De même si l'on divise l'un des facteurs par 2, 3, 4..., le produit sera divisé aussi par 2, 3, 4.

2° *Si l'on multiplie l'un des facteurs, et qu'on divise l'autre par un même nombre, le produit n'est pas changé :* $14 \times 8 = 7 \times 16$; 14 est double de 7, et 16 l'est de 8.

3° *Lorsque les facteurs sont terminés à droite par des zéros, on peut les supprimer, pourvu qu'à la suite du produit on en mette un pareil nombre.* Ainsi 300×20 devient 3×2, en ôtant les trois zéros, qu'on restituera à la suite du produit 6 ; on aura $300 \times 20 = 6000$. En effet, $300 \times 20 = 3000 \times 2$, car 300 est décuplé (n° 6), et 20 est divisé par 10. Or, dans l'addition de 3000 à lui-même, on voit que les trois zéros demeurent dans la somme, comme provenant des trois premières colonnes; la suivante donne $3 \times 2 = 6$; donc 6000 est le produit demandé.

14. Il s'agit maintenant de pratiquer la multiplication de deux nombres donnés; il se présente trois cas.

1er CAS. *Les deux facteurs n'ayant qu'un seul chiffre chacun.* La table suivante, qui est due à Pythagore, se forme en écrivant sur une ligne horizontale les 9 premiers nombres, puis ajoutant chacun d'eux 9 fois successives, on écrit ces produits dans une même colonne verticale. Par exemple, $4 + 4 = 8$, $8 + 4 = 12$, $12 + 4 = 16$, $16 + 4 = 20$, $20 + 4 = 24$, etc.

Table de Pythagore.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Veut-on trouver le produit 7×5, il suit de la génération des divers nombres de ce tableau qu'on cherchera 7 dans la première ligne, et qu'on descendra dans la colonne verticale correspondante, jusqu'à la case qui est dans la ligne horizontale dont 5 est le chiffre initial ; cette case porte 35, et on a $7 \times 5 = 35$. Il importe de se rendre familiers les produits des nombres simples, afin de ne pas être forcé, chaque fois qu'on veut les obtenir, de recourir à cette table, qui n'est elle-même formée que par des additions successives.

S'il fallait, ainsi que l'exige la définition (3), *ajouter le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur,* l'opération deviendrait presque impraticable pour les grands nombres. Voyons comment on peut la réduire à la multiplication des nombres simples.

2e CAS. *Le multiplicateur n'ayant qu'un seul chiffre.* Pour multiplier 2967 par 4, j'imagine, pour un moment, qu'on veuille en effet exécuter l'addition de 2967 pris 4 fois, ainsi qu'elle est faite ci-après. La colonne des unités ne contiendra que le chiffre 7 écrit verticalement 4 fois; ainsi cette somme sera 7×4 ou 28 ; on posera 8, et on retiendra 2 pour joindre à la colonne des dizaines, formée du chiffre 6 écrit 4 fois. Il faut donc dire $6 \times 4 = 24$, et ajoutant la retenue 2, on a 26 ; ainsi on posera 6 et on retiendra 2, etc. Cette opération revient donc *à multiplier chacun des chiffres du multiplicande par le multiplicateur, en commençant par la droite : on écrit les unités de chaque produit au-dessous du chiffre qui l'a donné, et on retient les dizaines pour les joindre au produit suivant.*

```
  2 967
  2 967
  2 967
  2 967
 ------
 11 868
```

```
  2 967
      4
 ------
 11 868
```

Ce procédé n'est, à proprement parler, que l'addition même, excepté qu'on se dispense d'écrire plusieurs fois le nombre à ajouter.

3e CAS. *Les deux facteurs étant composés de plusieurs chiffres.* Multiplier 2327 par 532, c'est répéter 2327, 2 fois, 30 fois, 500 fois, et ajouter le tout. 1° On multipliera d'abord 2327 par 2, comme on vient de le dire ; 2° pour former le produit par 30, on multipliera 2327 par 3, et on ajoutera un zéro à droite du produit, d'après ce qu'on a vu (13, 3°) ; enfin, pour répéter 500 fois 2327, on multipliera par 5, et on ajoutera deux zéros. L'opération prend donc la disposition ci-dessus, dans laquelle on observe que, comme les zéros n'influent en rien sur l'ad-

```
     2 327
       532
 ---------
     4 654..par 2
    69 81...par 3
 1 163 5....par 5
 ---------
 1 237 964
```

dition, on s'est dispensé de les écrire : alors le produit par 3 a été simplement reculé d'un rang vers la gauche, et le produit par 5 de deux rangs. On voit donc qu'*il faut multiplier l'un des facteurs tour à tour par chacun des chiffres de l'autre. Chaque produit partiel doit être écrit de manière que ses unités soient placées au même ordre que le chiffre du multiplicateur qui les a données : on ajoute ensuite le tout.*

La multiplication des nombres composés dépend ainsi du cas où le multiplicateur n'a qu'un chiffre, et celle-ci dépend à son tour du cas où chaque facteur n'a qu'un seul chiffre, c'est-à-dire de la table de Pythagore. Comme il convient d'être très-exercé à la pratique de cette opération, nous en mettrons ici quelques exemples.

```
     886 633          53 687          5 554 444
         777             908             79 765
  ----------       ----------      ----------
   6 206 431         429 496         27 772 220
  62 061 31        48 318 3         333 266 64
 620 643 1         ----------       3 888 110 8
 ----------        48 747 796      49 989 996
 688 913 841                       388 811 08
                                   ----------
                                   445 050 225 660
```

Quant au nombre de chiffres qui composent le produit, supposons qu'on ait à multiplier 3687 par 968 ; le facteur 968 est > 100 et < 1000 ; ainsi le produit est entre 368700 et 3687000, c'est-à-dire qu'il a 6 ou 7 chiffres. En général, *le produit de deux nombres est formé d'autant de chiffres qu'il y en a dans les deux facteurs, ou un chiffre de moins.* Quand on a 3, 4,... facteurs, le même raisonnement donne des limites de la grandeur du produit et du nombre de chiffres qui le composent *.

