie et bien connue, mais arbitraire ; cette portion se nomme UNITÉ ; il faut ensuite indiquer combien de fois cette unité est contenue dans l'assemblage dont il s'agit, c'est-à-dire combien il faudrait réunir de ces unités pour produire un tout égal à cet assemblage. Cette quotité est ce qu'on nomme un NOMBRE, ou une QUANTITÉ. Ainsi, pour avoir la connaissance précise de la grandeur d'une chose, autrement que par la perception des sens, il faut d'abord acquérir, par les sens, celle d'une *portion* ou *unité*, puis celle du *nombre* de fois que la chose contient cette unité.

Pour dénommer les différents nombres, on a inventé les mots suivants : *un* désigne l'unité ; *deux* représente la réunion d'une unité

avec une autre unité ; *trois,* la réunion de deux unités avec une autre, ou celle d'une unité, plus une, plus encore une ; trois plus une donne *quatre,* et ainsi de suite ; l'augmentation successive d'une unité chaque fois engendre les nombres

zéro, un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf,

qu'on représente par les *chiffres* ou caractères

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

L'idée qu'on doit se faire, par exemple, du nombre *sept,* est *six plus un,* qui, d'après ce qu'on a dit, revient à *cinq plus deux,* ou à *quatre plus trois,* etc.

2. Cette opération par laquelle on réunit plusieurs assemblages en un seul, se nomme ADDITION ; on l'indique par le mot *plus,* ou par le signe $+$, qu'on nomme *positif,* et qui se place entre les nombres qu'on veut ajouter. Le résultat est appelé *la somme* des nombres.

Ajouter plusieurs nombres, ce n'est donc que les réunir en un seul dont on demande la grandeur, ou exprimer combien l'assemblage de plusieurs groupes d'objets identiques contient de fois une portion prise pour unité, et qui a servi de mesure à chaque groupe particulier. Ajouter 2 avec 3 et avec 4, ou trouver la somme 2 plus 3 plus 4, c'est réunir, en un seul, trois systèmes composés l'un de 2, l'autre de 3, et le dernier de 4 choses.

Le signe $=$ mis entre deux grandeurs indique qu'elles sont égales ; $2+3+4=9$, se lit : 2 *plus* 3 *plus* 4 *égalent* 9 ; cette égalité, ou *équation,* exprime l'addition précédente ; $2+3+4$ est le premier *membre,* 9 est le second. L'inégalité entre deux quantités se désigne par le signe $<$ ou $>$; on place la plus grande du côté de l'ouverture : $4<7$, $9>3$ s'énoncent *4 plus petit que* 7, *9 plus grand que* 3.

Il suit des notions précédentes, que si l'on augmente ou diminue l'un des nombres à ajouter, le résultat sera précisément plus grand ou plus petit de la même quantité : la somme ne serait nullement changée, si l'on augmentait l'un de ces nombres ajoutés, pourvu qu'on diminuât un autre d'autant d'unités. Par exemple : $4+7$ surpasse $4+5$ de 2, parce que 7 surpasse 5 de 2 ; mais

$$4+7=6+5=2+9=3+8.$$

3. Il arrive souvent que les nombres qu'on veut ajouter sont égaux entre eux, tels que $2+2+2+2=8$: cette espèce d'addition prend le nom de MULTIPLICATION, et s'énonce ainsi : 2 *répété*

4 *fois,* ou 4 *fois* 2, ou enfin 2 *multiplié par* 4 ; on l'écrit 2.4, ou 2×4 : les nombres 2 et 4 se nomment les *facteurs ;* 2 est le *multiplicande,* 4 le *multiplicateur,* et le résultat 8 le *produit.*

4. L'addition et la ~~multiplication~~ ont leurs opérations inverses. Dans l'addition, $5+4=9$, on demande la somme 9 des deux nombres donnés 5 et 4. Dans la SOUSTRACTION, ce résultat 9 est donné ainsi que l'un des nombres, tel que 5, et l'on demande l'autre 4 ; c'est-à-dire qu'il faut trouver quel est le nombre 4, qui, ajouté à 5, donne la somme 9. Cette opération, qui consiste à recomposer les deux systèmes 5 et 4, qui avaient été réunis en un seul 9, revient visiblement à retrancher 5 de 9, ce qu'on marque par le signe $-$, qu'on énonce *moins,* et qu'on place entre les nombres, devant celui qu'on veut soustraire : $9-5=4$. Le signe $-$ s'appelle aussi *négatif.*