De la Division.

15. De même que la multiplication n'est que l'addition réitérée

* Soient α, β, γ.... la quotité des chiffres de divers facteurs, a, b, c..., dont le nombre est n ; il est clair que $a < 10^{\alpha}$, $b < 10^{\beta}$, $c < 10^{\gamma}$....; le produit est $< 10^{\alpha+\beta+\gamma\ldots}$ ou $abc\ldots < 10^{m}$, en posant $m = \alpha + \beta + \gamma\ldots$. D'ailleurs, $a > 10^{\alpha-1}$, $b > 10^{\beta-1}$, $c > 10^{\gamma-1}$....; d'où $abc\ldots > 10^{\alpha+\beta+\gamma\ldots-n}$ ou $abc\ldots > 10^{m-n}$; donc le produit abc... est compris entre 10^{m-n} et 10^{m} : il ne peut avoir au delà de m chiffres, mais il en a plus de $m-n$. Ainsi *le produit ne peut avoir plus de chiffres que les facteurs proposés écrits successivement comme s'ils ne formaient qu'un seul nombre ; mais il en a plus que cette quotité moins le nombre des facteurs.*

du même nombre, on peut considérer la division comme une soustraction répétée, le quotient marquant combien de fois on peut ôter le diviseur du dividende. Si on veut diviser 8 par 2, et qu'on retranche d'abord 2 de 8, puis 2 du reste 6, 2 du reste 4, et enfin 2 de 2, on arrive au reste zéro ; 2 ayant pu être soustrait 4 fois de 8, on peut regarder 8 comme composé de 4 fois 2 ; et par conséquent 4 est le quotient. Il suit de là que *le quotient qui marque combien de fois un nombre est répété pour former un produit, indique aussi le nombre de fois que le diviseur est contenu dans le dividende ;* ou, ce qui équivaut, *le dividende contient le diviseur autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient.* Donc, si l'on veut former deux parts égales dans 8 unités, il faut diviser 8 par 2 ; le quotient 4 exprime la grandeur de chaque part.

Le dividende n'étant autre chose que le produit d'une multiplication dont le diviseur et le quotient sont les deux facteurs, il suit de la définition et des propriétés connues (n° 13) que, 1° *on ne change pas le quotient lorsqu'on multiplie ou qu'on divise par un même nombre le dividende et le diviseur:* 36 : 9 donne le même quotient que 72 : 18 et que 12 : 3.

2° Si le dividende et le diviseur sont terminés à droite par des zéros, on peut en supprimer à chacun un égal nombre sans altérer le quotient : 6000 : 200, et 60 : 2 donnent le même quotient 30 (*voy.* p. 14).

3° Si l'on multiplie seulement le dividende, le quotient sera multiplié par le même nombre ; si l'on multiplie le diviseur, le quotient sera divisé. Qu'il s'agisse, par exemple, de diviser 24 par 3, le quotient sera 8, ou $24 : 3 = 8$; mais si l'on double 24, ce quotient sera doublé, $48 : 3 = 16$; et si l'on double 3, le quotient sera réduit à moitié, $24 : 6 = 4$. Enfin $48 : 6 = 8$, c'est-à-dire que le quotient reste le même quand on double le dividende et le diviseur.

4° *Lorsqu'on veut exécuter plusieurs divisions successives, l'ordre dans lequel on les doit effectuer est arbitraire ; on peut même n'en faire qu'une seule, en prenant pour diviseur le produit de tous les diviseurs.* Si l'on veut, par exemple, diviser 24 par 2, et ensuite le quotient 12 par 3, on obtient 4 pour résultat ; mais si l'on eût divisé par 3 d'abord, et ensuite par 2, ou bien si l'on eût divisé 24 par 2×3 ou 6, on aurait obtenu de même 4. Cela résulte de ce que la division par 2 et par 3 revient à supprimer tour à tour les facteurs 2 et 3 dans 24, qui est le produit de $2 \times 3 \times 4$, ou de $3 \times 2 \times 4$. Par

la même raison, $(6\times4):(3\times2)=(6:3)\times(4:2)=6:(2\times3)\times4$.

16. Le quotient de $35:7$ est 5, puisque $35=7\times5$; mais si l'on veut diviser 38 par 7, on décomposera 38 en $35+3$, ou $38=7\times5+3$; la division ne se fait plus exactement : 35 est seulement le plus grand produit de 7 contenu dans 38, et 3 est le *reste* de cette division.

Si l'on forme tous les produits consécutifs d'un nombre par 1, 2, 3,... les résultats sont tous *divisibles* par ce nombre, ou en sont les *multiples*. C'est ainsi que 35 est multiple de 7, ou divisible par 7, tandis que 38 ne l'est point.

En prenant pour dividende et diviseur deux nombres quelconques, on doit donc dire que *le quotient, multiplié par le diviseur, donne un produit qui, ajouté au reste, forme le dividende.* Le reste est d'ailleurs moindre que le diviseur, puisque, si celui-ci y était encore contenu, le produit du diviseur par le quotient ne donnerait pas le plus grand multiple du diviseur contenu dans le dividende.

En multipliant toute l'équation $38=7\times5+3$, par un nombre tel que 4, on a $152=28\times5+12$: le quotient de la division de 152 par 28, et celui de 38 par 7, est également 5; mais le reste 3 est devenu quadruple. *En multipliant le diviseur et le dividende par un même facteur, le quotient n'est pas changé, et le reste est multiplié par ce facteur.*

Soient 34 et 24, *deux nombres qui, divisés par* 5, *donnent le même reste* 4, *leur différence* 10 *doit être multiple de* 5, car $34=6\times5+4$, $24=4\times5+4$, et retranchant ces deux équations, on a $10=2\times5$.

17. La table de Pythagore sert à trouver le quotient, lorsqu'il n'est exprimé que par un seul chiffre, aussi bien que le diviseur. Veut-on diviser 35 par 7, par exemple, on descendra, dans la colonne verticale du nombre 7, jusqu'à la case qui contient 35; elle répond à la ligne horizontale qui commence par 5, en sorte que $35=7\times5$; donc 5 est le facteur ou le quotient cherché.

Pour diviser 65 par 9, comme on ne trouve pas 65 dans la 9e colonne, mais 63 et 72, on a $65=7\times9+2$: on voit que 7 est le quotient, et 2 le reste. Il faut se rendre ces divisions très-familières, afin de ne pas être obligé de consulter la table de Pythagore pour les exécuter.

18. Venons-en aux divisions composées.

1er CAS. *Le diviseur n'ayant qu'un seul chiffre.* Soit proposé de

diviser 40 761 par 7, c'est-à-dire de trouver un nombre qui, multiplié par 7, reproduise 40 761. Si ce nombre était connu, on le vérifierait en le multipliant par 7; les unités devraient donner le produit 1; en retenant les dizaines pour les joindre au produit suivant, on trouverait de même 6 aux dizaines; le produit des centaines donnerait 7; enfin celui des mille, 40. Le quotient n'a point de dizaines de mille, puisque $10\,000\times7$ donne 70 000, qui surpasse 40 761. Concluons de là que 40 contient le produit de 7 par le chiffre des mille du quotient, et en outre la retenue faite sur les centaines. Le plus grand multiple de 7 contenu dans 40 est 35 ou 7 fois 5, et 40 est compris entre les produits de 7 par 5 et par 6; si l'on multiplie 7 par 5000 et par 6000, l'un des produits sera donc moindre, et l'autre plus grand que 40 761; ainsi le quotient est entre 5000 et 6000, c'est-à-dire que le chiffre des mille est 5, *donné par le plus grand multiple de* 7 *contenu dans* 40. En retranchant de 40 ce multiple 35, le reste 5 est la retenue faite, dans la multiplication par 7, sur les centaines du quotient. Si donc on joint à ce reste 5 les autres chiffres 761 du dividende, 5761 sera le produit par 7 des parties inconnues du quotient; et pour trouver celles-ci, il ne s'agira que de diviser 5761 par 7, question semblable à la proposée, et qui permet le même raisonnement.

```
40.761 | 7
35     |----
------ | 5823
 57
 56
  16
  14
   21
   21
    0
```

On divisera donc par 7 les centaines 57, ou plutôt le plus grand multiple de 7 renfermé dans 57 : le quotient 8 sera le chiffre des centaines du quotient, qu'on posera à droite du 5 qui en est les mille. Observez qu'il est inutile de descendre, près du reste 5, toute la partie 761 du dividende, et que, pour former le dividende partiel 57, il suffisait de descendre près du 5 le chiffre 7 des centaines. En multipliant 8 par 7, et ôtant le produit 56 de 57, le reste 1 est la retenue qui provient des dizaines, en sorte que, si l'on joint 61 à ce reste, 161 est le produit par 7 des dizaines et des unités du quotient : pour les obtenir, il faut donc diviser 161 par 7, et ainsi de suite. Le quotient demandé est 5823.

On voit qu'on trouve tour à tour chaque chiffre du quotient, *en commençant par l'ordre le plus élevé, et qu'il faut sans cesse descendre près du reste le chiffre qui suit dans le dividende, puis prendre le plus grand multiple du diviseur qui est contenu dans le nombre ainsi formé.*

Lorsqu'on s'est exercé à ce calcul, on ne tarde pas à reconnaître

que, dans une opération aussi simple, il est inutile d'écrire chaque produit à soustraire, parce que la soustraction se fait de suite. Ainsi, après avoir trouvé que 40 : 7 donne le chiffre 5 des mille du quotient, on prend 5 fois 7, et on retranche le produit 35 de 40; le reste 5 s'écrit sous le 0 du dividende; on y joint le 7 des centaines, et on divise 57 par 7, etc. L'opération se réduit alors à la forme que nous lui avons donnée ci-contre. Il est même remarquable qu'on peut encore l'abreger, en n'écrivant pas chaque reste pour le joindre au chiffre qui suit dans le dividende : par exemple, 40 : 7 donne 5, qu'on écrit sous 40; le produit 7 fois 5 ou 35, se retranche de 40, et l'on conserve dans la mémoire le reste 5, pour le joindre au 7 des centaines; 57 : 7 donne 8, qu'on écrit sous les 7 centaines : $7 \times 8 = 56$, qui, ôté de 57, donne le reste 1; cet 1, joint au 6 dizaines, donne 16; $16 : 7 = 2$, etc. Ce calcul a la forme très-simple que nous avons indiquée ici.