Concluons de ce qu'on a vu pour l'addition, que, 1° si l'on augmente seulement le nombre à soustraire d'une ou plusieurs unités, le résultat sera diminué d'autant ; 2° si l'on augmente ou diminue les deux nombres donnés de la même quantité, le résultat demeurera le même ; 3° enfin, *le résultat de la soustraction de deux nombres marque la quantité dont l'un surpasse l'autre,* et c'est ce qui a fait donner à ce résultat le nom de *différence, excès* ou *reste.*

5. Dans la multiplication, les deux facteurs sont donnés, et l'on cherche leur produit ; mais si, *connaissant ce produit et l'un des facteurs, on se propose de trouver l'autre facteur,* cette opération est une DIVISION. On a $2\times4=8$; 8 est le résultat cherché de la multiplication de 2 par 4. Dans la division, au contraire, on donne 8 et 4, et l'on cherche 2, c'est-à-dire qu'on demande quel est le nombre qui, répété 4 fois, produit 8. On écrit ainsi cette division, $\frac{8}{4}$ ou $8:4=2$, qu'on énonce 8 *divisé par* 4 ; 8 est le *dividende,* 4 le *diviseur ;* le résultat cherché 2 est le *quotient :* en sorte que *produit* et *dividende* sont des mots qui désignent le même nombre, ainsi que *diviseur* et *multiplicateur,* et que *quotient* et *multiplicande ;* seulement l'emploi de ces mots dépend du calcul que l'on a en vue.

6. Avant d'enseigner les moyens d'exécuter ces quatre opérations sur des grandeurs données, il faut former un langage propre à énoncer tous les nombres, et imaginer des caractères pour les désigner : c'est ce qu'on nomme le *système de la numération.*

Au premier abord il semble nécessaire de créer une multitude

infinie de mots pour dénommer tous les nombres, et autant de caractères ou signes pour les représenter par l'écriture. Mais les inventeurs eurent une idée ingénieuse qui les dispensa de recourir à une aussi grande quantité de mots et de *chiffres :* cette idée consiste à grouper les nombres par dix, et à dénommer et écrire ces groupes à part. Ainsi, ils sont convenus qu'un assemblage de dix unités serait appelé *dix*, ou une *dizaine*, et de nombrer les dizaines comme ils avaient fait les unités; en sorte qu'une dizaine, deux dizaines, trois dizaines.... neuf dizaines, ou ce qui équivaut, *dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, septante, octante* et *nonante,* joints successivement aux neuf unités simples, permirent de compter jusqu'à *nonante-neuf unités.*

De même, ils ont fait un groupe de dix dizaines qu'ils ont appelé *cent*, ou une *centaine*, et ils ont compté une, deux, trois.... centaines, comme ils comptaient les unités et les dizaines, savoir : une centaine ou *cent*, deux centaines ou *deux cents*, trois centaines ou *trois cents.... neuf cents.* Ces dénominations permirent donc de compter jusqu'à neuf cent nonante-neuf unités, en joignant ensemble les nombres formés de centaines, de dizaines et d'unités.

Dix centaines furent ensuite appelées *un mille*, et l'on forma les énonciations *deux mille, trois mille.... neuf mille,* selon la même méthode d'analogie.

Pour transporter cette heureuse invention dans l'écriture, *on convint qu'un chiffre placé à la gauche d'un autre, vaudrait dix fois plus que s'il occupait la place de ce dernier.* De là on conclut qu'on mettrait au premier rang à droite les unités simples; au rang suivant à gauche, les dizaines; à la troisième place, les centaines; à la quatrième, les mille, etc. Ainsi, l'expression 23 représente deux dizaines et trois unités, ou vingt-trois; de même 423 équivaut à l'énoncé quatre cent vingt-trois. Et comme le nombre peut n'avoir pas d'unités ou de dizaines, etc., on emploie le chiffre 0, qui n'a par lui-même aucune valeur, mais qu'on écrit à la place des chiffres qui manquent, pour conserver aux autres leur rang. Par exemple, 20, 400, 507, valent vingt, quatre cents, cinq cent sept.

Il convient d'ajouter que l'usage a prévalu, pour énoncer les nombres représentés par 11, 12, 13, 14, 15, 16, de dire *onze, douze, treize, quatorze, quinze* et *seize,* au lieu de dire dix-un, dix-deux.... dix-six, comme on devrait le faire d'après la convention générale, ainsi qu'on dit dix-huit, vingt-un, trente-deux, etc.... Au lieu de

septante, octante et nonante, on dit plus ordinairement *soixante-dix, quatre-vingt* et *quatre-vingt-dix*, énoncés moins conformes aux règles que nous avons indiquées, et cependant plus usités.

Cela posé, lorsqu'on aura écrit un nombre quelconque, tel que 537, pour l'augmenter de 1, il suffit visiblement d'ajouter 1 au chiffre à droite; on a $537 + 1 = 538$: de même $538 + 1 = 539$. Si ce chiffre à droite est un 9, on le remplacera par un zéro, en faisant frapper l'augmentation de 1 sur le chiffre du second rang : $539 + 1 = 540$; car $530 + 9 + 1 = 530 + 10 = 540$; et si le chiffre du second ordre est lui-même un 9, alors on remplacera ces deux chiffres 9 par des zéros, en augmentant de 1 le chiffre du troisième rang : $2599 + 1 = 2600$; car $2500 + 99 + 1 = 2500 + 100$, et ainsi de suite : $12999 + 1 = 13000$; $509 + 1 = 510$; $10999 + 1 = 11000$. Tout nombre étant engendré par l'addition réitérée de l'unité, *il résulte de là qu'on peut écrire tous les nombres à l'aide de dix caractères* *.

7. Que la numération parlée ait précédé la numération écrite,

* Le même principe peut servir à écrire tous les nombres avec plus ou moins de dix caractères; par exemple, si l'on n'a que les quatre chiffres 0, 1, 2 et 3, il faudra qu'*un chiffre placé à la gauche d'un autre vaille quatre fois plus que s'il occupait la place de ce dernier :* alors 10 exprimera quatre, 11 cinq, 12 six, 13 sept, 20 huit, 21 neuf, 200 trente-deux, etc.

Lorsqu'un nombre est écrit dans cette hypothèse, on éprouve, pour l'énoncer, plus de difficulté que dans le système décimal, parce qu'il n'y a plus de concordance avec le langage; par exemple, pour lire (3120), on observera que le 2 vaut 4×2 ou 8; le 1 vaut $1 \times 4 \times 4$ ou 16; le 3 vaut $3 \times 4 \times 4 \times 4$ ou 192; ainsi (3120) *base* 4, vaut $8 + 16 + 192$, ou 216. De même si la *base* est 5, c'est-à-dire si l'on ne se sert que des cinq chiffres, 0, 1, 2, 3 et 4, chaque chiffre vaudra cinq fois plus que s'il occupait la place à sa droite; par exemple (4123), exprimé dans ce système à cinq chiffres, vaut $3 + 2 \times 5 + 1 \times 25 + 4 \times 125$, ou $3 + 10 + 25 + 500$, ou enfin 538.

Donc il faut, en général, former les puissances successives de la *base*, et multiplier le chiffre du second rang par la base, celui du troisième par le carré de la base, celui du quatrième par le cube, etc.; en ajoutant ces produits, on a la valeur de la quantité proposée. Ainsi (20313) base $4 = 567$, (4010) base $5 = 505$, (35151) base $6 = 5035 =$ (6814) base 9.

Si l'on fait attention au calcul ci-dessus, on verra qu'on peut aussi le faire comme il suit : prenons pour exemple (4123) base 5; multiplions le chiffre 4 par 5, et ajoutons le 1 qui est à droite, nous aurons 21; multiplions 21 par 5; et ajoutons le 2 du second rang, nous aurons 107; enfin multiplions par 5, et ajoutons 3, il viendra 538 pour la valeur cherchée. Il est en effet évident que par là le chiffre 4 a été multiplié trois fois consécutives par 5, que le 1 l'a été deux fois, et le 2 une fois : l'ordre des opérations est ici différent; mais elles sont au fond les mêmes que ci-dessus, et elles conduisent plus facilement au résultat.

Réciproquement cherchons les chiffres qui expriment le nombre 538 dans le système

c'est ce qui n'est point douteux, du moins pour les petits nombres. Mais dans celle-ci, il était si facile de s'élever à des nombres immenses par la seule juxta-position des chiffres les uns près des autres, et les opérations de l'arithmétique ont dû produire ces résultats considérables, qu'on n'a pas tardé à reconnaître que l'écriture des nombres n'avait besoin d'aucune modification pour s'appliquer à tous les besoins, tandis que le langage adopté p. 3 ne suffisait pas pour énoncer les quantités quand leur grandeur était exprimée par plus de quatre chiffres. Et observez que si l'on eût continué de donner à chaque place occupée par un chiffre une dénomination particulière, ainsi qu'on l'a fait jusqu'à quatre chiffres, unités, dizaines, centaines et mille, on serait retombé dans l'inconvénient

qui a cinq caractères : pour cela, supposons ce résultat connu et tel que (4123); il suit de ce qu'on a dit ci-dessus, qu'en formant,

$$4 \times 5 + 1 = 21, \text{ puis } 21 \times 5 + 2 = 107, \text{ enfin, } 107 \times 5 + 3 = 538,$$

ce calcul doit reproduire le nombre proposé. Donc, si l'on divise 538 par 5, le reste 3 sera le chiffre du premier rang, et le quotient 107 sera la valeur des autres chiffres. De même, divisant 107 par 5, le reste 2 sera le chiffre du second rang, et le quotient 21 la valeur des autres chiffres, et ainsi de suite. Il est clair qu'ici on ne fait que décomposer les opérations qu'on avait faites.