$$\begin{array}{r|l} 40761 & 7 \\ \cline{2-2} 57 & 5823 \\ \hline 16 & \\ 21 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 40\ 761 & 7 \\ \cline{2-2} 5\ 823 & \end{array}$$

Voici d'autres exemples de ces divisions:

$$\begin{array}{r|l} 12\ 538 & 2 \\ \cline{2-2} 6\ 269 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8\ 765 & 5 \\ \cline{2-2} 1\ 753 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 97\ 587 & 7 \\ \cline{2-2} 13\ 941 & \end{array}$$

2e CAS. *Le diviseur ayant plusieurs chiffres.* Proposons-nous de diviser 1916 par 329. Puisque $329 \times 10 = 3290$, qui surpasse le dividende 1916, le quotient est moindre que 10 : ainsi le *quotient n'a qu'un seul chiffre;* supposons-le connu, et on le trouvera facilement en faisant les produits successifs de 329 par 1, 2, 3,... jusqu'à ce que ce produit soit 1916, ou que la différence avec 1916 soit moindre que 329. Soit 5 ce quotient.

1916 étant $= 329 \times 5 +$ le reste, si l'on multiple par 5 les unités 9, les dizaines 2 et les centaines 3, et qu'on ajoute le reste, on devra reproduire 1916. Le calcul indiqué ci-contre prouve que les centaines 19 du dividende sont formées, 1° du produit 15 des centaines 3 du diviseur par le quotient supposé 5; 2° de la retenue 1 faite sur les dizaines; 3° de la partie 3 qui provient de l'addition du reste 271.

$$\begin{array}{rr} & 329 \\ & 5 \\ \hline \text{Produit...} & 1645 \\ \text{Reste...} & 271 \\ \hline & 1916 \end{array}$$

Il suit de là que, si l'on pouvait ôter de 19 ces deux retenues, le reste 15 serait le produit exact des centaines 3 du diviseur par le chiffre du quotient; et la division de 15 par 3 ferait connaître ce chiffre. Mais comme on ne peut ôter de 19 la double retenue qu'on

ne connaît pas d'abord, on divise 19 par 3, prenant ainsi pour dividende *un nombre trop grand :* le quotient qu'on trouve peut être fautif; mais il ne peut pécher que par excès. Dans notre exemple, 19 : 3 donne 6; mais comme on trouve que $6 \times 329 = 1974 > 1916$, on reconnaît que le quotient supposé est trop fort : on essaye 5; et le produit 5×329 est $1645 < 1916$; ce qui prouve que 5 n'est pas trop fort, et que par conséquent 5 est le quotient cherché. Otant 1645 de 1916, on trouve le reste 271.

Concluons de là que si le quotient est < 10, c'est-à-dire n'a qu'un seul chiffre, *il faut supprimer, à droite du dividende et du diviseur, un égal nombre de chiffres, et diviser les parties qui restent; le quotient sera celui qu'on cherche, ou le surpassera; la multiplication servira ensuite à le vérifier* *. Voici quelques exemples de ce calcul. Dans le 1er, on divise 72 par 8, mais on trouve, par la multiplication, que le quotient 9 est trop fort, et on le réduit à 8.

$$\begin{array}{rr|l} & 72\ 320 & 8\ 369 \\ \cline{3-3} \text{Produit..} & 66\ 952 & 8 \\ \cline{2-2} \text{Reste....} & 5\ 368 & \text{Quotient.} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 386\ 782 & 99\ 887 \\ \cline{2-2} 299\ 661 & 3 \\ \hline 87\ 121 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 823\ 945 & 82\ 476 \\ \cline{2-2} 742\ 284 & 9 \\ \hline 81\ 661 & \end{array}$$

Proposons-nous maintenant de diviser 191 687 par 329. Je sépare vers la gauche du dividende la partie 1916, qui soit assez grande pour contenir le diviseur 329; je fais la division de 1916 par 329, en suivant la règle précédente : le quotient est 5, donnant le produit 1645 et le reste 271; j'écris ces nombres ainsi qu'on le voit ci-contre : ce nombre 5 est le premier chiffre du quotient, et désigne les centaines, ou 500, attendu que 1916 exprime aussi des centaines. En effet, puisque 1916 est compris entre 5 et 6 fois le diviseur 329, cette partie 1916 étant des cen-

$$\begin{array}{rr|l} & 1916.87 & 329 \\ \cline{3-3} & 1645 & 582 \\ \cline{2-2} \text{1er Reste.} & 2718 & \\ & 2632 & \\ \cline{2-2} \text{2e Reste.} & 867 & \\ & 658 & \\ \cline{2-2} \text{3e Reste.} & 209 & \end{array}$$

* C'est surtout lorsque le deuxième chiffre vers la gauche du diviseur surpasse 5, que la tentative conduit à poser un quotient trop fort; car, dans la multiplication du diviseur par le quotient pour reproduire le dividende, le produit du premier chiffre à gauche du diviseur doit être ajouté aux dizaines qui ont été retenues. Pour 1435 : 287, par exemple, si l'on dit 14 : 2 donne 7; ce 7 sera trop grand, attendu qu'en multipliant 287 par 7, le produit 2×7 des centaines devrait être accru de la retenue 6, provenant de 87×7. Mais si l'on suppose 5 pour quotient, comme 87×5 donne 4 à retenir, et que $14 - 4$ divisé par 2 donne en effet 5, il est clair que 5 est le quotient cherché.

Observez que, si l'on remplace 287 par 300, le quotient $\frac{1435}{300}$ sera trop faible, puisque, ayant augmenté le diviseur, il est contenu moins de fois dans le dividende 1435. Si l'on veut

taines, le dividende proposé est lui-même compris entre 500 et 600 fois 329 (n° 13, 3°); donc le quotient cherché est composé de 500 + des dizaines et des unités, qu'il s'agit maintenant de trouver.

En retranchant du dividende le produit de 329 par 500, partie connue du quotient, c'est-à-dire en ôtant 1645 de 1916, et joignant au reste 271 la partie 87 qu'on avait séparée, il est clair que le reste 27187 est le produit de 239 par les dizaines et les unités inconnues du quotient, plus le reste : d'où il suit que, si l'on divise 27187 par 329, on devra obtenir au quotient ces dizaines et ces unités.

A cette question, semblable à la proposée, le même raisonnement s'applique, et l'on est conduit à la même conséquence. Séparons donc le premier chiffre à droite 7, c'est-à-dire descendons seulement le 8 à la droite du premier reste 271, ce qui donnera 2718 à diviser par 329 : le quotient 8 est, par la même raison que ci-dessus, le chiffre des dizaines; du dividende partiel 2718, ôtant le produit $329 \times 8 = 2632$, le reste 86 provient du produit de 329 par les unités, plus l'excès du dividende total sur un multiple exact. Enfin, si l'on divise 867 par 329, on obtient les unités 2, et le reste 209. C'est le même calcul qui se reproduit sans cesse, et qui donne tour à tour les divers chiffres du quotient, en vertu d'un raisonnement qui diffère peu de celui qu'on a fait dans le cas où le quotient n'a qu'un seul chiffre.

Donc, *pour faire une division, il faut séparer, vers la gauche du dividende, les chiffres nécessaires pour contenir le diviseur, diviser cette partie par le diviseur; le quotient n'aura qu'un seul chiffre, qui sera le premier des chiffres à gauche du quotient cherché, et son ordre sera le même que celui des unités du dividende partiel. On multipliera ce quotient par le diviseur; on retranchera le produit du dividende partiel; à la droite du reste, on descendra le chiffre suivant dans le dividende proposé, et on recommencera la même opération, qui donnera le second chiffre du quotient, de même ordre que le chiffre descendu. On continuera ce calcul jusqu'à ce que tous les chiffres du dividende soient épuisés.*

éviter de longues tentatives, *quand le deuxième chiffre vers la gauche du diviseur surpassera 5, on ajoutera 1 au premier chiffre, pour obtenir le quotient supposé;* mais lorsque ensuite on voudra vérifier ce quotient par la multiplication, il faudra rétablir le diviseur tel qu'il était. L'erreur, s'il y en a, consiste alors à donner un chiffre trop faible pour quotient; et cette erreur est manifestée par un reste qui surpasse le diviseur. Dans le cas que nous considérons dans cette note, il y a quelquefois de l'avantage à doubler, ou tripler,... le dividende et le diviseur, afin d'amener le deuxième chiffre de celui-ci à être < 5. Le quotient n'est point altéré par ce calcul (n° 15, 1°).

Si l'un des dividendes partiels ne contient pas le diviseur, il ne faudra pas oublier de mettre un zéro au quotient; puis on descendra un second chiffre du dividende.

Au lieu d'écrire chaque produit et de soustraire, il est plus court d'effectuer à la fois la multiplication et la soustraction. Par exemple, lorsqu'il a fallu multiplier 329 par 5 et ôter de 1916, voici comment on a pu opérer : $5 \times 9 = 45$ unités, qu'on ne peut ôter des 6 unités du dividende 1916; mais ajoutez 4 dizaines à ce 6, et dites $46 - 45 = 1$, que vous poserez sous 6. Comme 1916 aura par là été augmenté de 40, pour ne pas altérer la différence cherchée, il faudra de même ajouter 40 au nombre à soustraire, c'est-à-dire retenir 4 dizaines, qu'on joindra au produit suivant $2 \times 5 = 10$; on a donc 14 à ôter de 1 dizaine; on dit, de 21 ôtez 14, il reste 7, qu'on écrit sous 1, et on retient les deux dizaines ajoutées; enfin $5 \times 3 + 2 = 17$, $19 - 17 = 2$; et on a le premier reste 271.

De même, pour ôter de 2718 le produit 329×8, on dira $8 \times 9 = 72$; ajoutant 70 aux unités 8, on a $78 - 72 = 6$, qu'on pose aux unités, et on retient 7. Ensuite $2 \times 8 + 7 = 23$, ôtés de 1, ou plutôt de 31, il reste 8, qu'on écrit sous 1, en retenant 3; enfin, $3 \times 8 + 3 = 27$, ôtés de 27, il reste 0, qu'il est inutile d'écrire, etc. L'opération prend alors la forme abrégée que nous lui avons donnée ici*.

1916.87	329
271 8	582
8 67	
2 09 Reste.	