Donc, en général, *pour traduire un nombre donné d'un système de numération dans un autre,* il faut diviser ce nombre par la nouvelle base, puis diviser le quotient par cette base, puis ce second quotient encore par la base, etc., jusqu'à ce qu'on tombe sur un quotient moindre que cette base. La série des restes écrits successivement à partir de la droite, dans l'ordre où on les a obtenus, formera l'expression cherchée; le dernier quotient sera le chiffre de l'ordre le plus élevé. Ainsi, pour écrire 567 avec 4 caractères, je divise 567 par 4, et j'obtiens le quotient 141 et le reste 3 : je divise encore 141 par 4; il vient 35 au quotient, et le reste 1; $\frac{35}{4}$ donne 8 et le reste 3; enfin, $\frac{8}{4} = 2$, le reste est 0. Rassemblons les restes successifs 3, 1, 3, 0, et le dernier quotient, écrits en ordre renversé, et nous aurons (20313) base $4 = 567$ base 10.

On verra de même que, dans les systèmes à 6, 9 et 12 caractères, le nombre 5035 est exprimé par (35151), (6814) et (2 *ab* 7); on désigne ici par *a* et *b* les nombres *dix* et *onze* dans le système duodécimal. Ce dernier système présente des avantages marqués sur le décimal, à cause du grand nombre de diviseurs de 12; mais il serait trop difficile de l'établir maintenant, parce qu'il faudrait changer entièrement nos usages, et même les dénominations auxquelles nous sommes familiers dès l'enfance. *V.* l'*Arith. polit. de Buffon,* chap. XXVII.

Tout ce qu'on vient de dire peut être exprimé plus simplement en caractères algébriques. Soient *i, h, g,... c, b, a,* les chiffres consécutifs, en nombre *n,* qui expriment un nombre N, dans un système de numération dont la base est *x,* c'est-à-dire que chaque chiffre vaut *x* fois plus que s'il occupait la place qui est à sa droite; on a

$$N = ix^{n-1} + hx^{n-2} + \ldots\ldots + cx^2 + bx + a;$$

équation d'où l'on tire tous les théorèmes énoncés dans cette note.

d'employer une multitude infinie de mots, puisqu'il pouvait y avoir une multitude infinie de chiffres contigus. Voici le parti auquel on s'arrêta pour éviter cet inconvénient.

On convint de séparer les chiffres par groupes de trois en trois *, en commençant par la droite, puis d'énoncer chaque tranche à part, comme si elle était seule, en ajoutant seulement à chacune un mot propre à la dénommer. Ces tranches successives sont appelées *unités, mille, millions, billions* ou *milliards, trillions,* etc. Ainsi, pour énoncer le nombre suivant,

trillions,	billions,	millions,	mille,	unités.
12,	453,	227,	539,	804,

on appellera chaque tranche respective des noms trillions, billions, etc., après avoir énoncé la valeur numérique de chacune; ainsi, on lira 12 trillions, 453 billions, 227 millions, 539 mille, 804 unités.

Comme il pourrait y avoir une infinité de tranches, il est clair qu'on aurait encore besoin, pour l'énonciation, d'une infinité de mots, et que la difficulté n'est que reculée. Mais ce langage permettant d'appeler des quantités d'une grandeur immense, et qui dépassent tous ceux qu'on peut employer, la convention satisfait à tous les besoins. D'ailleurs, quand un nombre excède une certaine limite, l'énoncer ne sert à rien, et n'en peut faire concevoir la grandeur.

Cette idée admirable d'attribuer aux chiffres des *valeurs de position,* indépendamment de leur valeur propre, est si simple, qu'il ne faut pas s'étonner qu'elle soit venue à l'esprit des Indiens, qui nous l'ont transmise par le secours des Arabes; mais bien plutôt qu'il y ait eu des nations puissantes et éclairées qui ne les aient pas eues, ou du moins adoptées des peuples voisins. Les Romains, dont le système de numération parlée était conforme au nôtre, avaient un mode d'écriture très-différent. Les Grecs avaient aussi leur système de chiffres tout à fait distinct **.