* Ce genre de calcul sert aussi à vérifier chaque chiffre du quotient : on fait alors l'opération ci-dessus, en procédant en sens contraire, c'est-à-dire de gauche à droite; et si quelque soustraction est impossible, à plus forte raison le sera-t-elle en commençant par la droite, puisque les produits à retrancher sont augmentés des retenues. Ainsi, pour $\frac{1916}{328}$, on a $\frac{19}{3}$, et il s'agit d'éprouver le 6 qu'on obtient, c'est-à-dire de s'assurer si le produit 328×6 est < 1916, cas où le chiffre 6 n'est pas trop fort. Commençons la multiplication par les centaines, on dira $3 \times 6 = 18$; de 19, il reste 1, qui, joint au chiffre suivant, 1, donne 11 dizaines; d'où l'on ne peut ôter le produit des dizaines 6×2 ou 12; ainsi le 6 est trop fort, et on doit essayer 5.

Observons que, dans toute multiplication, chacune des retenues ne peut excéder le multiplicateur qu'on éprouve : s'il est 5, il faudrait que l'autre facteur fût au moins 10, pour que le produit surpassât 50. Donc, si en faisant l'épreuve, comme on vient de le dire, on trouve quelqu'un des restes *au moins égal au quotient éprouvé*, on est assuré que, lorsqu'on fera l'opération de droite à gauche, et qu'on arrivera à ce même reste, la

Voici quelques exemples de division :

	72312.146	8369		386782.67	99887
	5360 1	8640		87121 6	387
	538 74			7212 07	
	5 986		Reste	219 98	
Reste	3 986				

	82394568708.9	8247685671		721.342	291
	8165397669 9	99		139 3	2478
Reste . . .	742480566 0			22 94	
				2 572	
			Reste	244	

	700200.031	683679		25677.875	2568
	16521 03	1024		2565 8	9999
	2847 451			254 67	
Reste	112 735			23 555	
			Reste	443	

19. Nous ferons observer que, 1° la division est la seule des quatre *règles* qui commence par la gauche.

2° Lorsqu'on a trouvé combien de fois un dividende partiel contient le diviseur, ce chiffre est toujours précisément celui qu'on doit mettre au quotient. Cependant comme pour trouver ce nombre de fois, le procédé indiqué, p. 20, consiste à réduire le diviseur à son premier chiffre à gauche, il se peut que cette opération donne en effet un chiffre trop fort : mais l'erreur est dans ce procédé et non dans le principe ; car une fois qu'on a obtenu le quotient de cette division partielle, on est assuré que ce chiffre est juste celui du quotient cherché.

3° Chaque chiffre qu'on descend en donne un au quotient ; l'un et l'autre sont de même ordre, en sorte qu'on peut toujours désigner *à priori* la quantité de chiffres du quotient, et indiquer l'ordre de chacun.

4° Tout quotient partiel ne peut excéder 9, qui est le plus grand

soustraction sera possible, ainsi que toutes les suivantes. Par exemple, pour $\frac{25643}{3572}$, on dira $\frac{25}{3}$ donne 8, qu'on reconnaîtra être trop fort : il faudra donc éprouver 7 ; ce qu'on fera ainsi qu'il suit : $3 \times 7 = 21$; de 25, il reste 4, qu'on joint au 6 des centaines de 25643 ; on a 46 ; puis $7 \times 5 = 35$; $46 - 35$ donne un reste > 7 ; ainsi 7 est le quotient cherché. En général, l'épreuve doit être poussée jusqu'à une soustraction impossible, ou jusqu'à un reste au moins égal au chiffre éprouvé. Si le 1er cas arrive, ce chiffre est trop fort ; dans le 2e, au contraire, il ne l'est pas. Il est rare qu'on soit forcé, pour vérifier un chiffre, de pousser le calcul jusqu'aux unités, et le plus souvent, on reconnaît s'il est bon dès la seconde soustraction.

nombre d'un seul chiffre. Ainsi, pour $\frac{170}{19}$, on dira, il est vrai, en 17, combien de fois 1? mais, loin de mettre 17 au produit, il ne faut éprouver que 9, encore ce chiffre est-il trop fort ici ; le quotient n'est que 8, qu'on aurait obtenu de suite en disant $\frac{17}{2}$, au lieu de $\frac{17}{1}$; c'est ce que prescrit la note, page 21.

5° Pour éviter les erreurs, il conviendra de marquer d'un point chaque chiffre du dividende, à mesure qu'on l'aura descendu.

Décomposition en facteurs premiers. Propriétés des diviseurs communs à plusieurs nombres.

20. On dit qu'un nombre est *premier*, lorsqu'il n'est exactement divisible que par lui-même et l'unité : tels sont 7, 11, 2, 1. Deux nombres qui, tels que 21 et 40, n'ont d'autre diviseur commun que l'unité, sont dits *premiers entre eux*.

21. *Lorsqu'un nombre est divisible par un autre, tous les multiples du premier sont aussi divisibles par le second.* Si 18 est multiple de 2, 3×18, qui revient à $18 + 18 + 18$, est divisible par 2, puisque chaque partie est multiple de 2.