* On aurait également pu composer les tranches de 2 ou de 4 chiffres; mais, dans un nombre donné, il y aurait eu plus de tranches dans un cas et moins dans l'autre, qu'en les formant de 3 chiffres. En examinant les limites des nombres qui sont d'un usage plus fréquent, il est aisé de voir qu'on a pris un milieu convenable entre ces partis.

** Les Romains représentaient ainsi les nombres :

I un.	L cinquante.	C cent.
II deux.	X dix.	D ou IↃ cinq cents.
III trois, etc.	V cinq.	M ou CIↃ mille.

Ces caractères suffisaient pour exprimer les nombres; on ajoutait les valeurs propres a

De l'Addition.

8. Pour ajouter deux nombres, tels que 5 et 4, nous avons vu (2) qu'il faut ôter à l'un de ces nombres successivement chacune des unités dont il est composé pour les joindre à l'autre, opération qui revient à ceci :

$$5 + 4 = 6 + 3 = 7 + 2 = 8 + 1 = 9.$$

Mais on sent que, pour des nombres un peu grands, ce procédé serait impraticable; nous ne les prescrirons donc que pour des nombres d'un seul chiffre, et nous supposerons même que l'habitude a appris à connaître de suite le résultat, $5 + 4 = 9$, $3 + 8 = 11$, et tous les autres de même sorte.

Pour trouver la somme des deux nombres 24 et 37, décomposons-les d'abord en $20 + 4$ et $30 + 7$; la somme cherchée est $20 + 30 + 4 + 7$. Or, les deux premières parties reviennent visiblement à 2 dizaines plus 3 dizaines, ou 5 dizaines; ainsi la somme est $50 + 11$, ou $50 + 10 + 1$, ou enfin $60 + 1 = 61$.

chaque chiffre, quand ces valeurs allaient en décroissant de grandeur numérique de gauche à droite : mais si un chiffre était précédé d'un autre qui fût moindre, la valeur de celui-ci devait au contraire être soustraite. En voici quelques exemples :

VI six.	XIV seize.	LX soixante.	CX cent dix.	DC six cents.
IV quatre.	XIV quatorze.	XL quarante.	XC nonante.	CD quatre cents.

On changeait aussi les unités en mille en mettant un trait au-dessus des chiffres ; on écrivait ainsi 10000, $\overline{\text{X}}$ ou CCIↃↃ; 100000, $\overline{\text{C}}$ ou CCCIↃↃↃ; 2000000 $\overline{\text{MM}}$.

Le système de la numération écrite des Grecs était aussi mal imaginé que celui des Romains ; les unités, dizaines, centaines étaient désignées par les lettres consécutives de l'alphabet ; savoir :

α vaut	1	ι vaut	10	ρ vaut	100
β	2	κ	20	σ	200
γ	3	λ	30	τ	300
δ	4	μ	40	υ	400
ε	5	ν	50	φ	500
ϛ	6	ξ	60	χ	600
ζ, ʒ	7	ο	70	ψ	700
η	8	π	80	ω	800
θ, ϑ	9	ϟ	90	ϡ	900

Les mille se dénotent par un accent' sous les lettres. Pour donner un exemple de ces chiffres : $\alpha\beta\rho\kappa\mu$ signifiait $1 + 2 + 100 + 1 + 40$, ou 144. De même, $\alpha\chi\zeta = 1607$, $\beta\rho\kappa\vartheta = 2529$. V. *Delambre, Astronomie ancienne*, T. II.

On voit qu'*il faut réunir séparément les dizaines et les unités des nombres proposés ;* ce raisonnement est général.

Par exemple, prenons $3731 + 349 + 12487 + 54$; en faisant séparément la somme des unités, puis des dizaines, des centaines, etc., on aura 15 mille + 14 centaines + 20 dizaines + 21 unités, ou $15000 + 1400 + 200 + 21$; mais, opérant de même sur ces derniers nombres, on a 16 mille + 6 centaines + 2 dizaines + 1, ou 16621. Ce calcul se fait plus commodément en écrivant, comme on le voit ci-contre, les nombres les uns au-dessous des autres, et faisant correspondre, dans une même colonne verticale, les chiffres du même ordre. La somme des nombres de chaque colonne doit être écrite au bas, si elle ne passe pas 9; autrement *on n'en pose que les unités,* et on réserve les dizaines pour les ajouter, comme simples unités, avec les nombres de la colonne qui suit à gauche, ce qui détermine *à commencer le calcul par la colonne à droite.*

```
  3 731
    349
 12 487
     54
 ------
 16 621
```

Voici plusieurs exemples d'addition :

Pour le premier, on fera ainsi le calcul : $3 + 8$ font 11, $11 + 7$ valent 18, $18 + 7$ égalent 25, somme des unités $3 + 8 + 7 + 7$: on posera 5 sous le trait, au premier rang à droite, et on joindra les 2 dizaines à la colonne suivante : puis on dira 2 plus 8 font 10, plus 1 font 11, plus 8 valent 19, plus 2 font 21 ; on pose 1, et on *retient* 2 pour joindre aux centaines. $2 + 7 = 9$, $9 + 3 = 12$...; on a 26 centaines, on pose 6 et on retient 2; enfin on trouve 24 à la 4e colonne : on pose le 4 et on avance le 2, c'est-à-dire qu'on écrit 24 mille. La somme est 24 615.

```
  5 783        77 756      10 376 786      5 784 201
  4 318         3 388         789 632        749 832
  5 987         9 763             589     14 378 539
  8 527        90 257              73     ----------
 ------       -------      ----------     20 912 572
 24 615       181 164      11 167 080
```

De la Soustraction.

9. L'habitude d'additionner suffit pour trouver la différence entre les nombres simples; par exemple, le nombre qui, ajouté à 3, donne 7 pour somme, est 4 : ainsi $7 - 3 = 4$. On peut aussi parvenir au résultat, en ôtant de 7 autant d'unités que 3 en contient ;

$7 - 3 = 6 - 2 = 5 - 1 = 4$. Accordons par conséquent qu'on sache faire la soustraction des petits nombres.

Prenons cet exemple plus composé, 695 — 243. Il est visible que, si l'on connaissait le nombre qui ajouté à 243 donne 695 pour somme, 3 + les unités de ce nombre, 4 + ses dizaines; 2 + ses centaines devraient reproduire 695; on écrira donc les nombres proposés comme pour l'addition, le plus petit en-dessous; puis on retranchera chaque chiffre inférieur de celui qui est au-dessus : on dira $5 - 3 = 2$, $9 - 4 = 5$, $6 - 2 = 4$, et 452 sera la différence cherchée.

$$\begin{array}{r} 695 \\ 243 \\ \hline 452 \end{array}$$

Mais il peut arriver que le chiffre inférieur surpasse le supérieur. Dans l'exemple ci-contre, on ne peut ôter 8 de 7. Il est clair qu'alors 36 147 devant être la somme de 19 328 + le nombre cherché, en faisant la somme de la 1re colonne, 8 + les unités inconnues, ont donné, non pas 7, mais 17 pour somme; et qu'on a *retenu* la dizaine pour la joindre à la colonne suivante. On doit donc dire, non pas $7 - 8$, mais $17 - 8 = 9$, et écrire ce chiffre 9 au rang des unités. Mais, en continuant l'addition, la colonne suivante est formée de la dizaine retenue, des chiffres 4, 2, et des dizaines cherchées; et ajoutant celles-ci à 2 et à la retenue 1, on doit produire 4 : il ne faut donc pas dire $4 - 2$, mais $4 - 3 = 1$, qu'on posera aux dizaines. De même pour les centaines, au lieu de $1 - 3$, on dira $11 - 3$ reste 8, qu'on posera; mais on retiendra 1 pour l'ajouter au 9 suivant; ainsi, $6 - 10$, ou plutôt $16 - 10 = 6$, et on retiendra 1; $3 - 2 = 1$.

$$\begin{array}{r} 36\ 147 \\ 19\ 328 \\ \hline 16\ 819 \end{array}$$

En général, *lorsque le chiffre supérieur sera le plus faible, on l'augmentera de* dix, *puis on retiendra* un *pour le joindre au chiffre inférieur qui est à la gauche.* On remarquera qu'en effet le nombre supérieur est augmenté par là de 10, mais qu'on augmente pareillement l'inférieur de 10, ce qui n'altère nullement la différence (n° 4).

Pareillement, dans l'exemple ci-contre, on dira : $9 - 3 = 6$; $2 - 7$ ne se peut; $12 - 7 = 5$, et je retiens 1; $4 - 6$ (au lieu de $4 - 5$) ne se peut, $14 - 6 = 8$, et je retiens 1; $0 - 9$ (au lieu de $0 - 8$) ne se peut, $10 - 9 = 1$; $0 - 8$ ne se peut; $10 - 8 = 2$, etc.

$$\begin{array}{r} 3\ 000\ 429 \\ 2\ 578\ 573 \\ \hline 421\ 856 \end{array}$$

Voici quelques autres exemples de soustraction :

$$\begin{array}{r} 3\ 000 \\ 1\ 296 \\ \hline 1\ 704 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\ 000 \\ 4\ 000 \\ \hline 2\ 000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\ 000 \\ 5\ 999 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 150\ 001 \\ 76\ 385 \\ \hline 73\ 616 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\ 375\ 831 \\ 186\ 943 \\ \hline 3\ 188\ 888 \end{array}$$