22. Supposons qu'après avoir obtenu le produit de 32 par 157, on divise ces trois nombres par un autre quelconque, tel que 9, examinons ce qui arrivera * : 32 étant décomposé en $9 \times 3 + 5$, si l'on multiplie par 157, la première partie sera un multiple de 9 ; et le produit proposé étant divisé par 9, doit donner le même reste que 5×157. Mais de même 157 se décompose en $9 \times 17 + 4$; multipliant par 5 et divisant par 9, le reste dont il s'agit est le même que celui de 4×5 ; ainsi *le reste de la division d'un produit est le même que celui que donne le produit des restes des deux facteurs.*

* Si l'on divise deux facteurs entiers F et F' par un nombre quelconque n, ils recevront la forme ci-contre, q et q' étant les quotients entiers, r et r' les restes. En examinant les termes du produit FF', on reconnaît qu'ils contiennent tous le facteur n, rr' excepté. Donc, en divisant le produit par n, on voit que $\frac{FF'}{n}$ et $\frac{rr'}{n}$ doivent donner le même reste.

$$\begin{array}{l} F = qn + r \\ F' = q'n + r' \\ \hline FF' = qq'n^2 + q'nr \\ \quad + qnr' \quad + rr' \end{array}$$

23. Avant de nous occuper de la recherche des diviseurs des nombres, problème d'une grande importance, proposons-nous de trouver le plus grand nombre qui puisse diviser exactement deux nombres donnés, tels que 312 et 132; c'est ce qu'on appelle leur *plus grand commun diviseur*.

Observons que si 132 divisait exactement 312, 132 serait le plus grand commun diviseur de ces nombres, puisque 132 ne peut être divisible par un nombre plus grand que lui-même. On essayera donc cette division, 312 : 132; mais on trouve le quotient 2, et le reste 48, savoir,

$$312 = 2 \times 132 + 48.$$

Divisons toute cette équation par un nombre quelconque 3 qui divise exactement 312 et 132; ce nombre 3 divisera aussi 2×132 (n° 21); 48 doit donc être aussi divisible par 3, puisque le quotient 48 : 3, ajouté à celui de 2×132, doit donner pour somme le quotient de 312 : 3, et que ces deux derniers quotients sont entiers. Concluons de là que *tout diviseur commun à deux nombres divise aussi le reste de la division de l'un par l'autre.*

Maintenant, supposons que 12 soit le plus grand diviseur commun ci-dessus cherché, et divisons toute l'équation par 12; nous aurons $26 = 2 \times 11 + 4$. Or les quotients 26 et 11 doivent être premiers entre eux, puisque, sans cela, 12 ne serait pas le plus grand diviseur de 312 et 132. De même 11 et 4 ne peuvent avoir de diviseur commun, puisque ce nombre devrait aussi diviser 26, savoir, 26 et 11, contre ce qu'on vient de dire. Ainsi 12 est à la fois le plus grand diviseur commun de 312 et 132, et aussi de 132 et 48. D'où l'on voit que la question se réduit à chercher le plus grand diviseur commun de 132 et 48, problème plus simple, puisque $48 < 312$.

En raisonnant de même sur 48 et 132, on prouvera qu'il faut diviser 132 par 48; que si la division se faisait exactement, 48 serait le plus grand diviseur commun cherché ; et que, comme on trouve 36 pour reste, ce diviseur est le même que celui de 48 et 36. Divisant 48 par 36, on verra que le plus grand commun diviseur demandé est celui de 36 et 12 (reste de la division de 48 par 36); enfin, 12 divisant 36, c'est 12 qui est le plus grand diviseur commun de 312 et 132. On donne au calcul la disposition ci-contre;

312	132	48	36	12
	2	2	1	3

où chaque reste est écrit à la droite du diviseur, pour qu'il occupe la place convenable à la division subséquente.

Donc, *pour trouver le plus grand diviseur commun de deux nombres, divisez l'un par l'autre ; divisez ensuite le diviseur par le reste, et continuez de même à prendre chaque reste pour diviseur du reste précédent, jusqu'à ce que vous trouviez un quotient exact ; ce quotient sera le plus grand diviseur commun cherché.*

Voici encore deux opérations de ce genre, l'une pour 2961 et 799 ; l'autre pour 115 et 69; les plus grands diviseurs communs sont 47 et 23.

2961	799	564	235	94	47
	3	1	2	2	2

115	69	46	23
	1	1	2

24. Remarquez que, 1° les restes étant sans cesse décroissants, on doit arriver à un diviseur exact, ne fût-ce que l'unité : quand le plus grand commun diviseur est 1, les deux nombres proposés sont premiers entre eux. C'est ce qui arrive pour 50 et 21. Il est fâcheux de ne pouvoir reconnaître ce cas *à priori*, puisqu'on a fait tous les frais d'un calcul inutile.

2° Le plus grand commun diviseur de deux nombres devant diviser tous les restes successifs qu'on trouve dans l'opération, si l'un de ces restes est un nombre premier qui ne divise pas le reste précédent, on est assuré que le calcul doit se terminer par l'unité, seul diviseur des nombres proposés. Par exemple, pour 824 et 319, on arrive au nombre premier 53 qui ne divise pas 133 : il est inutile de pousser plus loin le calcul pour conclure que l'unité est le seul diviseur commun.

824	319	186	133	53	nombre premier.
	2	1	1	2	

3° Le raisonnement précédent prouve aussi que tout diviseur de 312 et 132, tel que 3, divise aussi 48, puis 36 et 12, c'est-à-dire tous les restes successifs de l'opération : en sorte que tous les diviseurs de 12 doivent aussi diviser 312 et 132, et sont les seuls qui jouissent de cette propriété, savoir, 1, 2, 3, 4, 6 et 12. Donc *tout diviseur de deux nombres divise leur plus grand commun diviseur; et pour obtenir tous les facteurs communs à deux nombres, il ne faut que chercher les facteurs de leur plus grand commun diviseur.*

4° Si, dans le cours des calculs, on reconnait qu'un nombre divise deux restes successifs, on supprimera ce facteur dans le divi-

dende et le diviseur, et on continuera l'opération; lorsqu'on aura trouvé le diviseur commun, il faudra le multiplier par le facteur supprimé. C'est ainsi que 4830 et 3570 sont multiples de 10; prenant donc 483 et 357, on fait la division, et on a le reste 126, qui, ainsi que 357, est divisible par 3 : ôtant ce facteur 3, on opère sur 119 et 42, dont le commun diviseur est 7; ainsi celui de 4830 et 3570 est $10 \times 3 \times 7 = 210$.