10. Lorsqu'on veut *retrancher un nombre de l'unité suivie d'autant de zéros que ce nombre a de chiffres, c'est-à-dire de* 1000.... *il faut retrancher le chiffre des unités de* 10, *et les autres chiffres de* 9. Ainsi $1000 - 259$, se trouve en disant $10 - 9 = 1$; puis $9 - 5 = 4$; $9 - 2 = 7$, et on a $1000 - 259 = 741$. De même . . . . . $1\ 000\ 000 - 279\ 953 = 720\ 047$. Ce calcul est si facile qu'il mérite à peine d'être compté pour une opération; on s'en sert pour réduire toute soustraction à une addition; voici comment :

Soit demandée la différence $3487 - 259$. Il est clair qu'en décomposant 3487 en $2487 + 1000$, la différence avec 259 n'est pas changée, et on aura $2487 + 1000 - 259$, ou $2487 + 741 = 3228$. Ainsi, au lieu de soustraire 259, on a réellement ajouté 741. On voit donc qu'on peut retrancher un nombre d'un autre, en soustrayant le 1er de 1 suivi d'autant de zéros qu'il a de chiffres, et ajoutant le résultat au 2e nombre donné, pourvu qu'on retranche ensuite une unité de l'ordre immédiatement supérieur à celui du nombre à soustraire. On indique cette dernière soustraction par $\overline{1}$ placé à l'ordre de chiffres dont on vient de parler; ainsi l'opération ci-dessus revient à $3487 - 259 = 3487 + \overline{1}741$, calcul qu'on effectue comme on le voit ci-contre. Observez que $\overline{1}741$, ajouté au nombre 259, donne zéro, ou $\overline{1}741 + 259 = 0$. La quantité $\overline{1}741$ est ce qu'on nomme le *complément arithmétique* de 259. En général, pour former *le complément arithmétique d'un nombre*, il faut retrancher tous ses chiffres de 9, et celui des unités de 10, puis placer $\overline{1}$ à gauche. *Le complément d'un nombre ajouté à ce nombre donne zéro pour somme. Au lieu de retrancher un nombre, on peut ajouter son complément arithmétique.*

$$\begin{array}{r} 3487 \\ \overline{1}741 \\ \hline 3228 \end{array}$$

Lorsqu'il y a plusieurs additions et soustractions successives, l'usage des compléments peut présenter des avantages; par exemple, $32731 + 5729 - 371 - 4834$, prend la forme ci-contre, attendu que les compléments de 371 et 4834 sont $\overline{1}629$ et $\overline{1}5166$. Nous recommandons toutefois d'éviter l'emploi du complément, et de s'exercer à faire les additions et soustractions colonne par colonne. C'est ainsi que, dans notre exemple, après avoir dit $9 + 1 = 10$, $4 + 1 = 5$, on retranchera 5 de 10 et on posera 5 au rang des unités du reste; puis $3 + 2 = 5$, $7 + 3 = 10$; $5 - 10$ ne se peut;

$$\begin{array}{r|rr} 32\ 731 & & 32\ 731 \\ 5\ 729 & & 5\ 729 \\ \overline{1}\ 629 & - & 371 \\ \overline{1}5\ 166 & - & 4\ 834 \\ \hline 33\ 255 & & \text{Reste } 33\ 255 \end{array}$$

donc $15 - 10 = 5$, qu'on pose aux dizaines, en retenant 1 pour joindre aux centaines soustractives, etc.

De la Multiplication.

11. Nous écrirons le multiplicande le premier; ainsi $4 \times 5 \times 2$ signifie qu'on répétera 4 cinq fois, et que le produit 20 devra être pris 2 fois.

Puisque 4×5 n'est autre que $1 + 1 + 1 + 1$ répété 5 fois, il suffit de prendre chaque unité 5 fois, ou $5 + 5 + 5 + 5$; expression qui revient à 5 répété 4 fois : ainsi, 4 fois 5 est égal à 5 fois 4, ou $4 \times 5 = 5 \times 4$. Ce raisonnement peut être présenté sous la forme d'un tableau *A*, composé de 5 lignes, dont chacune contient 4 unités. Il est clair que le nombre des unités est 4 répété 5 fois.

A

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Mais, en renversant le tableau, comme on le voit en *B*, on trouve 5 répété 4 fois, le nombre des unités étant nécessairement le même dans les deux cas, le produit de 4×5 est le même que celui de 5×4.

B

. . . . .
. . . . .
. . . . .
. . . . .

Soit aussi $5 \times 4 \times 2$; comme 5 répété 4 fois est. . . . . $5 + 5 + 5 + 5$, il reste à prendre 2 fois ce résultat, ou . $10 + 10 + 10 + 10$, ou 10 répété 4 fois. Donc $5 \times 4 \times 2 = 5 \times 2 \times 4$. *On peut donc changer de place les deux derniers facteurs*, comme on a vu qu'on pouvait échanger les deux premiers entre eux. Ainsi,

$$5 \times 4 \times 2 = 4 \times 5 \times 2 = 5 \times 2 \times 4 = 2 \times 5 \times 4 = 2 \times 4 \times 5 = 4 \times 2 \times 5.$$

On voit donc qu'on *peut intervertir de toutes les manières possibles l'ordre des facteurs sans altérer le produit.*

Démontrons ce théorème pour plus de trois facteurs : par exemple, pour $4 \times 5 \times 3 \times 2 \times 9$.

Le facteur 9 ayant la dernière place dans le premier produit, prouvons qu'on peut le placer où l'on veut, et d'abord à l'avant-dernier rang, savoir $4 \times 5 \times 3 \times 2 \times 9 = 4 \times 5 \times 3 \times 9 \times 2$. En effet, les trois premiers facteurs $4 \times 5 \times 3$ donnent 60, et il faut prouver que $60 \times 2 \times 9 = 60 \times 9 \times 2$, et c'est ce qui vient d'être démontré. De même dans le produit $4 \times 5 \times 3 \times 9$, on

peut faire passer le 9 avant le 3, savoir $4 \times 5 \times 9 \times 3$, et ainsi de suite. D'où l'on voit que, sans changer le produit, on peut faire occuper successivement toutes les places au dernier facteur 9, les autres facteurs restant dans le même ordre.

Mais à son tour le nouveau facteur terminal 2 peut être mis à tel rang qu'on veut dans chacun de ces résultats, savoir, $4 \times 5 \times 9 \times 3 \times 2 = 4 \times 5 \times 9 \times 2 \times 3 = 4 \times 5 \times 2 \times 9 \times 3 =$ etc. Donc, en définitive, la place de chaque facteur est arbitraire.

12. Lorsqu'il arrive qu'un nombre se multiplie lui-même plusieurs fois consécutives, comme $3 \times 3 \times 3 \times 3$, on dit qu'il est élevé à une *Puissance, dont le degré est marqué par le nombre de facteurs*, qu'on appelle *Exposant*. Ici 3 est élevé à la quatrième puissance, ce qu'on indique par $3^4 = 81$; 4 est l'exposant ou le degré. De même $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$. On donne aussi à la deuxième puissance le nom de *Carré*, et à la troisième le nom de *Cube*. 7^2 ou $7 \times 7 = 49$ est le carré de 7; $7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$ est le cube de 7.

Le nombre qui se multiplie ainsi lui-même, ou qui est affecté d'un exposant, se nomme *Racine :* ainsi 7 est la *racine carrée*, ou *seconde* de 49, la *racine cubique* ou *troisième* de 343, la *quatrième de* 2401, etc. Ces racines s'indiquent par le SIGNE RADICAL $\sqrt{\ }$, et on place, dans les branches, le nombre qui en marque le degré.

$$7^3 = 343, \text{ d'où } 7 = \sqrt[3]{343}; \quad 5^4 = 625, \text{ d'où } 5 = \sqrt[4]{625}.$$

Lorsqu'il s'agit de la racine 2e, on se dispense ordinairement d'en indiquer le degré, et d'écrire le chiffre 2 sur le *radical;* en sorte que $\sqrt{\ }$ et $\sqrt[2]{\ }$ sont la même chose; $8^2 = 64$, donc $8 = \sqrt{64}$, 8 est dit la racine, ou la racine carrée de 64.

13. Puisque pour multiplier un nombre (n° 3), il suffit de l'ajouter autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, on voit que, 1° si l'on multiplie l'un des facteurs par 2, 3, 4..., le produit est lui-même multiplié par 2, 3, 4.... En effet, si, au lieu de 3×5, je prends 12×5, chaque fois que j'ajouterai 12 au lieu de 3, je prendrai le quadruple de 3, c'est-à-dire que j'aurai pris de trop le triple de 3; le résultat sera donc composé du produit 3×5 quadruplé : ainsi, 12×5 est quadruple de 3×5, parce que 12 est quadruple de 3. Et aussi pour multiplier 12 par 5, on peut, si l'on veut, multiplier 3 par 5, et ensuite le produit 15 par 4, parce que $12 = 3 \times 4$.