Mais si l'on reconnaît que l'un des restes a un facteur premier qui ne divise pas le reste précédent, on peut le supprimer, sans que le diviseur commun soit changé. En cherchant (p. 27) le plus grand commun diviseur de 2961 et 799, on voit que le reste 564 est multiple de $12 = 3 \times 4$: d'ailleurs le diviseur 799 n'est divisible ni par 3, ni par 2; supprimant ce facteur 12, 564 est remplacé par 47; on trouve le quotient exact 17, ainsi 47 est le plus grand commun diviseur cherché. Cela résulte de ce qui a été dit (3°).

25. *Si le produit de deux facteurs est divisible par un nombre qui soit premier avec l'un d'eux, ce nombre doit diviser l'autre facteur.* Par exemple, 56×45, ou 2520, est divisible par 15 qui est premier avec 56; je dis que 15 doit diviser 45; car 15 divise visiblement 15×45, et aussi 56×45 (par hypothèse); donc, 15 doit diviser le plus grand commun diviseur (24, 3°) qui est 45, puisque 56 et 15 n'ont que 1 pour facteur commun.

1° *Deux facteurs moindres qu'un nombre premier ne peuvent donner un produit divisible par ce nombre.*

2° Le produit de deux nombres premiers ne peut admettre d'autres diviseurs que ces mêmes nombres, outre l'unité et le produit même.

3° Plusieurs facteurs $5 \times 8 \times 9 \times 11$ ne peuvent former un produit divisible par un nombre premier 3, qu'autant que l'un des facteurs au moins est divisible par 3.

4° *Si un produit est divisible par un nombre non premier, il faut qu'on retrouve tous les facteurs de ce dernier parmi ceux qui constituent les nombres multipliés.* Ainsi 10×70 est divisible par 28, attendu que $28 = 2 \times 2 \times 7$; que le premier facteur 2 se trouve dans $10 = 2 \times 5$; et le second 2, ainsi que 7, dans $70 = 2 \times 7 \times 5$: le quotient est 5×5. Mais si quelqu'un des facteurs du diviseur manquait, la division du produit serait impossible exactement. Donc, *si plusieurs facteurs sont premiers avec un nombre quelconque, le produit l'est aussi;* et si ces facteurs sont premiers entre eux, et

qu'un nombre soit divisible par chacun d'eux, il le sera aussi par leur produit, et par les produits qu'on forme en combinant ces facteurs 2 à 2, 3 à 3....

26. *Il n'y a qu'un seul système de facteurs premiers, capable de produire un nombre donné.* Par exemple, $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ ne peut être produit par d'autres facteurs premiers, tels que $7 \times 11 \times 2$; car on aurait $2^3 \times 3^2 \times 5 = 7 \times 11 \times 2$, et il s'ensuivrait que le premier membre serait multiple de 7, contre ce qu'on a vu (4°). On ne peut donc admettre pour 360, que les facteurs premiers 2, 3, et 5, et il reste à faire voir qu'on ne peut leur donner qu'un système d'exposants; qu'on n'a pas, par exemple, $360 = 2 \times 3^3 \times 5^2$. En effet, il en résulterait $2^3 . 3^2 . 5 = 2 . 3^3 . 5^2$, ou, en supprimant les facteurs communs, $2^2 = 3 \times 5$, ce qui est absurde (4°).

Si deux nombres, tels que 7 et 11, sont premiers entre eux, deux puissances quelconques de 7 et 11, telles que 7^3 et 11^4, sont aussi premières entre elles; puisque, si elles avaient un facteur commun, il le serait aussi de 7 et de 11.

Soit un cube exact, tel que $8000 = 20^3$: si l'on décompose 20 en 4×5, 8000 sera le cube de 4×5; mais, comme la multiplication permet d'intervertir l'ordre des facteurs, on a $8000 = 4^3 \times 5^3$. On voit donc que chaque facteur se trouve élevé au cube. On peut en dire autant de toute puissance, quels que soient les facteurs. Donc, *si un nombre est une puissance exacte, en le décomposant en facteurs premiers, chacun doit être affecté d'un exposant multiple de la puissance.*

27. Pour *décomposer un nombre en ses facteurs premiers,* on le divisera d'abord par 2, autant de fois successives que cela sera possible, et le nombre proposé sera le produit d'une puissance de 2 par un quotient connu, non divisible par 2. On essayera de même la division de ce quotient par 3, autant de fois qu'il se pourra, et il sera le produit d'une puissance de 3 par un nouveau quotient connu, non divisible par 3. On continuera de même à éprouver si la division est possible par tous les nombres premiers consécutifs 5, 7, 11, 13.... Le nombre proposé sera le produit de ces divers nombres premiers, chacun élevé à une puissance marquée par le nombre des divisions qu'il a effectuées.

Par exemple, pour 360, on divisera par 2, puis le quotient 180 par 2, enfin 90 par 2; comme le troisième quotient 45 n'est plus divisible par 2, on a $360 = 2^3 \times 45$. On divisera 45 par 3; on